

<학술논문>

DOI <http://dx.doi.org/10.3795/KSME-A.2016.40.4.353>

ISSN 1226-4873(Print)

2288-5226(Online)

히스테리시스 거동을 하는 탄성체의 비선형 점탄성 구성방정식

유새롬^{*†} · 주재형^{**} · 최석주^{***} · 김두만^{*}

* 한국항공대 항공우주 및 기계공학부, ** Dept. of Mechanical Engineering, Univ. of North Texas, *** 한국타이어

Non Linear Viscoelastic Constitutive Relation of Elastomers for Hysteresis Behavior

Sairom Yoo^{*†}, Jaehyung Ju^{**}, Seok-Ju Choi^{***} and Dooman Kim^{*}

* Dept. of Aerospace Engineering, Korea Aerospace Univ.,

** Dept. of Mechanical Engineering, Univ. of North Texas,

*** R&D Center, Hnakook Tire Co. Ltd.

(Received October 5, 2015 ; Revised December 28, 2015 ; Accepted February 10, 2016)

Key Words: Viscoelastic(점탄성), Non-linear(비선형), Hyperelastic (초탄성), Constitutive Relation(구성방정식)

초록: 정확한 점탄성 재료의 히스테리시스 모델은 에너지 손실을 정량화 하는데 매우 중요하다. 우리는 본 논문에서 대변형 상태의 탄성체에 대한 비선형 초-점탄성 지배방정식 모델을 제시하고자 한다. 본 연구는 Hoofatt의 모델에서 Neo-Hookean 초탄성 모델 대신 Yeoh 초탄성 모델로 지배 방정식을 유도하여 탄성체의 점탄성 거동을 모델링하였다. 또한 폴리우레탄 시편을 사용하여, 평균 변형률 $\epsilon_m=1.5$, 진폭 변형률 $\epsilon_a=0.2\sim 0.8$, 주파수 $f=0.02\sim 0.2$ 의 조건에서 단축 사인형 반복 하중 실험과 제시한 점탄성 모델을 Matlab으로 비교하였다. 본 연구의 점탄성 모델은 변형률이 230% 이상의 대변형 상태의 에너지 손실도 계산할 수 있다.

Abstract: An accurate hysteresis model of an elastomer is important for quantifying viscoelastic energy loss. We suggest a highly nonlinear hyper-viscoelastic constitutive model of elastomers. The model captures a nonlinear viscoelastic characteristic by combining Yeoh's hyperelastic model and Hoofatt's hysteresis model used Neo-Hookean hyperelastic model. Analytical and numerical models were generated from uniaxial cyclic tests of an elastomer under a sinusoidal load with a mean strain of 150%, amplitudes of 20~80%, and frequencies of 0.02~0.2Hz. The viscoelastic model can highly capture the viscoelastic energy loss up to a strain of 230%.

- 기호설명 -

σ_A : 주응력 - 탄성 성분 응력
 σ_B : 과응력 - 점성 성분 응력
 ψ : 헬름홀츠 자유 에너지 방정식
 B : 코시-그린 좌변형 텐서
 p : 미정압
 F_e : 중간 초탄성 변형 구배
 D_v : 점성 댐퍼의 변형 텐서 속도
 η : 점성
 L : 속도 구배

ϵ_a : 오프셋 변형률
 ϵ_m : 평균 변형률
 ϵ_s : 이동 대수 변형률
 λ_a : 오프셋 신장률
 λ_e : 중간 초탄성 스프링 신장률
 C_{10}^e : Neo-Hookean 상수

1. 서론

고무와 폴리우레탄(Polyurethane) 같은 탄성체는 재료가 갖는 점탄성 특성으로 인해 타이어, 패킹 등 다양한 용도로 사용된다. 점탄성이란 점성과 탄성의 성질을 동시에 갖는 재료의 특성을 지칭하

† Corresponding Author, stormedg@naver.com

© 2016 The Korean Society of Mechanical Engineers

는 것으로 시간에 무관하게 즉각적으로 반응하는 탄성거동과 하중이 가해짐에 따라 변형이 지연되는 시간에 의존적인 점성이 동시에 나타난다. 이러한 점탄성 재료는 반복하중을 받을 경우 응답 지연 현으로 인해 히스테리시스 현상이 발생하게 되고, 이는 다양한 현상으로 나타나게 된다. 대표적인 예로 고무로 만들어진 타이어의 경우 주행 시 회전운동으로 인한 반복 하중이 발생하고, 이로 인한 히스테리시스 손실은 열에너지로 전환되어 타이어의 온도가 증가한다.

점탄성 재료의 히스테리시스 거동을 예측하는 것은 다양한 면에서 활용 가치가 높다. 타이어의 경우 히스테리시스 손실을 줄여 성능을 개선하는데 사용할 수 있고, 충격 흡수를 위한 댐퍼의 경우 히스테리시스 손실을 증가 시켜 성능을 향상시키는데 사용할 수 있다. 하지만 재료의 거동이 매우 복잡하고 이를 선형적으로 표현할 수 없어 아직도 완벽하게 점탄성 재료의 거동을 예측하는 것은 거의 불가능한 일이다. 이전부터 점탄성 거동을 예측하기 위해 다양한 모델들이 제시되어 왔고 오늘날에도 많은 모델들이 존재한다.

가장 간단한 점탄성 모델로 Maxwell 모델이 존재한다. Maxwell 모델은 선형 점탄성 모델 중 가장 간단한 모델로 스프링과 대쉬풋의 직렬연결로 점탄성 거동을 표현 하였다. Maxwell 모델은 가장 간단하지만, 선형 모델이기 때문에 비선형으로 거동하는 점탄성 재료에는 정확도가 매우 좋지 않다. 만약 Maxwell 모델로 일정 응력을 가하는 상태를 표현한다면, 선형적으로 변형률이 증가하는 결과가 나올 것이다. 하지만 대부분의 점탄성 재료들은 시간이 지남에 따라 시간당 변형률이 감소한다.⁽¹⁾ 유사한 모델로 스프링과 대쉬풋의 병렬연결로 표현한 Kelvin-Voigt 모델이 있으나 Maxwell 모델과 마찬가지로 선형 모델의 단점이 존재한다. 이러한 선형 점탄성 모델의 정확도 향상을 위해 Maxwell-Wiechert 모델로 불리는 Generalized Maxwell Model이 개발되었다.^(2,3) Generalized Maxwell Model은 Maxwell 모델을 병렬로 연결하여 각각의 단위 요소들이 단위 시간에 대한 점탄성 거동을 나타낸다. Generalized Maxwell 모델은 Maxwell 모델 보다 정확한 점탄성 모델로, Prony 시리즈를 사용한 Generalized Maxwell 모델은 상당히 우수한 정확도를 자랑한다. 비선형 회귀 분석을 통해 얻은 계수들을 통해 재료의 비선형성을 근사적으로 표현할 수 있지만 정확도가 높아질수록 더 많은 수의 계수들이 필요하다.⁽⁴⁾ 많은 수의

