經營科學
第33卷 第1號
2016年 3月, pp.77-87
http://dx.doi.org/10.7737/KMSR.2016.33.1.077

일반적 효용함수 하에서 대출제약의 정도와 최적 소비 및 투자

심 규 철[†]
아주대학교 경영대학 금융공학과

Degree of Borrowing Constraints and Optimal Consumption and Investment under a General Utility Function

Gyoocheol Shim[†]
Department of Financial Engineering, School of Business, Ajou University

■ Abstract ■

I study optimal consumption and investment choices of an infinitely-lived economic agent with a general time-separable von Neumann-Morgenstern utility under general borrowing constraints against future labor income. An explicit solution is provided by the dynamic programming method. It is shown that the optimal consumption and risky investment decrease as the borrowing constraints become stronger.

Keywords : Degree of Borrowing Constraints, Consumption, Investment, Labor Income

1. 서 론

현실적으로, 정보비대칭 또는 도덕적 해이가 존재하므로, 경제주체는 미래의 임금을 담보로 투자나 소비를 하기 위해 미래 임금 전액을 자본화할 수 없다. 본 연구는 미래의 임금에 대한 일반적 대출제약(borrowing constraints)하에서 일반적 효용함수를 가진 경제주체의 최적 소비와 투자의 문제

논문접수일 : 2015년 11월 19일 논문게재확정일 : 2015년 12월 18일
논문수정일 : 2015년 12월 14일
† 교신저자, gshim@ajou.ac.kr

를 다룬다. 최적화 문제에 대한 해를 동적 계획 방법(dynamic programming method)을 사용하여 폐쇄형 공식으로 구한다. 최적 해를 분석함으로써 대출제약의 정도가 심할수록 최적 소비와 위험자산 투자가 줄어든다는 것을 해석적(analytic)으로 보여준다. 대출제약의 정도는 경제주체 재산 수준의 하한선으로 측정된다. 즉 하한선이 클수록(절대치가 작을수록) 대출제약의 강도가 크다는 것을 의미한다.

최적 소비와 투자에 관한 연구는 [9, 10] 이후로 여러가지 현실적 요인들을 감안하여 많이 이루어져 왔다. [9, 10]에서는 HARA(Hyperbolic Absolute Risk Aversion) 형태의 효용함수 하에서 최적 소비 및 투자에 관한 해를 폐쇄형 공식으로 구하였다. 이후 [6]에서는 본 논문에와 같이 일반적 시간 분해형 폰 노이만 모르겐스턴 효용(time-separable von Neumann-Morgenstern utility)을 목적함수(objective function)로 두고 최적 소비 및 투자에 관한 해를 구하였다. 그러나 [6, 9, 10]에서 경제주체의 노동임금은 배제되었고 따라서 미래 임금에 대한 대출제약의 효과를 살펴보지는 않았다. [4, 5, 7]에서는 대출제약 조건 하에서 최적 은퇴시점과 소비 및 투자에 관해서 연구하였다. 그러나 [4]과 [5]에서는 각각 CES(Constant Elasticity of Substitution)와 CRRA(constant relative risk aversion) 형태의 효용함수만 다루었고 대출제약을 재산이 영(0) 이상인 경우로만 한정하여 대출제약의 정도에 따른 최적 소비와 투자의 정태적 분석(static analysis)은 이루어지지 않았다. [7]에서는 일반적 시간 분해형 폰 노이만 모르겐스턴 효용을 고려하였지만 이 또한 대출제약을 재산이 영 이상인 경우로만 한정하여 대출제약의 정도에 따른 최적 소비와 투자에 관한 정태적 분석은 이루어지지 않았다. [11]에서는 일반적 대출제약 하에서 최적 은퇴시점과 소비 및 투자에 관해서 연구하였다. 그러나, [11]에서는 효용함수를 CRRA 형태로 한정하였고, 또한 대출제약의 정도에 따른 정태적 분석을 해석적으로 하지 않았고 수치적으로만 보였다. [2]에서는 경기주기의 확률적 변화에 따라 위험자산의 기대수익률과 경제주체의 임금이 확률적으로 변하는 경우의 최적 소비와 투자에 관해 베이지안 학습(Bayesian learning) 기법을 고려하여 연구하였다. 그러나, [2]에서 CRRA 형태의 효용함수만 다루어졌고 대출제약의 정도에 따른 최적 소비와 투자의 정태적 분석도 이루어지지 않았다. [3]에서는 마코위츠 포트폴리오 선정 모형([8])을 기반으로 투자 알고리즘을 개발하고 미국 및 홍콩 주식시장 데이터를 이용해 실증적으로 성과평가를 하였다. 그러나 [3]은 연속시간에서의 최적 소비 선택을 포함하는 문제가 아니며, 1기간 모형을 사용하여 최저 기대수익률 제약 하에서 위험을 최소화시키는 문제에 해당한다. 본 연구는 일반적 대출제약 조건 하에서 일반적 효용함수를 가진 경제주체의 최적 소비 및 투자에 관한 폐쇄형 공식을 구하고 대출제약의 정도가 최적 소비와 투자에 미치는 영향을 해석적으로 제시한다는 점에서 의의를 찾을 수 있다. [1]에서처럼 한국 주식의 기대수익률에 관하여 극단(extreme) 분포가 적용가능하다는 연구도 있지만, 본 연구에서는 일반적인 최적 소비와 투자 문제에서 자주 가정하듯이 위험자산의 가격이 기하 브라운 운동(geometric Browinan motion)을 따른다고 한다.

남은 절들의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 모형을 설정하고, 제 3장에서는 최적화 문제에 대한 해를 제공하며, 제 4장에서는 대출제약의 정도가 최적 소비 및 투자에 미치는 영향을 분석한다. 제 5장에서 결론을 맺는다.

