대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 1, 215 ~ 229. Mar 2016

무한 등비급수의 합에 대한 Archimedes의 아이디어의 은유적 모델과 그 교육적 활용

이 승 우*

본 연구는 무한 등비급수의 합을 구하는 Archimedes의 상승적 아이디어를 소개하고 분배 상황을 이용하여 이를 은유적으로 확장하였다. Archimedes의 아이디어에 대한 은유적 확장 모델은 현행 고등학교 수준에서 강조되는 극한 개념의 동적 측면에 상보적으로 작동할 수 있는 정적인 특징을 갖고 있으며 중학교 수준에서 0.999⋯=1임을 설명할 때 현행 교과서에서 대수적 무한 유추에 기반하여 유도하고 있는 식 0.999⋯=9/(10-1)에 새로운 의미를 불어넣을 수 있는 장점이 있다. 실제로 중학교 2학년 영재학생들을 대상으로 한 본 연구자의 수업에서 은유적으로 확장된 모델은 구체적인 분배 상황을 통해 위의 식을 문맥화 함으로써 학생들의 흥미를 유발하였고 창의성과 오류를 이끌어 낼 수 있는 학습 환경을 제공하였다.

Ⅰ. 들어가며

수학사에서 등비급수는 수 개념과 적분 개념의 발달에 중요한 역할을 하였으며, 학교수학에서도 중요한 학습 주제 중 하나이다. 등비급수의 개념은 수열의 개념보다 복잡하지만 시기적으로 수열의 개념보다 먼저 발생하였으며(Knopp, 1956, p.3), 이미 기원전 2000년 경 고대 바빌로니아의 점토판에 등비급수가 나타난다(Smith, 1923: King, 1968에서 재인용). 유클리드 원론에는 오늘날 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=a(1-r^n)/(1-r)$와 같은 등비수열의 합이 기술되어 있는데 1590년 Viete가 공비가 $|r|<1$일 때 무한 등비급수의 합이 $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=a/(1-r)$임을 제시하였다(Smith, 1923: King, 1968에서 재인용).

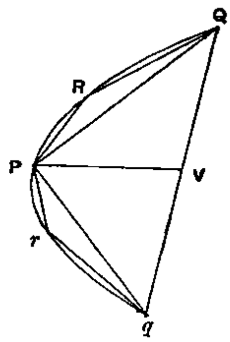
오늘날 교과서에서 사용되는 형태의 등비급수 개념은 Cauchy에 이르러 확립되었는데, Cauchy는 수열과 극한의 개념을 이용하여 부분합의 극한이라는 무한급수의 정의를 도입함으로써 무한히 더해야 하는 실행 불가능한 과정을 '합(sum)'이라는 용어로 대체 가능하게 하였다(Randolph, 1957). Archimedes는 극한의 개념을 사용하지 않고 무한 등비급수의 합을 구하였으며, 수학사가들은 Archimedes가 무한 등비급수의 합을 최초로 계산한 것으로 간주한다(King, 1968). 이에 대한 근거는 Archimedes가 자신의 저서 Quadrature of the Parabola에서 포물선과 현으로 둘러싸인 영역의 면적을 구할 때 오늘날의 표기로 다음과 같은 결과를 이용한 것에서 찾을 수 있다.

$$1/4+(1/4)^2+(1/4)^3+\cdots=1/3 \qquad \cdots\cdots \text{식}(1)$$

식(1)의 좌변은 Quadrature of the Parabola에서 나오는 다음 정리 24의 문맥에서 발견된다.

* 서울과학고등학교, ss2003@dreamwiz.com

(정리 24) 포물선과 현 Qq로 둘러싸인 영역의 넓이는 이 영역과 같은 밑변과 높이를 갖는 삼각형의 넓이의 $4/3$배이다(Heath, 2002, p.251).