계수가 필요한 Prony 시리즈의 단점을 보완하기 위해, Haupt와 Lion은 분수 도함수의 미분 방정식을 사용하여 적은 수의 계수로 정의 되는 이완 함수를 표현하였다.⁽⁵⁾

실제 점탄성 재료의 거동은 시간 의존적 거동을 하지만, 위 모델들은 정상 상태를 가정하였기 때문에 이를 표현하지 못한다. 이를 해결하기 위해 J. S. Bergstrom, M. C. Boyce, A. Lion 등이 속도의존 점탄성 모델을 개발 하였다.⁽⁶⁻⁹⁾ J. S. Bergstrom와 M. C. Boyce이 개발한 BB model은 점탄성이 하중이 가해지는 시간에 따라 변하는 분자의 운동의 연관성을 바탕으로, 응답 지연현상의 원인이 분자의 재결합에 필요한 시간이 충분하지 않아 발생하는 것에 원인을 두고 있다. 하지만 비교적 낮은 시간당 변형률 영역에서만 비교적 정확하고 높은 시간당 변형률 영역은 표현하지 못한다는 단점이 존재한다. 최근 Y. Tomita 는 반복 하중 상태의 시간당 변형률에 대한 히스테리시스 손실을 표현할 수 있는 점탄성 지배방정식을 개발하였다.^(10,11)

Hoofatt 은 Helmholtz 자유 에너지 이론을 근간으로 반복 하중에서 합성고무의 순간적인 정상 상태 반응에 대한 지배 방정식을 개발하였다.⁽¹²⁾ 연속체 열역학(Continuum thermodynamics)에서 Helmholtz 자유 에너지는 평형 상태(Equilibrium)과 비 평형 상태(Non-equilibrium)로 나뉜다. 마찬가지로 Hoofatt 의 지배 방정식에서도 평형 상태와 비 평형 상태를 주응력(Primary stress)과 과응력(Overstress)로 나누고 있다. 이때, 과응력은 점성에 의한 에너지 소산율의 결과로 발생하는 응력 편차량이다. Hoofatt 은 주응력과 과응력을 계산하는 지배 방정식을 개발하였고 이를 유한 요소 해석(FEA)과 단축 인장 실험 데이터와 비교하였다. Hoofatt 의 모델은 비선형성을 잘 표현할수 있는 장점이 있으나 몇가지 개선해야될 문제가 있다.

Hoofatt 은 삼각 파형의 하중을 대상으로 지배 방정식을 정립하였고, 이때 ϵ 는 상수이고, 지배 방정식의 실험 조건이 된다. 하지만 타이어 같은 회전체의 경우 재료가 받은 하중은 시간당 변형률 변화량 $\dot{\epsilon}$ 가 상수인 삼각 파형의 하중이 아닌 시간당 변형률 변화량 ϵ 가 변수인 사인형 하중이다.⁽¹³⁾ 따라서 Hoofatt의 지배 방정식을 회전체에 사용하기 위해서는 시간당 변형률 변화량 $\dot{\epsilon}$ 를 상수가 아닌 변수로 하고 실험 변수를 주파수 f 로 변경해야 한다.

또한 기존 Hoofatt 연구팀의 이론은 Neo-Hookean 모델을 사용하여 이론을 유도하여 소변

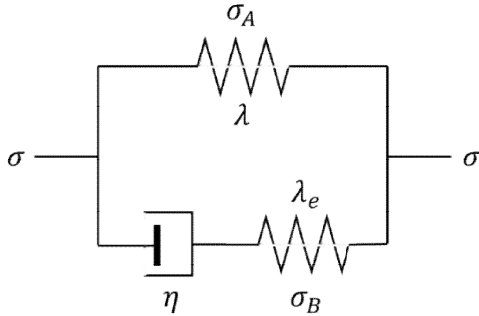


Fig. 1 Rheological constitutive model

형에 적합 하지만, 대변형의 경우 비선형성이 증가하여 잘 맞지 않았다. 본 논문은 Neo-Hookean 모델을 사용한 Hoofatt의 점탄성 모델을 Yeoh 모델로 다시 유도하여 비선형성을 반영하였다.

2. 지배방정식

2.1 Constitutive Model

Hoofatt 연구진은 등방성(Isotropic)과 비압축성(Incompressible) 가정으로 초-점탄성 지배 방정식을 개발하였다. Hoofatt 연구진의 지배 방정식은 주 초탄성 스프링(Primary hyperelastic spring)과 Maxwell 단위 요소를 Fig. 1과 같이 병렬로 배치하였다. 이때, Maxwell 단위 요소의 스프링을 중간 초탄성 스프링(Intermediate hyperelastic spring)이라 한다. 또한, 중간 초탄성 스프링은 비 선형 점성 댐퍼와 연결되어 하나의 단위를 이룬다.^(12,14) 총응력(Total stress) σ 는 주 초탄성 스프링 과 중간 초탄성 스프링에서 각각 발생하는 응력을 σ_A 와 σ_B 의 합으로 다음 식 (1)과 같이 나타냈다. 주 초탄성 스프링과 중간 초탄성 스프링의 신장률은 각각 λ 와 λ_e 로 표기하였다.

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_B \quad (1)$$

이때, σ_A 와 σ_B 는 주응력(Primary stress)과 과응력(Overstress)이라 한다. 주응력은 반복하중에 의한 히스테리시스 곡선의 평균 응력으로 동적 히스테리시스 거동의 평균 강성을 대표한다. 이때, 주응력은 반복 하중 조건(평균 변형률, 빈폭 변형률, 주파수)에 따라 변한다. 과응력은 총응력과 주응력의 차로써 일반적으로 하중과 하중이 없을 시에 같은 함수로 정의한다. 이러한 과응력은 점탄성 재료에서 주로 발생하는데, 재료의 점성으로 인한 하중과 변형 사이에서 발생하는 시간차(Time lag) 현상에 기인한다. 초탄성 모델(Hyperelastic model)

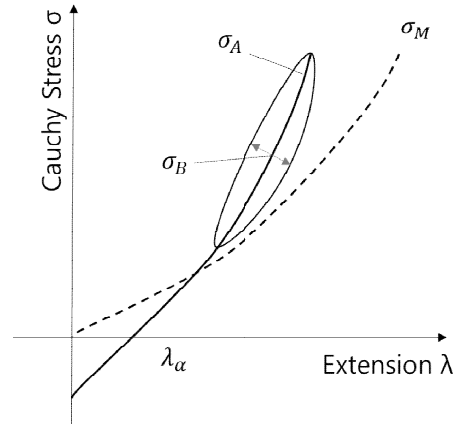


Fig. 2 Hysteresis curve of constitutive model

이 실제 재료의 거동과 잘 맞지 않는 것은 앞서 말한 점성이 원인이다. 따라서 이러한 현상을 모델에 반영하기 위해 기존의 모델을 변형할 필요가 있다.