2. 모형

금융시장에 두 가지 종류의 자산이 있다고 가정한다. 그 중 하나는 무위험자산이고 다른 하나는 위험자산이다. 무위험이자율은 상수 $r > 0$이며 따라서 무위험자산의 시점 t에서의 가격 $p_0(t)$는 다음과 같은 확정적(deterministic) 과정을 따른다.

$$dp_0(t) = rp_0(t)dt,\ t \geq 0,\ p_0(0) = p_0.$$

위험자산의 시각 t에서의 가격 $p(t)$는 [6, 9, 10] 등에서와 같이 기하브라운 운동(geometric Brownian motion)을 따른다.

$$dp(t) = p(t)[\mu dt + \sigma dw(t)],\ t \geq 0,\ p(0) = p$$

여기서 $(w(t))_{t=0}^{\infty}$는 확률공간 $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$에서 정의된 브라운 운동(Brownian motion)이고 순간수익률 $\mu > r$와 변동성 $\sigma > 0$는 상수이다. 브라운 운동에 상응하는 필터레이션(filtration)을 $(\mathrm{F}_t)_{t=0}^{\infty}$로 나타낸다.

경제주체는 시간당 상수 $\epsilon > 0$의 노동임금을 받는다. 시점 t에서 경제주체의 위험자산 포지션(투자액)을 π_t라 하고 순간소비율(consumption rate, 이하 소비)을 $C_t \geq 0$라 하자. $C_t \geq 0$와 π_t는 시점 t까지의 정보 F_t 만을 사용하여 결정되며(adapted to F_t), 다음 조건을 만족한다.

$$\int_0^t c_s ds < \infty,\ \int_0^t \pi_s^2 ds < \infty,\ t \geq 0.$$

순간소비율 과정을 $\mathrm{c} := (C_t)_{t=0}^{\infty}$로, 위험자산 포지션 과정을 $\pi := (\pi_t)_{t=0}^{\infty}$로 나타낸다. 따라서 경제주체의 재산과정(wealth process) $(X_t)_{t=0}^{\infty}$는 다음과 같은 확률과정을 따른다.

$$dx_t = (\mu - r)\pi_t dt + (rx_t - c_t + \epsilon)dt + \pi_t \sigma dw(t), \quad (1)$$
$$0 \leq t < \infty,\ x_0 = x$$

경제주체의 미래 노동임금의 현재가는 $\epsilon / r = \int_0^{\infty} e^{rt} \epsilon dt$이므로 미래 임금에 대한 대출제약이 없다면 경제주체의 재산이 $-\epsilon / r$까지 허용될 것이다. 그러나 본 논문에서는 좀 더 현실적인 모델로서 경제주체가 미래의 노동임금을 모두 빌릴 수 없는 경우를 고려한다. 즉, 경제주체는 다음과 같은 대출제약을 받는다.

$$x_t \geq \xi,\ t \geq 0. \quad (2)$$

여기서 ξ는 상수이며 다음 조건을 만족한다.

$$-\epsilon / r < \xi \leq 0. \quad (3)$$

$-\epsilon / r < \xi \leq 0$인 경우는 미래 노동임금의 일부만 대출 가능한 경우이고, $\xi = 0$인 경우는 미래 노동임금을 전혀 대출받을 수 없는 경우에 해당한다. 상수 ξ 값이 크게 주어질수록(절대값이 작을수록) 대출제약이 크다는 점에서 ξ는 대출제약의 정도에 대한 측도라 할 수 있다.

초기재산 $x_0 = x \geq \xi$를 가진 경제주체는 시간분해형 폰 노이만 모르겐스턴 효용(time-separable von Neumann-Morgenstern utility)인 목적함수 (4)를 최대화시키기 위해 조건 (2)와 조건 (5)를 만족시키는 (c, π)를 선택한다. 초기재산 $x_0 = x \geq \xi$를 가지고 조건 (2)와 조건 (5)를 만족시키는 (c, π)를 x에서의 허용전략(admissible policy)이라 한다. x에서의 모든 허용전략들의 집합을 $A(x)$로 나타내기로 한다.

$$V_{(c,\pi)}(x) := \mathrm{E}\left[\int_0^{\infty} e^{\beta t} U(c_t) dt\right] \quad (4)$$

$$\mathrm{E}\left[\int_0^{\infty} e^{\beta t} U(c_t) dt\right] < \infty, \quad (5)$$

식 (4)와 식 (5)에서 U는 효용함수이고 $\beta > 0$는 주관적 할인율(subjective discount rate)이다. 가치함수(value function) $\overline{V}(x)$는 아래와 같이 정의된다.

$$\overline{V}(x) := \sup\ \{V_{(c,\pi)}(x) : (c,\ \pi) \in A(x)\},\ x \geq \xi.$$

효용함수 U에 대해 가정 2.1에서와 같은 합당한 가정을 한다.

가정 2.1 *U는 정의역 $(0, \infty)$에서 강한 증가(strictly increasing)이고, 강한 오목(strictly concave)이며, 세 번 연속 미분 가능(three times continuously differentiable)한 함수이다. 그리고 $\lim_{C \to \infty} U'(c) = 0$를 만족한다.*

함수 $I(\cdot)$를 한계효용함수 $U'(\cdot)$의 역함수라 하자.