[그림 I-1] 포물선에 내접하는 다각형(Heath, 2002, p.251)

[그림 I-1]에서 점 P는 현Qq에 평행한 접선과 포물선의 접점이며 점 R과 r도 마찬가지로 각각 현 PQ와 Pq에 평행한 두 접선과 포물선의 접점이다. $\triangle PRQ+\triangle Prq=(1/4)\triangle PqQ$ 이므로 이와 같이 내접하는 다각형의 변수를 2배씩 늘려가는 방식으로 포물선과 현Qq로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하면 $\triangle PqQ[1/4+(1/4)^2+(1/4)^3+\cdots]$와 같은 식을 얻게 된다. 이러한 역사 발생적 맥락에서 본 연구는 다음 문제에 답하고자 한다.

- Archimedes가 극한을 이용하지 않고 식(1)을 추측한 방법은 무엇인가?
- Archimedes의 아이디어는 교육적으로 어떤 의미가 있으며 어떠한 방식으로 활용가능한가?

II. Archimedes의 아이디어

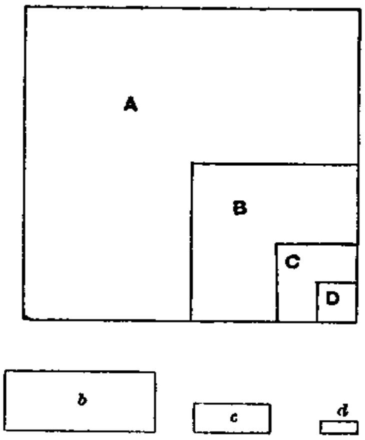
1. 부분과 전체의 관계를 이용하는 Archimedes의 상승적 아이디어

무한에 대한 Zeno의 역설은 그리스 시대의 수학에 심대한 영향을 미쳤으며 이에 대한 수학자들의 답변은 착출법이었다(Heath, 2003). Eudoxus의 착출법(소진법, method of exhaustion)은 하나의 양을 계속해서 나누어서 원하는 만큼 작게 만들 수 있다고 가정하여 무한소의 필요성을 제거함으로써 동시대의 수학자들로 하여금 탈출구를 열어주었다(Heath, 2003). 이러한 측면에서 그리스 시대의 수학자들은 '무한히 작다'나 '무한히 크다'는 표현대신, '주어진 양보다 더 크다 또는 더 작다' 등의 표현을 사용하였으며 '무한히 가까운 근사', '무한급수의 합', '원은 무한히 작은 변들로 이루어진 무한 다각형이다' 등과 같은 표현은 결코 사용한 바가 없다(Heath, 2002). Archimedes도 식(1)의 좌변에 있는 무한등비급수를 진술하고 있지 않으며, 17세기 들어서 무한을 사용하는 논리적 문제점보다 수학을 물리적 상황에 적용하려는 수학자들의 열망이 더 커지면서 무한이 실제로 사용되기 시작하였다(King, 1968). Archimedes는 정리 24를 증명하는 과정에서 무한의 사용을 철저히 배제하고 있는데 이를 위하여 다음 정리 23을 보조정리로 이용한다.

(정리 23) $A, B, C, D, \cdots, Z$는 일련의 넓이이고 A가 가장 크고 각각의 값은 바로 뒤에 있는 값보다 4배 클 때, 다음이 성립한다(Heath, 2002, pp.249-250).

$$A+B+C+\cdots+Z+\frac{1}{3}Z=\frac{4}{3}A \qquad \cdots\cdots \text{식}(2)$$

정리 23의 증명에서 Archimedes는 $b=(1/3)B$, $c=(1/3)C$, $d=(1/3)D$라 놓으면, $B+b=(1/3)A$, $C+c=(1/3)B$, $D+d=(1/3)C$ 등이 성립한다는 아이디어를 이용하였다[그림 II-1].



[그림 II-1] 정리 23의 증명에 사용된 그림 (Heath, 2002, p.250).