위의 Fig. 2를 보면, 실제 히스테리시스 곡선의 주 응력 곡선은 평균 신장률 λ_m 이 0인 경우를 제외하고 원점을 지나지 않는다. 이때 응력이 0인 주응력 곡선의 x 절편인 신장률 값을 오프셋 신장률(Offset extension ratio) λ_α 라 한다. 오프셋 신장률 λ_α 는 초탄성 모델을 보정하기 위해 사용된다.

σ_M 은 주 스프링의 응력 성분으로서 반복 하중 전 내부 하중상태를 나타낸다. 예로 타이어 같은 경우에도 주행 전 차량의 하중으로 변형이 존재하는 것과 같다.

2.2 Hyperelastic springs and viscous damper

Hoofatt 연구진은 주응력 σ_A 와 과응력 σ_B 를 Helmholtz 자유 에너지 방정식 ψ 으로 다음 식 (2)와 식 (3)과 같이 표현하였다. 이때 Helmholtz 자유 에너지 ψ 는 식 (4)와 식 (5)처럼 Yeoh 변형률 에너지 포텐셜 방정식(Strain energy potentials function)으로 나타낼 수 있고, 식 (2), (3)과 식 (4), (5)를 연립하면 식 (6), (7)로 주응력 σ_A 와 과응력 σ_B 를 Cauchy-Green 좌변형 텐서(Left Cauchy-Green deformation tensor) \mathbf{B} 에 대한 함수로 정의할 수 있다.

$$\sigma_A = \mathbf{F} \frac{\partial \psi_A}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \quad (2)$$

$$\sigma_B = \mathbf{F}_e \frac{\partial \psi_B}{\partial \Gamma_e} \mathbf{F}_e^T \quad (3)$$

$$\psi_A(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^3 C_i (I_1 - 3)^i \quad (4)$$

$$\psi_B(\Gamma_e) = \sum_{i=1}^3 C_i^e (I_1 - 3)^i \quad (5)$$

$$\sigma_A = 2 \frac{\partial \psi_A(\mathbf{E})}{\partial I_1} \mathbf{B} - p_A \mathbf{I} \quad (6)$$

$$\sigma_B = 2 \frac{\partial \psi_B(\Gamma_e)}{\partial I_1} \mathbf{B}_e - p_A \mathbf{I} \quad (7)$$

이때, \mathbf{I} 는 단위행렬(Identity matrix)이고, p_A 와 p_B 는 미정압(Undetermined pressure), $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, $\mathbf{B}_e = \mathbf{F}_e\mathbf{F}_e^T$ 이고, F_e 와 F 는 비압축성 변형 구배(Incompressible deformation gradient)이다. 하첨자 e 는 중간 초탄성 스프링의 성분임을 뜻한다.

Hoofatt은 Huber과 Tsakmakis에 의해 유도된 점성과 과응력의 관계식 식 (8)에 점성 댐퍼의 변형 텐서의 속도(The rate of deformation tensor of the viscous damper) D_v 를 평향 과응력(Deviatoric overstress)와 Cauchy-Green 우변형 텐서(Right Cauchy-Green deformation tensor)의 관계식으로 표현하여 식 (9)와 같이 점성 η 에 관한 식으로 나타내었다.⁽¹⁵⁾

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{L}\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e\mathbf{L}^T - 2\mathbf{F}_e\mathbf{D}_v\mathbf{F}_e^T \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{L}\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e\mathbf{L}^T - \frac{2}{\eta} \mathbf{B}_e\sigma_B^D \quad (9)$$

이때, \mathbf{L} 은 속도 구배 텐서이다.

2.3 Uniaxial Constitutive equations

앞서 말했듯이 Hoofatt 연구진은 평균 변형률이 원점을 지나지 않는 오차를 고려하기 위하여 오프셋 신장률 인자(Offset extension ratio factor) α 를 도입하였다. 오프셋 신장률 인자 α 는 다음 식 (10)과 같이 오프셋 변형률 ε_α 과 평균 변형률 ε_m 의 비로 정의 된다.

$$\alpha = \varepsilon_\alpha / \varepsilon_m \quad (10)$$

이때, 평균 변형률 ε_m , 시프트 대수 변형률(Shifted logarithmic strain) ε_s 과 수정된 Cauchy-Green 좌변형 텐서(Modified left Cauchy-Green deformation tensor) \mathbf{B}_s 의 관계는 다음 식 (11)과 같다.

$$\varepsilon_s = \varepsilon - \alpha\varepsilon_m = -(\mathbf{h} \mathbf{B}_s^{-1})/2 \quad (11)$$

따라서 식 (6)의 주응력 σ_A 는 다음 식 (12)와 같이 주어진다.

$$\sigma_A = 2 \sum_{i=1}^3 i C_i (I_{1s} - 3)^{i-1} \mathbf{B}_s - p_{eq} \mathbf{I} \quad (12)$$

이때, $\varepsilon_s = -(\mathbf{h} \mathbf{B}_s^{-1})/2$ 고, $\varepsilon_s = \varepsilon - \alpha\varepsilon_m$ 이다.

만약 하중상태가 단축 하중 상태라면 위 식 (12)는 다음 식 (13)으로 간단해진다.

$$\sigma_A = 2 \left[\sum_{i=1}^3 i C_i \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_\alpha} \right)^2 + 2 \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} - 3 \right)^{i-1} \right] \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_\alpha} \right)^2 - \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} \right) \quad (13)$$

이때, λ_α 는 오프셋 신장률로 $\varepsilon_\alpha = \mathbf{h} \lambda_\alpha$ 이다.

마찬가지로 식 (7)은 단축 하중일 경우 식 (14)와 같이 간략해진다.

$$\sigma_B = 2 \left[\sum_{i=1}^3 i C_i^e \left(\lambda_e^2 + \frac{2}{\lambda_e} - 3 \right)^{i-1} \right] \left(\lambda_e^2 - \frac{1}{\lambda_e} \right) \quad (14)$$

이때, λ_e 와 C_{10}^e 는 각각 중간 초탄성 스프링의 신장률과 Yeoh 계수이다. 이때, Hoofatt은 λ_e 이 미지의 비선형 점탄성 진화 함수(Unknown non-linear viscoelastic evolution function)에 의해 결정되기 때문에, C_{10}^e 를 C_{10} 과 같다고 가정하였다.⁽¹²⁾ 따라서 이후 $C_{10}^e = C_{10}$ 로 사용한다.