상수 $\kappa>0$를 다음과 같이 정의한다.

$$\kappa := \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2.$$

그러면 λ에 관한 2차 방 정식 $\kappa\lambda^2-(r-\beta-\kappa)\lambda-r=0$는 두 개의 서로 다른 실근 $\lambda_- < -1$과 $\lambda_+ < -1$를 가지게 된다. 경제주체 최적화 문제에서 해의 존재성을 보장하기 위해 [6]에서와 같이 가정 2.2를 가정한다

가정 2.2

$$\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} < \infty. \quad \forall c>0$$

효용함수가 $U(c)=\frac{c^{1-\lambda}}{1-\lambda}$, $0<\lambda\neq 1$로 주어지면 [6]에서 언급되었듯이 가정 2.2는 $-\gamma\lambda>1$와 같고 이는 또한 식 (6)과 같다.

$$K := r+\frac{\beta-r}{\gamma}+\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\kappa>0. \tag{6}$$

효용함수가 $U(c)=\log c$ 또는 $U(c)=-\exp(-\delta c)$, $\delta>0$로 주어진 경우는 가정 2.2가 자동적으로 성립한다.

3. 최적 소비/투자 전략

이 절에서는 전 절에서 정의된 경제주체 최적화 문제의 해, 즉 최적 소비/투자 전략을 구한다.

$x>\xi$에 대해 벨만 방정식(Bellman equation)은 식 (7)과 같다.

$$\beta V(x) = \max_{c\geq 0,\pi}\Big\{(\mu-r)\pi V'(x)+(rx-c+\epsilon)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2 V''(x)+U(c)\Big\} \tag{7}$$

다음과 같은 세 가지 경우로 분류하여 최적해를 구한다 :

- (경우 Ⅰ) $U'(0) := \lim_{c\downarrow 0} U'(c)=\infty$,
- (경우 Ⅱ) $U'(0) := \infty$이고
$$r\xi+\epsilon \geq (U'(0))^{\lambda_-}\int_0^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}, \tag{8}$$
- (경우 Ⅲ) $U'(0)<\infty$이고
$$r\xi+\epsilon < (U'(0))^{\lambda_-}\int_0^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}. \tag{9}$$

경우 Ⅱ, Ⅲ에서와 같이 $U'(0)$가 유한한 경우 $U(0)$도 유한하다.

3.1 경우 Ⅰ과 Ⅱ

이 부속절에서는 경우 Ⅰ과 Ⅱ에서의 최적해를 구한다. 함수 $f(c)$를 $(0, \infty)$ 위에서 식 (10)와 같이 정의한다.

$$f(c)=c+(U'(c))^{\lambda_-}\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}-(r\xi+\epsilon) \tag{10}$$

경우 Ⅰ에서 식 (10) 오른쪽 두 번째 항은 $c\downarrow 0$함에 따라 0으로 수렴한다([3]에서 보여짐). 따라서 식 (11)가 성립한다.

$$\lim_{c\downarrow 0} f(c) = -(r\xi+\epsilon)<0,\ \lim_{c\downarrow 0} f(c)=\infty. \tag{11}$$

경우 Ⅱ에서는 식 (8)에 의해 식 (12)이 성립한다.

$$\lim_{c\downarrow 0} f(c) = (U'(0))^{\lambda_-}\int_0^\infty \frac{f\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}-(r\xi+\epsilon)\leq 0, \tag{12}$$
$$\lim_{c\uparrow\infty} f(c)=\infty$$

또한 $f(c)$의 도함수 $f'(c)$는 식 (13)을 만족한다.

$$f'(c)=\lambda_-(U'(c))^{\lambda_- -1}U''(c)\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}>0 \tag{13}$$

식 (13)의 부등식은 가정 2.1과 $\lambda_- < 0$이라는 사실에 의해 성립한다. 경우 Ⅰ에서 식 (11)와 식 (13)에 의해 $f(c) = 0$를 만족하는 유일해(unique solution)가 $(0, \infty)$에 존재한다. 경우 Ⅱ에서는 식 (12)과 식 (13)에 의해 $f(c) = 0$를 만족하는 유일해가 $[0, \infty)$에 존재한다. 두 경우의 유일해를 동일 기호 a로 나타낸다. 즉,

$$f(a) = 0 \tag{14}$$

경우 Ⅰ에서 $a > 0$이므로 두 경우 모두에서 $U'(a) < \infty$이다. 상수 B를 식 (15)와 같이 정의한다.

$$B = (U'(a))^{-\lambda_+}\left(\xi - \frac{a}{r} + \frac{1}{\kappa(\lambda_+ - \lambda_-)}\frac{(U'(a))^{\lambda_-}}{\lambda_-} \times \int_a^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} + \frac{\epsilon}{r}\right) \tag{15}$$

주의 3.1 *식 (14)과 관계식* $\lambda_+\lambda_- = -r/\kappa$*를 이용해서 식 (15)의* B*를 식 (16)과 같이 표현할 수 있다.*

$$B = \frac{1}{\kappa\lambda_+(\lambda_+ - \lambda_-)}(U'(a))^{-(\lambda_+ - \lambda_-)} \times \int_a^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} > 0 \tag{16}$$

함수 $X(c)$를 $[a, \infty)$ 위에서 다음과 같이 정의한다.

$$X(c) = B(U'(c))^{\lambda_+} + \frac{c}{r} - \frac{1}{\kappa(\lambda_+ - \lambda_-)}\left\{\frac{(U'(c))^{\lambda_+}}{\lambda_+}\int_a^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + \frac{(U'(c))^{\lambda_-}}{\lambda_-}\int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\} - \frac{\epsilon}{r} \tag{17}$$

식 (15)에 의해

$$x(a) = \xi \tag{18}$$

이다. 관계식 $\lambda_+\lambda_- = -r/\kappa$를 이용해 식 (19)을 얻을 수 있다.