이러한 Archimedes의 계산은 오늘날의 표기로 Z를 n번째 항이라 하고 $Z=(1/4)^{n-1}A$이라 놓으면 식(2)는 다음 식(3)과 같이 나타내어진다.

$$A+\frac{1}{4}A+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}A+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}A=\frac{4}{3}A \quad \cdots\cdots \text{식}(3)$$

다음에서 정리 23의 증명과정을 추적하여 보자.

$$(1/4)A+(1/4)^2A+\cdots+(1/4)^{n-1}A$$

위의 식에 $1/3$을 곱하여 원래의 식에 다시 더하면

$$\begin{array}{lllll} & \frac{1}{4}A+ & \left(\frac{1}{4}\right)^2A+ & \left(\frac{1}{4}\right)^3A+\cdots+ & \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}A \\ +) & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}A\right)+ & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2A+ & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3A+\cdots+ & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}A \\ \hline & \frac{1}{3}A+ & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}A\right)+ & \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2A\right]+\cdots+ & \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}A\right] \end{array} \quad \cdots\cdots \text{식}(4)$$

이다. 위의 식을 정리하면

$$\frac{1}{4}A+\left(\frac{1}{4}\right)^2A+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}A+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}A=\frac{1}{3}A \quad \cdots \text{식}(5)$$

이므로 식(2)가 성립한다.

정리 23은 유한 등비수열의 합을 구한 것으로 무한 등비급수의 합과는 관련이 없어 보인다. 그러나 앞서 제시된 포물선과 현으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 정리 24의 문맥에서 볼 때, 이는 식(1)의 좌변에 나타나는 등비급수를 다음 식(6)을 이용하여 유한 등비수열의 합으로 바꾼 것으로 볼 수 있다[1]. 즉, 식(1)의 좌변의 무한을 제거하려는 목적으로 식(6)을 이용하여 식(2)에서 $\frac{1}{3}Z=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}A$를 더한 것이다.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}+\cdots=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots \text{식}(6)$$

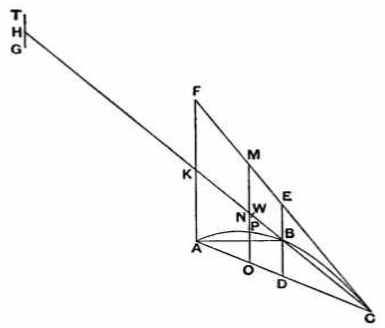
한편 고등학교 교과서에서는 등비급수의 합을 구하는 일반적인 방법을 다음과 같이 제시한다.

$$\begin{array}{rl} S_{n-1} & =r+r^2+\cdots+r^{n-1} \\ -)\quad rS_{n-1} & =\qquad r^2+\cdots+r^{n-1}+r^n \\ \hline (1-r)S_{n-1} & =r-r^n \end{array} \quad \cdots\cdots \text{식}(7)$$

식(4)와 식(7)의 과정을 비교하면 제$n-1$항까지의 합에서 식(4)는 제$n-2$항으로 나타나지만 식(7)은 제n항으로 나타난다. 이러한 측면에서, 식(4)와 식(7)을 각각 '상승적', '하강적' 이라고 특징지을 수 있다. 식(4)에서와 같이 상승적 아이디어를 적용 위해서는 식(6)을 추측할 수 있어야 하므로 Archimedes가 정리 23을 증명할 때 식(1)과 동등한 결과를 모종의 방식으로 이미 알고 있었다고 볼 수 있다. 그러나 Archimedes는 정리 23에서 식(1)을 증명하지 않는 것은 물론 가정도 하지 않고 있으며(White, 1992, p.140), 정리 24에서도 발견술적인 측면을 배제하고 기하적 방법에 따라 그 증명에 초점을 맞추고 있기 때문에(Christianidis & Demis, 2010), 식(2)와 [그림 II-1]에서 Archimedes가 어떤 아이디어를 적용하였는지 정확히 기술하기는 어렵다.