단축 하중에서 식 (9)는 과응력 σ_B 와 λ_v 로 다음 식 (15)와 같이 간단히 쓸 수 있다. 자세한 유도과정은 Hoofatt 연구진의 논문인 참고문헌 (12)의 Appendix를 참고하길 바란다.

$$\mathbf{H} = \frac{2}{3} \sigma_B \left[\frac{\lambda}{\lambda} - \frac{\lambda_e}{\lambda_e} \right]^{-1} = \frac{2\sigma_B}{3 d(\mathbf{h} \lambda_v) / dt} \quad (15)$$

이때, λ_v 는 $\lambda_v = \lambda / \lambda_e$ 이다. Hoofatt 연구진의 논문 (12)는 삼각과형 반복 하중을 사용하였기 때문에 λ 이 상수지만, 본 논문은 사인파형을 사용하여 λ 이 변수이다. 따라서 λ_e 도 변수이다.

Hoofatt 연구진은 점성 η 를 1차 불변량(First invariant) I_1 에 대한 식으로 다음 식 (16)과 같이 나타내었다.⁽¹²⁾

$$\eta = A s^m \frac{m \pi (I_1 - I_{1m} \mathbf{h})}{(I_{1m} a x - I_{1m} \mathbf{h})} \quad 0 < m < 1 \text{ and } A > 0 \quad (16)$$

이때 A 와 m 은 재료 물성으로서 평균 변형률, 변형률 진폭, 주기에 대하여 어떠한 경향이 나타난다. 따라서 A 와 m , I_{1m} , ΔI_1 , f 에 대한 함수로 $A = f(I_{1m}, \Delta I_1, f)$, $m = f(I_{1m}, \Delta I_1, f)$ 과 같이 표현할 수 있고, 각 상태에 따른 A 와 m 은 비선형 회기 분석(Non-linear regression analysis)을 사용하여 구할 수 있다.

하지만 대변형 상태에서 위 식 (16)으로는 점성 η 의 g비선형성을 잘 반영하지 못한다. 따라서 본 논문에서는 새로운 계수 s 를 추가하여 식 (17)과 같이 점성 η 를 정의하였다.

$$H = A(I_1 - s) \dot{s}^m \frac{\pi(I_1 - I_{1m} \dot{n})}{(I_{1m} a x^{-I_{1m} \dot{n}})} \quad (17)$$

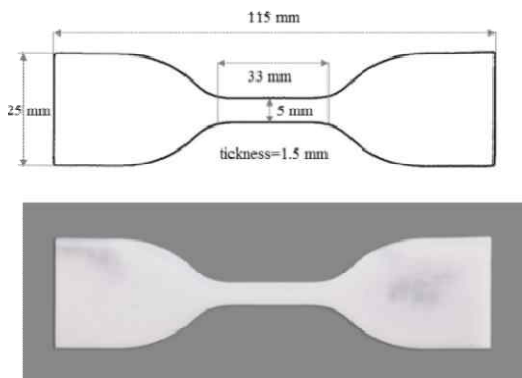
이때 s 도 A 와 m 과 마찬가지로 $s = f(I_{1m}, \Delta I_1, f)$ 과 같이 $I_{1m}, \Delta I_1, f$ 에 대한 함수로 표현할 수 있다.

3. 실험

본 논문에서는 폴리우레탄 재료에 대한 단축인장 실험을 하였다. 시편은 ASTM D412를 참고하여 Fig. 3과 같이 길이 115mm 폭 5mm 두께 1.5mm의 덤벨 형상 시편으로 제작되었다. 실험 장치는 MTS C43 Electromechanical Universal Test Systems을 사용하였다.

Table 1 List of parameters about uniaxial test

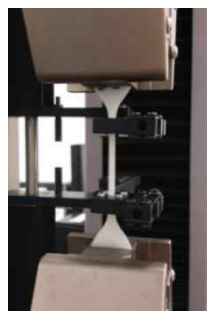
Mean	Amplitude	Frequency (Hz)
1.5	0.2	0.02
	0.4	0.1
	0.8	0.2
Validation		
1.5	0.6	0.15



(a)



(b)



(c)

Fig. 3 (a) Specimen of polyurethane (b) MTS C43 test system (c) Testing phase

실험 조건은 Table 1에서 보듯이 평균 변형률 1.5을 기준으로 진폭 변형률 0.2, 0.4, 0.8, 주파수 0.02, 0.1, 0.2 Hz의 총 9 case에 대하여 실험을 실시하였다. 변위 측정은 Extension meter로 측정하였다.

하중은 Fig. 4와 같이 사인형 하중을 반복적으로 가하여 Mullins 효과의 영향이 최소화 되어 히스테리시스 곡선이 안정될 때까지 20회 동안 실험을 진행하였다.⁽¹⁶⁾

3.1 Change of specimen cross area for Cauchy stress

일반적으로 재료가 인장이나 압축을 받을 경우 시편의 단면은 Poission ratio에 따라 변하게 된다. 흔히들 사용하는 초기 단면적을 기준으로 계산한 응력을 공칭 응력(Nominal stress)이라 하는데 이는 단면의 변화를 반영하지 않은 응력으로 정확한 응력이 아니다. 단면의 변화를 반영한 응력을 코시 응력(Cauchy stress)이라 하고 이는 식 (18)과 같이 계산 할 수 있다.

$$\sigma_{Cauchy} = \sigma_{Nominal} / R_{Area Ratio} \quad (18)$$

본 논문에서는 Fig. 5와 같이 변형률 0.1 단위마다 단면의 폭을 측정하고 이를 바탕으로 단면적의 변화를 초기 단면적의 비로 계산하였다.

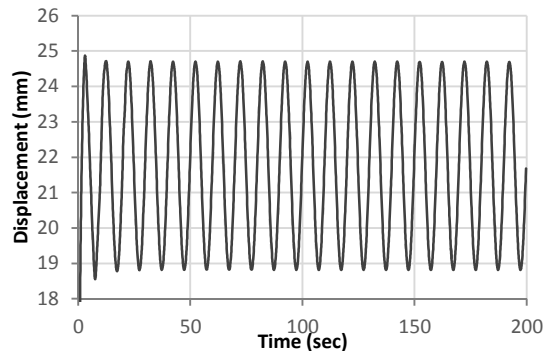


Fig. 4 Uniaxial test loading about $\epsilon_a = 0.2$ $f = 0.1$ displacement -time graph