$$X'(c) = \lambda_+ B(U'(c))^{\lambda_+ - 1}U''(c) - \frac{U''(c)}{\kappa(\lambda_+ - \lambda_-)}\left\{(U'(c))^{\lambda_+ - 1}\int_a^C \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + (U'(c))^{\lambda_- - 1}\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\} \tag{19}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\frac{(U'(c))^{1-\lambda_+}X'(c)}{U''(c)} &= \lambda_+ B - \frac{1}{\kappa(\lambda_+ - \lambda_-)}\left\{\int_a^C \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + (U'(c))^{-(\lambda_+ - \lambda_-)}\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\} \\ &= \frac{1}{\kappa(\lambda_+ - \lambda_-)}(U'(a))^{-(\lambda_+ - \lambda_-)}\int_a^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \\ &\quad - \frac{1}{\kappa(\lambda_+ - \lambda_-)}\left\{\int_a^C \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + (U'(c))^{(\lambda_+ - \lambda_-)}\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\}\end{aligned}$$

여기서 두 번째 등식은 식 (16)으로부터 나온다. 가정 2.1에 의해 $U''(c) < 0$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dc}\left\{\int_a^C \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}}(U'(c))^{-\lambda_+ - \lambda_-}\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\} \\ &= -(\lambda_+ - \lambda_-)(U'(c))^{-(\lambda_+ - \lambda_-) - 1}U''(c)\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \\ &> 0\end{aligned}$$

이고 따라서 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^C \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + (U'(c))^{-(\lambda_+ - \lambda_1)}\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} > (U'(a))^{-(\lambda_+ - \lambda_-)}\int_a^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}, \quad c > a$$

그러므로, $(U'(c))^{1-\lambda_+}X'(c)/U''(c)<0,\ c>a$가 성립하여 식 (20)가 성립함을 알 수 있다.

$$X'(c)>0,\ c>a \tag{20}$$

주의 3.2 *식 (16)을 이용하여 식 (21)가 성립함을 보일 수 있다.*

$$X'(a)=0 \tag{21}$$

식 (20)에 의해 함수 $X(\cdot)$ 강한 증가함수이며 $[a,\infty)$에서 $[\xi,\infty)$로의 일대일 대응이므로 역함수 $C(\cdot)$가 존재하고 이 또한 강한 증가함수이며 $[\xi,\infty)$에서 $[a,\infty)$로의 일대일 대응이다.

주의 3.3 *식 (18)와 식 (14)에 의해* $r\xi-C(\xi)+\epsilon=r\xi-a+\epsilon>0$이다.

또 다른 함수 $J(c)$를 $[a,\infty)$에서 식 (22)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} J(c) &= \frac{\lambda_+}{\rho_+}B(U'(c))^{\rho}+\frac{U(c)}{\beta} \\ &-\frac{1}{\kappa(\rho_+-\rho_-)}\left\{\frac{(U'(c))^{\rho_+}}{\rho_+}\int_a^C\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}}\right. \\ &\left.+\frac{(U'(c))^{\rho_-}}{\rho_-}\int_C^\infty\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\} \end{aligned} \tag{22}$$

여기서 $\rho_+:=1+\lambda_+>1$이다.

정리 3.1을 통해 경우 Ⅰ과 Ⅱ에서의 최적 해를 제공한다.

정리 3.1 *경우 Ⅰ과 Ⅱ에서, 가치함수* $\overline{V}(x)$*는* $\overline{V}(x)=J(C(x)),\ x\geq\xi$*로 주어지고 최적해* $(\bar{c},\bar{\pi})$*는 아래와 같이 주어진다.*

$$\begin{aligned} \bar{c}_t=C(x_t),\ \bar{\pi}_t &= -\frac{\overline{V}'(x_t)}{\overline{V}''(x_t)}\frac{\mu-r}{\sigma^2} \\ &= -\frac{U'(C(x_t))}{U''(C(x_t))C'(x_t)}\frac{\mu-r}{\sigma^2},\ t\geq 0 \end{aligned}$$

증명 : $V(x)=J(C(x))$로 두자. 그러면, [6]의 Theorem 9.1에서처럼 $V(x)$는 강한 증가이고 강한 오목인 함수이며 식 (23)과 식 (24)을 만족한다.

$$\begin{aligned} V'(x) &= J'(C(x))C'(x) \\ &= \frac{J'(C(x))}{X'(C(x))}=U'(C(x))>0 \end{aligned} \tag{23}$$

$$V''(x)=U''(C(x))C'(x)<0 \tag{24}$$

그리고 $V(x)=J(C(x))$는 $x>\xi$에 대해 벨만 방정식 (7)을 만족한다. 벨만 방정식 (7)의 오른쪽은 식 (25)를 만족할 때 최대화된다.

$$\begin{aligned} c &= l(V'(x))=C(x), \\ \pi &= -\frac{V'(x)}{V''(x)}\frac{\mu-r}{\sigma^2}=-\frac{U'(C(x))}{U''(C(x))C'(x)}\frac{\mu-r}{\sigma^2} \end{aligned} \tag{25}$$

식 (25)에서 식 (23)과 식 (24)을 이용하였다. 그러므로, 전략 $(\bar{c},\bar{\pi})$가 허용전략이기만 하면 전형적인 동적 계획(dynamic programming) 방법에 의해 정리 3.1이 증명된다. 그런데 식 (18)와 식 (21)에 의해 $1/C'(\xi)=X'(C(\xi)=X'(a)=0$이고 따라서 식 (26)이 성립한다.

$$x_t=\xi \Rightarrow \bar{\pi}_t=0 \tag{26}$$

재산과정 (1), 식 (26), 그리고 주의 3.3에 의해, 전략 $(\bar{c},\bar{\pi})$는 대출제약조건 (2)를 만족시킨다. 경우 Ⅰ에서 $\bar{c}_t\geq C(\xi)=a$가 모든 $t\geq 0$에 대해 성립하고 $a>0$이므로 조건 (5)가 성립한다. 경우 Ⅱ에서는 $U(0)$가 유한하므로 조건 (5)가 성립한다. □