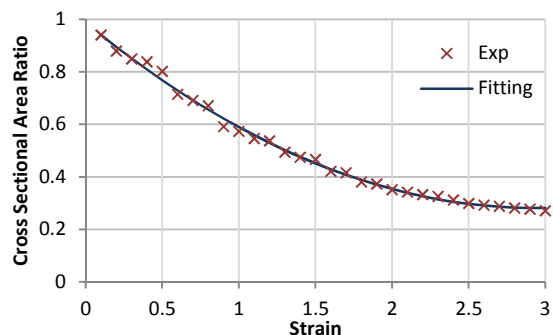
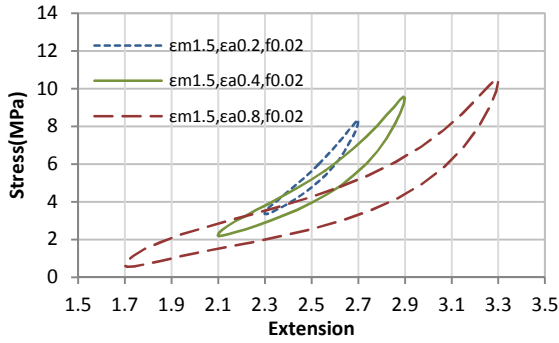
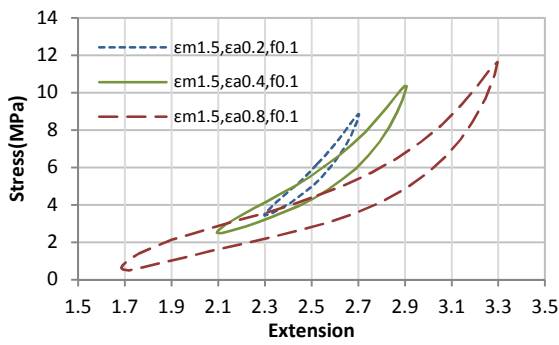


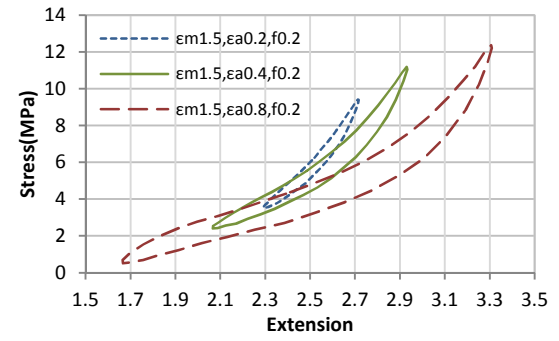
Fig. 5 Change of cross sectional area ratio about strain



(a)



(b)



(c)

Fig. 6 Hysteresis curve with various amplitude at (a) $f=0.02$ Hz (b) $f=0.1$ Hz (c) $f=0.2$ Hz

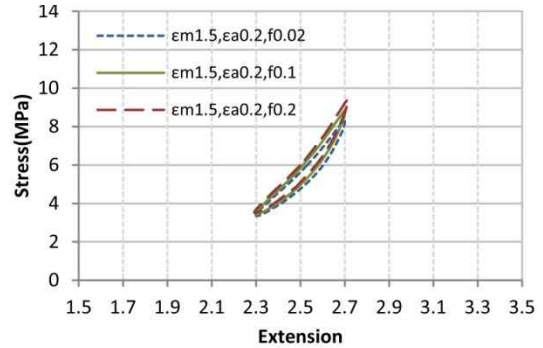
실험 결과를 2차 다항식(Polynomial)으로 커브 피팅하여 다음 식 (19)로 나타내었다.

$$R_{Area\ Ratio} = 0.08153 \varepsilon^2 - 0.4807\varepsilon + 0.989 \quad (19)$$

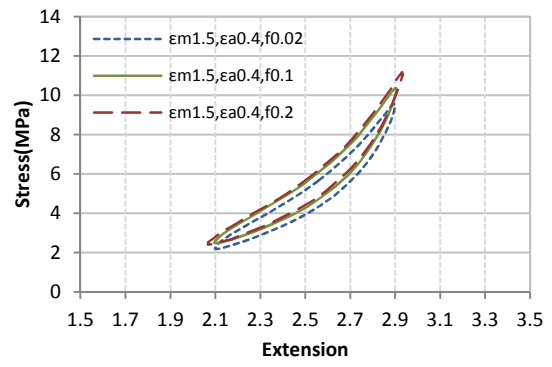
이후 식 (19)를 사용하여 계산한 코시 응력을 기준으로 연구를 진행하였다.

3.2 Result about various amplitude

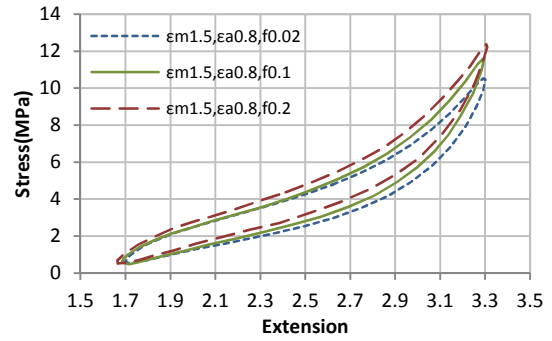
Fig. 6에 하중의 진폭변화에 대한 정상 상태의 히스테리시스 곡선을 주파수에 따라 분류하였다. 각 그래프를 살펴보면 공통적으로 미소 변형의 히스테리시스 곡선이 대 변형의 히스테리시스 곡선보다 강성이 높다. 이러한 패턴은 주파수에 상관없



(a)



(b)



(c)

Fig. 7 Hysteresis curve about various frequency at (a) $\varepsilon_a=0.2$ (b) $\varepsilon_a=0.4$ (c) $\varepsilon_a=0.8$

이 공통적으로 관찰되는 현상으로 이를 Payne 효과라 한다.⁽¹⁷⁾ Payne 효과는 점탄성 재료가 반복 하중을 받을 때, 진폭이 증가 할 수록 저장 탄성률 (Storage modulus), 즉 전반적인 강성이 감소하는 현상으로 일반적으로 0.1% 이상의 변형률 영역에서 나타난다.

또한 변형의 진폭이 클수록 비선형성이 증가하는 것을 확인할 수 있다. 진폭의 변형률 0.2 보다 0.8의 히스테리시스 곡선의 형상이 더 휘어진 것으로 이를 확인할 수 있다.