3.2 경우 Ⅲ

이 부속절에서는 경우 Ⅲ에서의 최적해를 구한다. 부속절 3.1에서는 소비 c를 매개변수로 하여 함

수 $X(c)$와 $J(c)$를 정의하였다. 그러나 이 부속절에서는 소비 c를 매개변수로 사용할 수가 없다. 왜냐하면, 식 (14)을 만족하는 영 이상의 a가 존재하지 않기 때문이다. 그래서 이 부속절에서는 소비 c대신 다른 변수 y가 매개변수의 역할을 한다. 결국 y는 한계가치 $\overline{V}'(x)$가 됨이 밝혀진다. 이와 같이 부속절 3.1과 매개변수가 다르지만, 경우만 명시하면 (경우 I 또는 II인지, 경우 III인지) 혼돈의 여지가 없어, 편의상 해를 구하기 위한 함수와 상수(아래의 $\mathrm{X}(y)$, $\mathrm{J}(y)$, B)에 같은 부호를 사용하기로 한다.

U'의 역함수인 $I:(0,\ U'(0)]\to[0,\ \infty)$의 정의역을 $[U'(0),\ \infty)$에서는 $I\equiv 0$로 함으로써 확장한다. 함수 $g(y)$를 $(0,\ \infty)$ 위에서 식 (27)과 같이 정의한다.

$$g(y)=I(y)+y^{\lambda_-}\int_{I(y)}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}-(r\xi+\epsilon) \qquad (27)$$

그러면, $\lim_{y\uparrow\infty}g(y)=-(r\xi+\epsilon)<0$이고 $\lim_{y\downarrow\infty}g(y)=\infty$ 임을 쉽게 알 수 있다. $0<y\neq U'(0)$에 대하여 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$g'(y)=\lambda_-y^{\lambda_--1}\int_{I(y)}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}<0$$

그러므로 식 (28)를 만족하는 유일한 $\overline{y}>0$가 존재한다.

$$g(\overline{y})>0 \qquad (28)$$

식 (9)에 의해 $g(U'(0))>0$가 성립한다. 그러므로 식 (29)이 성립한다.

$$\overline{y}>U'(0),\ \ I(\overline{y})=0 \qquad (29)$$

상수 B를 식 (30)와 같이 정의한다.

$$\mathrm{B}=\overline{y}^{-\lambda_+}\left(\xi+\frac{1}{\kappa(\lambda_+-\lambda_-)}\frac{\overline{y}^{\lambda_-}}{\lambda_-}\int_0^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}+\frac{\epsilon}{r}\right) \qquad (30)$$

주의 3.4 *식 (28)과 관계식 $\lambda_+\lambda_-=-r/\kappa$를 이용하여 식 (30)의 B를 식 (31)과 같이 다시 쓸 수 있다.*

$$\mathrm{B}=\frac{1}{\kappa\lambda_+(\lambda_+-\lambda_-)}\overline{y}^{-(\lambda_+-\lambda_-)}\int_0^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}>0 \qquad (31)$$

함수 $\mathrm{X}(y)$를 $(0,\ \infty)$에서 식 (32)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}X(y)&=\mathrm{B}y^{\lambda_+}+\frac{I(y)}{r} \qquad (32)\\&-\frac{1}{\kappa(\lambda_+-\lambda_-)}\left\{\frac{y^{\lambda_+}}{\lambda_+}\int_0^{I(y)}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}}\right.\\&\left.+\frac{y^{\lambda_-}}{\lambda_-}\int_{I(y)}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\}-\frac{\epsilon}{r}\end{aligned}$$

식 (29)과 식 (30)를 이용하면 식 (33)을 얻을 수 있다.

$$\mathrm{X}(\overline{y})=\xi \qquad (33)$$

$0<y\neq U'(0)$일 때 관계식 $\lambda_+\lambda_-=-r/\kappa$를 이용하여 식 (34)을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathrm{X}'(y)&=\lambda_+\mathrm{B}y^{\lambda_+-1}-\frac{1}{\kappa(\lambda_+-\lambda_-)}\left\{y^{\lambda_+-1}\int_0^{I(y)}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}}\right.\\&\left.+y^{\lambda_--1}\int_{I(y)}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\} \qquad (34)\end{aligned}$$

그러므로 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&y^{1-\lambda_+}\mathrm{X}'(y)\\&=\lambda_+\mathrm{B}-\frac{1}{\kappa(\lambda_+-\lambda_-)}\left\{\int_0^{I(y)}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}}\right.\\&\left.+y^{-(\lambda_+-\lambda_-)}\int_{I(y)}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\}\\&=\frac{1}{\kappa(\lambda_+-\lambda_-)}\overline{y}^{-(\lambda_+-\lambda_-)}\int_0^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\\&-\frac{1}{\kappa(\lambda_+-\lambda_-)}\left\{\int_0^{I(y)}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}}\right.\\&\left.+y^{-(\lambda_+-\lambda_-)}\int_{I(y)}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\}\end{aligned}$$

여기서 두 번째 등식은 식 (31)로부터 나온다. 그런데,

$$\frac{d}{dy}\left\{\int_0^{I(y)}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}}+y^{-(\lambda_+-\lambda_+)}\int_{I(y)}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\}$$
$$=-(\lambda_+-\lambda_-)y^{(\lambda_+-\lambda_+)-1}\int_{I(y)}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}<0$$

이므로, $0<y<\bar{y}$인 경우 다음 식이 성립한다.