3.3 Result about various frequency

Fig. 7은 주파수 변화에 대한 정상 상태의 히스

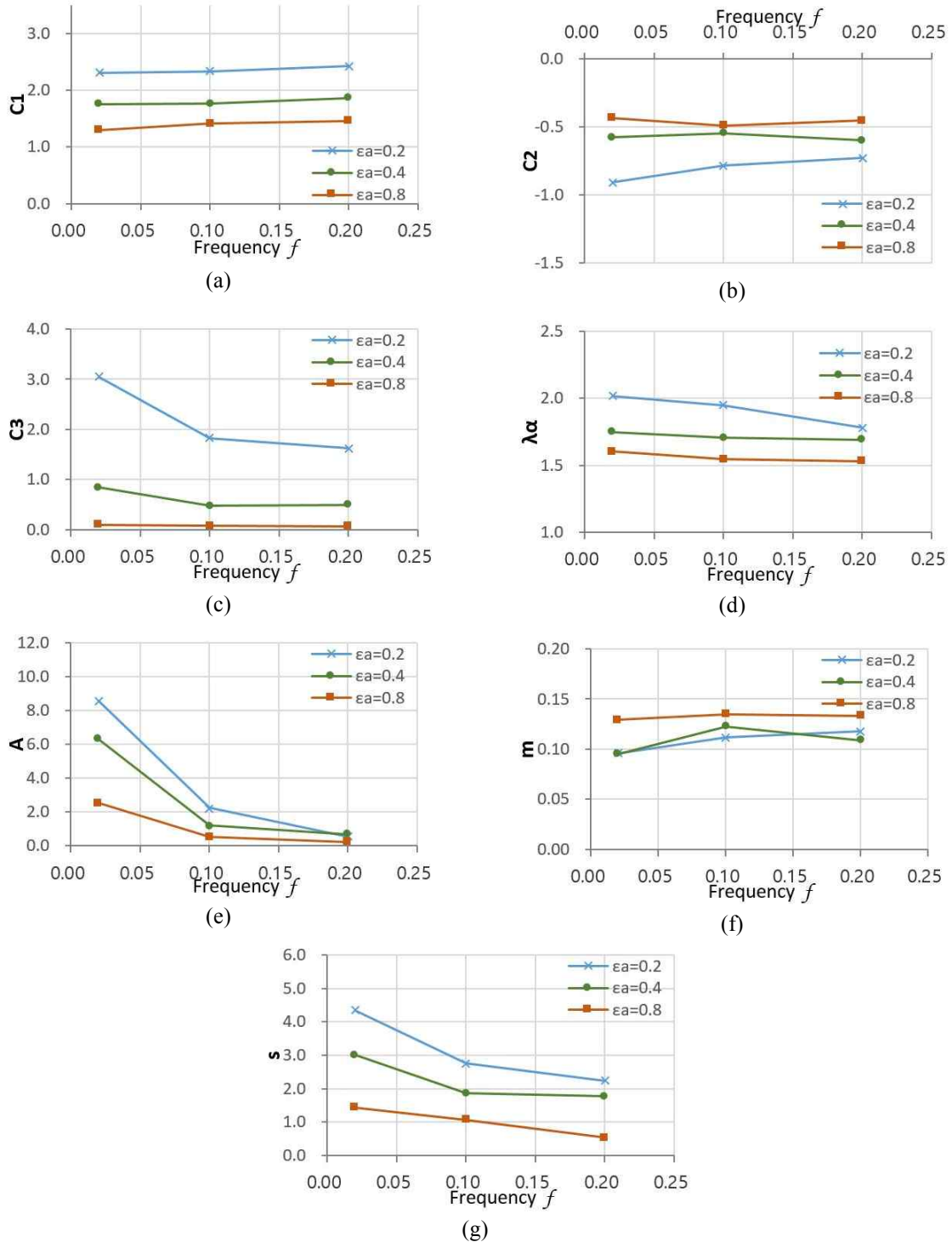


Fig. 8 Variation of coefficients about frequency and amplitude (a) C_1 (b) C_2 (c) C_3 (d) λ_α , (e) A , (f) m , (g) s

테리시스 곡선을 진폭에 따라 분류한 그래프다. 주파수가 증가할수록 재료의 강성이 증가하고 에너지 소산 또한 증가하는 것을 확인할 수 있다. 각 진폭마다 값은 다르지만 이러한 패턴은 동일하게 관찰된다. 이러한 현상은 재료의 분자구조가 하중에 적절히 반응할 수 있는 충분한 시간을 갖

지 못하여 나타나는 것으로 주파수가 증가 할수록 재료의 강성이 증가하고 에너지 소산이 증가한다. 하지만 본 논문의 주파수 조건이 0.02~0.2 Hz 정도로 주파수 범위가 작기 때문에 이러한 현상이 두드러지게 나타나지는 않지만, 그래프 상으로 주파수에 따라 응력 차이가 조금씩 발생하는 것을 확

인할 수 있다.

4. 결과

본 논문에서는 Matlab을 사용하여 지배 방정식을 모델링 하였다. 주파수 0.02, 0.1, 0.2 Hz에서 진폭 변형률 ϵ_a 0.2, 0.4, 0.8의 각 3가지 케이스에 대하여 방정식의 계수들을 구하고 이를 I_{1m} , ΔI_1 , f 에 대한 함수로 만들어 주파수 0.15 Hz, 변형률 진폭 0.6의 계수들을 예측하여 이를 실험 결과와 비교하여 모델을 검증하였다.

4.1 Material constants of constitutive model

본 연구에서는 주파수 0.02, 0.1, 0.2 Hz에서 3개의 진폭 $\epsilon_a=0.2, 0.4, 0.8$ 케이스에 대하여 계수 C_{10} , λ_α , A , m 를 구하였다. 먼저 식 (11)을 사용하여 각 케이스마다 C_1 , C_2 , C_3 와 λ_α 를 구하여 주스프링의 응력을 계산하였다. 이후 식 (1)을 통해 과응력을 계산하고, 식 (14)와 (15)를 사용하여 과응력으로부터 점성 η 를 계산 후 식 (17)로 A , m , s 를 구하였다. 이렇게 계산한 계수들을 Fig. 8의 그래프에 정리하였다.

Fig. 8을 보면 각 계수들의 경향을 알 수 있다. C_1 , C_2 , C_3 , λ_α 의 경우 Fig. 8의 (a), (b), (c), (d)를 보면 전반적으로 주파수에 대한 변화보다 진폭에 의한 변화가 더 크다. C_1 의 경우 이러한 경향이 좀 더 뚜렷하고 C_3 로 갈수록 주파수의 영향이 증가한다. C_1 , C_2 , C_3 , λ_α 는 초탄성을 결정하는 계수이므로 Fig. 6과 Fig. 7을 비교해보면 알 수 있듯이 히스테리시스 곡선의 변화가 진폭과 주파수에 따라 변하는 것을 확인할 수 있다. 물론 본 논문의 주파수 조건이 낮고 범위가 작아 주파수에 대한 경향을 뚜렷하게 파악할 수 없지만 일반적으로 점탄성 재료는 주파수가 증가할수록 강성이 증가하는 경향이 있다. 이러한 경향은 앞서 언급했듯이 주파수가 증가할수록 분자 구조가 반응에 충분한 시간을 얻지 확보하지 못하는 것 기인한다.