$$\int_0^{I(y)}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}}+y^{-(\lambda_+-\lambda_-)}\int_{I(y)}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}$$
$$>\int_0^{I(\bar{y})}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}}+\bar{y}^{-(\lambda_+-\lambda_-)}\int_{I(\bar{y})}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}$$
$$=\bar{y}^{-(\lambda_+-\lambda_-)}\int_0^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}$$

따라서 식 (35)를 얻을 수 있다.

$$\mathrm{X}'(y)<0,\ \ 0<y<\bar{y} \tag{35}$$

주의 3.5 *식 (31)에 의해 식 (36)이 성립함을 보일 수 있다.*

$$\mathrm{X}'(\bar{y})=0 \tag{36}$$

식 (35)에 의해 함수 $\mathrm{X}(\cdot)$는 정의역을 $(0,\bar{y}]$로 제한할 경우 강한 감소함수이다. 즉, $\mathrm{X}(\cdot)$는 $(0,\bar{y}]$에서 $[\xi,\infty)$로의 일대일대응이 되어 역함수 $\mathrm{Y}(\cdot)$가 존재한다. 역함수 $\mathrm{Y}(\cdot)$ 또한 강한 감소함수이며 $[\xi,\infty)$에서 $(0,\bar{y}]$로의 일대일대응이다.

주의 3.6 *식 (3)에 의해* $r\xi-I(\mathrm{Y}(\xi))+\epsilon=r\xi-I(\bar{y})+\epsilon=r\xi+\epsilon>0$이다.

함수 $\mathrm{J}(y)$를 $(0,\bar{y})$ 위에서 아래와 같이 정의한다.

$$\mathrm{J}(y)=\frac{\lambda_+}{\rho_+}\mathrm{B}y^{\rho_+}+\frac{U(I(y))}{\beta}$$
$$-\frac{1}{\kappa(\rho_+-\rho_-)}\left\{\frac{y^{\rho_+}}{\rho_+}\int_0^{I(y)}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}}\right.$$
$$\left.+\frac{y^{\rho_-}}{\rho_-}\int_{I(y)}^{\infty}\frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}\right\}$$

이제 정리 3.2를 통에 경우 Ⅲ에서의 최적 해를 제공한다.

정리 3.2 *경우 Ⅲ에서 가치함수* $\bar{V}(x)$*는* $\bar{V}(x)=\mathrm{J}(\mathrm{Y}(x))$, $x\ge\xi$*로 주어지고 최적해* $(\bar{c},\bar{\pi})$*는 아래와 같이 주어진다.*

$$\bar{c}_t=I(\mathrm{Y}(x_t)),\ \ \pi\bar{\pi}_t=-\frac{\bar{V}(x_t)}{\bar{V}''(x_t)}\frac{\mu-r}{\sigma^2}$$
$$=-\mathrm{Y}(x_t)\mathrm{X}'(\mathrm{Y}(x_t))\frac{\mu-r}{\sigma^2},\ \ t\le 0$$

증명 : $V(x)=\mathrm{J}(\mathrm{Y}(x))$라 두자. 그러면 [6]의 Lemma 13.1에서와 같이, 함수 $V(x)$는 강한 증가이고 강한 오목이며 식 (37)과 식 (38)를 만족한다.

$$V'(x)=\mathrm{J}'(\mathrm{Y}(x))\mathrm{Y}'(x)=\frac{\mathrm{J}'(\mathrm{Y}(x))}{\mathrm{X}'(\mathrm{Y}(x))}=\mathrm{Y}(x)>0 \tag{37}$$
$$V''(x)=\mathrm{Y}'(x)=\frac{1}{\mathrm{X}'(\mathrm{Y}(x))}<0 \tag{38}$$

그리고 함수 $V(x)$는 $x>\xi$에 대해 벨만 방정식 (7)을 만족한다. 벨만 방정식 (7)의 오른쪽은 식 (39)을 만족할 때 최대화된다.

$$c=I(V'(x)=I(\mathrm{Y}(x)),$$
$$\pi=-\frac{V'(x)}{V''(x)}\frac{\mu-r}{\sigma^2}=-\mathrm{Y}(x)\mathrm{X}'(\mathrm{Y}(x))\frac{\mu-r}{\sigma^2} \tag{39}$$

식 (39)에서 식 (37)과 (39)를 이용하였다. 그러므로, 전략 $(\bar{c},\bar{\pi})$가 허용전략이기만 하면 전형적인 동적 계획(dynamic programming) 방법에 의해 정리 3.2가 증명된다. 그런데, 식 (33)과 (36)에 의해 $\mathrm{X}'(\mathrm{Y}(\xi))=\mathrm{X}'(\bar{y})=0$이고 따라서 식 (40)이 성립한다.

$$x_t = \xi \Rightarrow \bar{\pi}_t = 0 \tag{40}$$

재산과정 (1), 식 (40), 그리고 주의 3.6에 의해, 전략 $(\bar{c}, \bar{\pi})$는 대출제약조건 (2)를 만족시킨다. $U(0)$가 유한하므로 조건 (5)가 성립한다. □

주의 3.7 *$\mathrm{X}(y)$가 $y \in (0, \bar{y}]$에 대해 강한 감소함수이므로, 식 (29)에 의해 $\mathrm{X}(U'(0)) > \mathrm{X}(\bar{y}) = \xi$가 성립한다. $y \geq U'(0)$일 때 $I(y) = 0$이므로, 최적 소비는 $U'(0) \leq \mathrm{Y}(x_t) \leq \bar{y}$일 때, 즉 $\xi \leq x_t \leq \mathrm{X}(U'(0))$일 때 $\bar{c}_t = 0$를 만족한다. 즉 최적 소비는 재산이 대출제약 조건에 의해 주어지는 최소 수준인 ξ부근에 있을 때에는 영이 된다.*

4. 대출제약의 정도와 최적 소비/투자

제 2장에서 언급하였듯이, 대출제약 조건 (2)에 의해 주어지는 최소 재산수준인 ξ 값이 클수록(절대치가 작을수록) 대출제약이 강하다는 것을 의미한다. 제의 4.1은 경우 Ⅰ과 Ⅱ에서 대출제약이 강할수록 최적 소비와 투자가 강한 감소를 하게 된다는 것을 해석적(analytic)으로 보여준다. 이는 CRRA 형태의 효용함수를 가지고 최적은퇴와 결부시켜 최적 소비/투자에 관한 연구를 한 [11]에서의 수치적 결과와도 부합한다.

제의 4.1 *주어진 $x_t > -\epsilon/r$에 대하여, 경우 Ⅰ과 Ⅱ에서, 최적 소비 $\bar{c}_t$와 최적 위험자산 투자액 $\bar{\pi}_t$는 $\xi \in (-\epsilon/r, x_t)$에 대한 강한 감소함수이다.*

증명 : $x > -\epsilon/r$를 고정시키자. 식 (10)에 의해 정의된 함수 $f(c)$는 ξ가 증가함에 따라 아래로 이동하고 따라서 식 (14)을 만족하는 a는 강한 증가를 하게 된다. 기호를 단순하게 하기 위해 바(bar) 표시를 생략하고 재산수준 x에 해당하는 최적 소비를 $c = C(x)$로 나타내기로 한다. x가 고정된 상태에서 $c = C(x)$는 a의 함수임에 유의한다. 식 (17)에 의해 정의된 함수 $X(c)$는 a 자신과 c를 통해서 a에 종속된다. 그러므로 $X(c) := X(c, a)$로 쓸 수 있다. 식 (16)과 (17)을 이용하여 식 (41)을 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial X(c, a)}{\partial a} = -\frac{U''(a)}{\kappa\lambda_+}(U'(c))^{\lambda_+}(U'(a))^{-(\lambda_+ - \lambda_-)-1} \times \int_a^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} > 0 \tag{41}$$

모든 $a > 0$에 대하여 $X(c, a) = x$가 성립하므로 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial X(c, a)}{\partial c}\frac{dc}{da} + \frac{\partial X(c, a)}{\partial a} = 0$$

그런데, $\partial X(c, a)/\partial c$는 식 (19)에 주어져 있는 $X'(c)$이고 이는 식 (20)에 의해 양이다. 이 사실과 식 (41)에 의해 $dc/da < 0$이다. 그러므로, 재산수준 x에 해당하는 최적 소비 $C(x)$는 ξ에 관한 강한 감소함수임을 알 수 있다. 관계식 $\lambda_+\lambda_- = -r/\kappa$를 이용하여 아래와 같은 계산을 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
-\frac{U'(C(x))}{U''(C(x))C'(x)} &= -\frac{U'(c)}{U''(c)}X'(c) \\
&= -\lambda_+ X(c) + \frac{\lambda_+}{r}\left((U'(c))^{\lambda_-}\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} + c - \epsilon\right) \\
&= -\lambda_+ X + \frac{\lambda_+}{r}\left((U'(c))^{\lambda_-}\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} + c - \epsilon\right)
\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{da}\left(-\frac{U'(C(x))}{U''(C(x))C'(x)}\right) \\
&= \frac{\lambda_+}{r}\frac{d}{da}\left((U'(c))^{\lambda_-}\int_C^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} + c\right) \\
&= \frac{\lambda_+}{r}\left(\frac{dc}{da}\right)\lambda_-(U'(c))^{\lambda_- - 1}U''(c)\int_C^\infty d\frac{\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} < 0
\end{aligned}$$

가 되어 재산수준 x에 해당하는 최적 위험자산 투자액은 ξ에 관한 강한 감소함수가 된다.

제의 4.2는 경우 Ⅲ에 있어서, ξ가 주어진 재산 수준 근처에 있을 경우에는 최적 소비가 항상 영이고 그렇지 않을 시에는 최적 소비가 ξ에 대해 강한 감소를 한다는 것을 해석적으로 보여준다. 또한 최적 위험자산투자액이 대출제약이 강할수록 강한 감소를 한다는 것도 보여준다.

제의 4.2 *경우 Ⅲ에서 $x_t > -\epsilon/r$가 주어져 있다고 하자. $\mathrm{X}(U'(0)) = x_t$를 만족하는 ξ값을 ξ_0라 하자. 그러면, 최적 소비 $\bar{c}_t$는 $\xi \in (-\epsilon/r, \xi_0]$에서는 ξ에 대해 강한 감소함수이고 $\xi \in (\xi_0, x_t)$에 대해서는 항상 영이다. 위험투자액 $\bar{\pi}_t$는 $\xi \in (-\epsilon/r, x_t)$에 대해 강한 감소함수이다.*

증명 : $x > -\epsilon/r$를 고정시키자. 식 (37)에 의해 정의된 함수 $g(y)$는 ξ가 증가함에 따라 아래로 이동하고 따라서 식 (38)를 만족하는 $\bar{y}$는 강한 감소를 하게 된다. $y = \mathrm{Y}(x)$라 두면 이것은 x가 고정된 상태에서 $\bar{y}$의 함수이다. 식 (32)에 의해 정의된 함수 $\mathrm{X}(y)$는 $\bar{y}$ 자신과 y를 통해서 $\bar{y}$에 종속된다. 그러므로 $\mathrm{x}(y) := \mathrm{X}(y, \bar{y})$로 쓸 수 있다. 식 (31)와 (32)을 이용하여 식 (42)를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \mathrm{X}(y, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = \frac{\mathrm{B}}{\partial \bar{y}} y^{\lambda_+} \qquad (42)$$
$$= -\frac{y^{\lambda_+}}{\kappa \lambda_+} \bar{y}^{-(\lambda_+ - \lambda_-)-1} \int_0^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} < 0$$