A 와 s 의 경우 Fig. 8의 (e), (g)를 보면 주파수의 영향이 C_1 , C_2 , C_3 , λ_α 보다 큰 것을 확인할 수 있는데, 이것은 A 와 s 가 점성을 결정하는 계수들이기 때문이다. m 의 경우 전반적인 변화폭이 작지만 주파수의 영향이 거의 없고, 진폭의 영향이 좀 더 지배적이다.

위에서 구한계수 값을 사용하여 계산한 지배방정식의 점성 곡선과 히스테리시스 곡선을 Fig. 9와 Fig. 10에 정리하여 실험 결과와 비교하였다.

Fig. 9는 이완상태의 점성 η 변화를 대표로 그렸

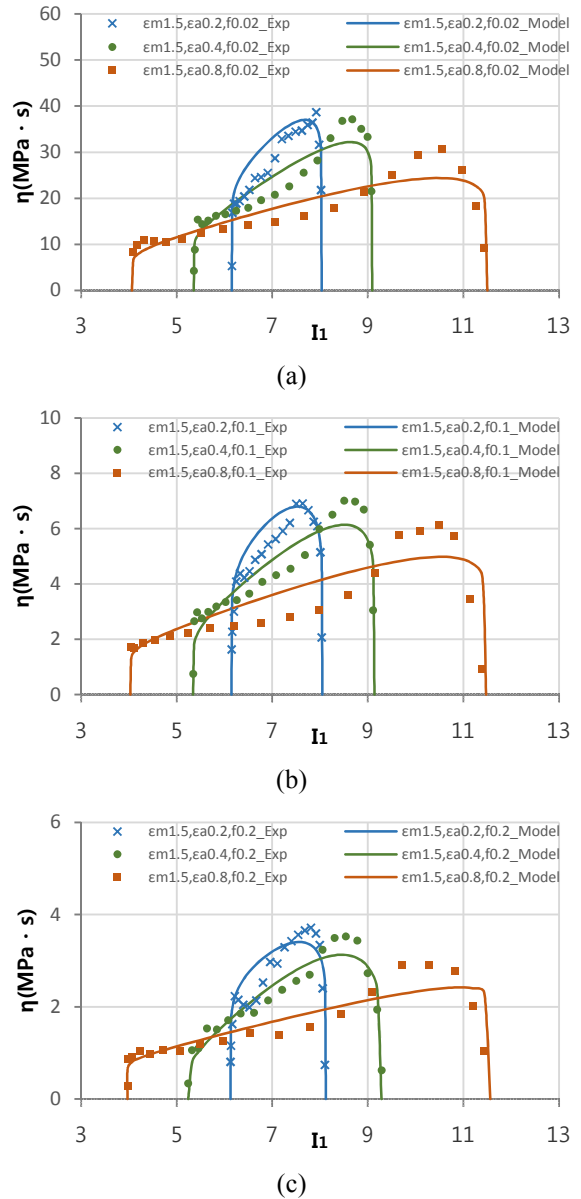


Fig. 9 Variation of η with I_1 about various amplitude (a) $f=0.02$ Hz (b) $f=0.1$ Hz (c) $f=0.2$ Hz

으며, 하중상태는 그래프의 좌우가 바뀐 경향의 그래프가 그려진다. Fig. 9의 점성 η 변화의 비선형성은 변형이 클수록 증가한다. 기존의 Hoofatt의 점성 식은 대변형 상태에서 점성 곡선이 한쪽으로 쏠리는 경향을 반영하지 못하여, 본 논문에서는 기존의 Hoofatt의 점성식에 새로운 계수 s 를 추가한 식 (17)로 이러한 경향을 반영하였다. 다음 Fig. 11에서 보듯이 미소 변형에서 η 의 변화는 좌우 대칭되는 완만한 반원형상을 띠지만, 대변형의 경우 한쪽으로 기울어지는 반원형의 η 곡선이 되므로 이를 표현하기 위해 기존 η 식에 (I_1 -s)를 곱하여 대변형에서 η 곡선의 변화를 표현하였다.

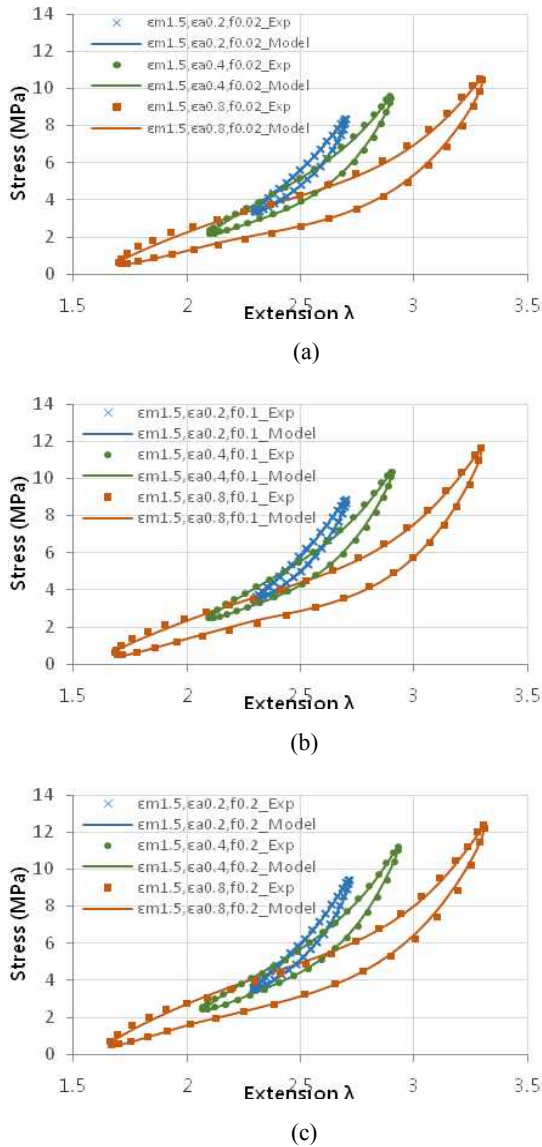


Fig. 10 Hysteresis curve and test data about various amplitude (a) $f=0.02$ Hz (b) $f=0.1$ Hz (c) $f=0.2$ Hz

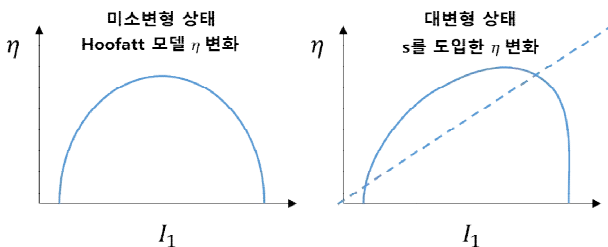


Fig. 11 Comparing small deformation and large deformation about η

하지만 실질적으로 비선형성을 완벽하게 반영하지는 못하였다. 비선형성을 완벽하게 반영하기 위해서는 식이 복잡해져, 계수의 개수가 증가하여

Table 2 Analytical prediction of material constants about frequency and amplitude