모든 $\bar{y} > 0$에 대하여 $\mathrm{X}(y, \bar{y}) = x$가 성립하므로 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial \mathrm{X}(y, \bar{y})}{\partial y} \frac{dy}{d\bar{y}} + \frac{\partial \mathrm{X}(y, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = 0$$

그런데, $\partial \mathrm{X}(y, \bar{y})/\partial y$는 식 (34)에 주어져 있는 $\mathrm{X}'(y)$이고 이는 식 (35)에 의해 $y \in (0, \bar{y})$일 때 음이다. 이 사실과 식 (42)에 의해, $dy/d\bar{y} < 0$이다. 그러므로 $\mathrm{Y}(x)$는 ξ에 대해 강한 증가를 하게 된다. 고정된 재산수준 x에 최적 소비 $I(\mathrm{Y}(x))$는 ξ가 $\mathrm{X}(U'(0)) > x$ $\mathrm{X}(U'(0)) > x$를 만족 할 시에는 항상 영이 되는데(주의 3.7 참조) 이는 위 사실들을 이용하면 $\xi \in (\xi_0, x)$일 때이다. 최적 소비 $I(\mathrm{Y}(x))$는 $\xi \in (-\epsilon/r, \xi_0]$일 경우에는 ξ에 대해 강한 감소를 한다는 것을 위 사실들에 의해 알 수 있다. 관계식 $\lambda_+ \lambda_- = -r/\kappa$를 이용하여 아래와 같은 계산을 할 수 있다.

$$-\mathrm{Y}(x)\mathrm{X}'(\mathrm{Y}(x)) = -y\mathrm{X}'(y)$$
$$= -\lambda_+ \mathrm{X}(y) + \frac{\lambda_+}{r}\left(y^{\lambda_-}\int_{I(y)}^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} + I(y) - \epsilon\right)$$
$$= -\lambda_+ X + \frac{\lambda_+}{r}\left(y^{\lambda_-}\int_{I(y)}^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} + I(y) - \epsilon\right)$$

그러므로

$$\frac{d}{d\bar{y}}(-\mathrm{Y}(x)\mathrm{X}'(\mathrm{Y}(x)))$$
$$= \frac{\lambda_+}{r}\frac{d}{d\bar{y}}\left(y^{\lambda_-}\int_{I(y)}^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} + I(y)\right)$$
$$= \frac{\lambda_+}{r}\left(\frac{dy}{d\bar{y}}\right)\lambda_- y^{\lambda_- - 1}\int_{I(y)}^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} > 0$$

가 되어 재산수준 x에 해당하는 최적 위험자산투자액은 ξ에 관한 강한 감소함수가 된다.

5. 결 론

본 연구는 미래의 임금에 대한 일반적 대출제약(borrowing constraints)하에서 일반적 효용함수를 가진 경제주체의 최적 소비와 투자의 문제를 다루었다. 최적화 문제에 대한 해를 동적 계획(dynamic programming)을 사용하여 폐쇄형 공식으로 구하였다. 최적해를 정태적으로 분석함으로써 대출제약의 정도가 심할수록 최적 소비와 위험자산 투자가 줄어든다는 것을 해석적(analytic)으로 보여주었다. 본 연구에서는 노동임금이 상수로 정해져 있는데, 노동임금이 확률적으로 변할 시의 일반적 효용함수를 가진 경제주체의 대출제약 정도에 따른 최적

소비 및 투자 정태분석을 향후 연구로 생각해 볼 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 김명석, “한국 주식 수익률에 대한 Extreme 분포의 적용 가능성에 관하여”, 「경영과학」, 제24권, 제2호(2007), pp.115-126.

[2] 박세영, 이현탁, 이유나, 장봉규, “경기주기와 베이지안 학습(Bayesian learning) 기법을 고려한 개인의 자산관리 연구”, 「한국경영과학회지」, 제39권, 제2호(2014), pp.49-66.

[3] 최재호, 정종빈, 김성문, “마코위츠 포트폴리오 선정 모형을 기반으로 한 투자 알고리즘 개발 및 성과평가 : 미국 및 홍콩 주식시장을 중심으로”, 「경영과학」, 제30권, 제1호(2013), pp.73-89.

[4] Choi, K.J., G. Shim, and Y.H. Shin, "Optimal Portfolio, Consumption-Leisure and Retirement Choice Problem with CES Utility," *Mathematical Finance*, Vol.18(2008), pp.445-472.

[5] Farhi, E. and S. Panageas, "Saving and Investing for Early Retirement : a Theoretical Analysis," *J. Financial Econ.*, Vol.83, (2007), pp.87-121.

[6] Karatzas, I., J. Lehoczky, S. Sethi, and S. Shreve, "Explicit Solution of a General Consumption/Investment Problem," *Math. Oper. Res.*, Vol.11, No.2(1986), pp.261-294.

[7] Lim, B.H. and Y.H. Shin, "Optimal Investment, Consumption and Retirement Decision with Disutility and Borrowing Constraints," *Quantitative Finance*, Vol.11(2011), pp.1581-1592.

[8] Markowitz, H., "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, Vol.7(1952), pp.77-91.

[9] Merton, R.C., "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty : The Continuous-Time Case," *Rev. Econom. Statist.*, Vol.51(1969), pp.247-257.

[10] Merton, R.C., "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," *J. Econom. Theory*, Vol.3(1971), pp.373-413.

[11] Park, S. and B. Jang, "Optimal Retirement Strategy with a Negative Wealth Constraint," *Oper. Res. Lett.*, Vol.42(2014), pp.208-212.