C_1	C_2	C_3	λ_α
1.558	-0.447	0.122	1.580
A	m	s	
1.342	0.121	1.553	

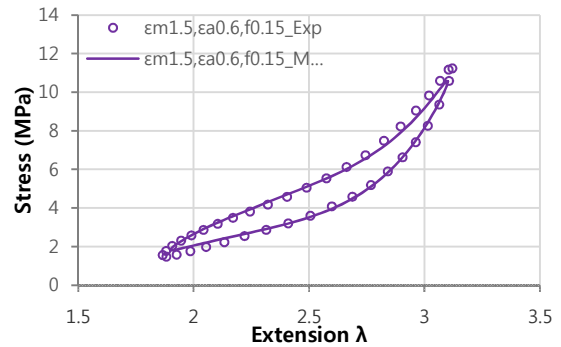


Fig. 12 Hysteresis curve of analytical prediction and test data at $f=0.15$ Hz, $\epsilon_a=0.6$

주기나 진폭의 변화에 따른 계수의 경향을 확인하는 것이 불가능해진다. 이렇게 비선형성을 완벽하게 반영하지 못하는 것은 실험과 이론간 오차의 원인 중 하나이다.

4.2 Analytical prediction of test data

앞서 구한 계수 $C_1, C_2, C_3, \lambda_\alpha, A, m, s$ 의 경향을 비선형 회귀 분석으로 주파수 0.15Hz, 진폭 0.6에서의 계수들을 계산하여 Table 2에 정리하였다.

위의 계수들을 사용하여 계산한 주파수 0.15 Hz, 진폭 0.6의 지배 방정식과 실험 데이터의 히스테리시스 곡선을 Fig. 12에 나타내었다.

Fig. 12를 보면 지배 방정식과 실험결과가 전반적으로 잘 맞는 것을 확인할 수 있다. 하지만 그 그래프의 양 끝 쪽으로 갈수록 이론과 실험간의 차이가 점점 증가하는데, 이것은 반복 하중 실험의 특성상 실험 장비가 지정한 변위 보다 초과하여 변형이 발생하는 Oversuit 현상으로 인한 오차이다.

또한 앞서 말했듯이 점성의 비선형성을 본 모델이 완벽하게 반영하지 못하여 생기는 오차도 이러한 이론과 실험의 차이를 증가시키는 원인 중 하나이다.

후 기

본 논문은 Yeoh 모델을 사용하여 점탄성 모델을 유도 하였고, 이를 실험과 비교하였다. 본 논문에서 사용한 폴리우레탄의 경우 상당히 유연하기 때문에 이러한 대 변형의 측정이 가능하지만 다른 재료의 경우 유연성이 다르기 때문에 이에 대한

추가적인 연구가 필요할 것으로 예상된다. 보다 정확한 점성 모델을 개발한다면 본 모델의 오차를 좀더 줄일 수 있다. 하지만 식이 복잡해 질수록 계수의 갯수가 증가하여 모델을 정형화 하는데 어려움이 증가하므로 최소한의 계수로 비선형성을 반영하는 점탄성 모델을 만드는 것이 중요하다. 평균 변형의 영향과 압축 하중 상태의 점탄성 모델에 관한 연구를 이어갈 것이다.

참고문헌

(References)

- (1) Buckley, Mc C. and Bucknell, 2003, *Principles of Polymer Engineering*, pp. 117~176.
- (2) Wiechert, E., 1889, *Ueber Elastische Nachwirkung*, Dissertation, Königsberg University, Germany.
- (3) Wiechert, E., 1893, *Gesetze der elastischen Nachwirkung für constante Temperatur*, Annalen der Physik, pp. 286, 335~348, 546~570.
- (4) Soussou, J. E., Moavenzadeh, F. and Gradowczyk, M. H., 1970, "Application of Prony Series to Linear Viscoelasticity," *Trans. Soc. Rheol.* Vol. 14, pp. 573~584.
- (5) Haupt, P. and Lion, A., 2002, "On Finite Linear Viscoelasticity of Incompressible Isotropic Materials," *Acta Mech.* Vol. 159, pp. 87~124.
- (6) Bergstrom, J. S. and Boyce, M. C., 1998, "Constitutive Modeling of the Large Strain Time-dependent Behavior of Elastomers," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 46, pp. 931~954.
- (7) Bergstrom, J. S. and Boyce, M. C., 2001, "Constitutive Modeling of the Time-dependent and Cyclic Loading of Elastomers and Application to Soft Biological Tissues," *Mech. Mater.*, Vol. 33, pp. 523~530.
- (8) Lion, A., 1996, "A Constitutive Model for Carbon Black Filled Rubber: Experimental Investigations and Mathematical Representation," *Continuum Mech. Thermo-dyna*, Vol. 8 pp. 153~169.
- (9) Lion, A., 1997, "A Physically Based Method to Represent the Thermo-mechanical Behavior of Elastomers," *Acta Mech.* Vol. 123, pp. 1~25.
- (10) Tomita, Y., Lu, W., Naito, M. and Furutani, Y., 2006, "Numerical Evaluation of Micro - to Macroscopic Mechanical Behavior of Carbon-black-filled Rubber," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, pp. 108~116.
- (11) Tomita, Y., Azuma, K. and Naito, M., 2008, "Computational Evaluation of Strain-rate-dependent Deformation Behavior of Rubber and Carbon-black-filled Rubber Under Monotonic and Cyclic Straining," *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 50 pp. 856~868.
- (12) Liu, M. and HooFatt, Michelle S., 2011, "A Constitutive Equation for Filled Under Cyclic Loading," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, pp. 446~456.
- (13) Liu, F., Sutcliffe, M.P.F. and Graham, W.R., 2010, "Prediction of Tread Block Forces for a Free-rolling Tyre in Contact with a Smooth Road," *Wear*, Vol. 269, pp. 672~683.
- (14) Lee, E.H. and Liu, D.H., 1967, "Finite-strain Elastic-plastic Theory with Application to Plane-wave Analysis," *J. Appl. Phys.*, Vol. 38 pp. 19~27.
- (15) Huber, N., Tsakmakis, C., 2000, "Finite Deformation Viscoelasticity Laws," *Mech. Mater.*, Vol. 32 pp. 1~18.
- (16) Robertson, C. G. and Wang, X., 2006, "Spectral Hole Burning to Probe the Nature of Unjamming (Payne effect) in Particulate-filled Elastomers," *Europhys. Lett*, Vol. 76, pp. 278~284.
- (17) Payne, A.R., 1967, "Dynamic properties of PBNA-natural Rubber Vulcanizates," *J. Appl. Polym. Sci.* Vol. 11, pp. 383~387.