1) 그러나 Archimedes가 식(6)을 이용하여 식(2)를 이끌어냈다는 어떠한 증거도 없다(White, 1992, p.146)

한편 Archimedes는 다른 저서 The Method에서 지렛대의 원리와 무한소를 사용하여 포물선과 선분 AC로 둘러싸인 영역 ABC의 넓이가 $4/3\triangle ABC$임을 발견술적으로 기술하고 있는데 [그림 II-2], 이에 대해 간략히 살펴보자.



[그림 II-2] The Method에서 정리 24의 결과를 이끌어 내는데 사용된 그림 (Heath, 2002, 부록 p.16)

[그림 II-2]에서 직선 CF는 점 C에서 그은 접선이고 점 B는 꼭짓점이며 직선 DE는 포물선의 축이다. 또한 직선 AF와 MO는 직선 DE와 평행하고 점 H는 선분 CB의 연장선 위에 있으며 $\overline{HK}=\overline{CK}$이다. 이 때 $\overline{AK}=\overline{FK}$, $\overline{ON}=\overline{MN}$이 성립하는데 점 W를 삼각형 CFA의 무게중심이라 하자. 이 그림에서 Archimedes는 $MO:OP=HK:KN$임을 이끌어내고 지렛대 원리를 이용하기 위해 선분 OP를 TG로 치환하여 식 $MO:TG=HK:KN$을 세운다. 이 식에서 선분 OP를 TG에 놓고 그 중점을 H에 위치시키면 OP와 MO는 K를 중심으로 평형을 이룬다고 해석할 수 있다. 따라서 "삼각형 CFA는 MO와 평행한 선분으로 이루어져 있고 영역 CBA는 PO와 평행한 곡선 내부에 있는 선분들로 이루어져 있으므로 삼각형 CFA가 그림과 같이 위치하고 있는 상태에서 영역 CBA의 무게중심을 H에 위치시키면 (두 도형도) K를 중심으로 평형을 이룬다"(Heath, 2002, 부록 p.17). 즉, $\triangle ACF:(\text{영역 } ABC \text{ 의 넓이})=HK:KW=3:1$이다. 이 식과 $\triangle ACF=4\triangle ABC$임을 연립하면 $(\text{영역 } ABC \text{ 의 넓이})=4/3\triangle ABC$이다.

Archimedes는 무한소와 역학적 방법에 의한 발견으로는 결코 정리 24를 증명할 수 없지만 이러한 방법을 통해 문제에 대한 모종의 답을 먼저 얻을 때 증명은 더 쉬워진다고 기술한다(Katz, 1993). 이러한 측면에서, Archimedes가 The Method의 결과로부터 식(1)을 추정한 것으로 볼 수도 있으나[2] Heath(1922, p. 23)는 오히려 식(1)로부터 정리 24의 결과를 추측하였을 것이라고 본다(Boyer, 1959, p. 52 재인용)[3]. 특히, The Method에서는 선분으로 영역을 채워나가는 무한소적인 아이디어가 사용된 반면[그림 II-2], Quadrature of the Parabola에서는 작은 삼각형들로 영역을 채워나가면서[그림 I-1] 착출법을 사용하여 무한소의 사용을 배제하였다는 점에서 정리 23의 증명 과정에서 사용된 수식이나 [그림 II-1]과의 관련성이 있다고 보기는 어렵다.[4] 따라서 식(2)와 [그림 II-1]에 사용된 Archimedes의 상승적

2) The Method는 Archimedes의 사적인 노트를 모아 놓은 것으로 공식적으로 출판한 Quadrature of the Parabola보다 나중에 출판되었다(Christianidis & Demis, 2010). 그러나 이러한 저술의 순서가 곧 Archimedes의 연구 순서는 아니며 오히려 정리의 발견이 형식적이고 엄밀한 증명에 앞서 이루어졌다는 점에서 The Method의 아이디어가 선행된 것일 수 있다.

3) White(1992, p.141)의 관점에서 이러한 해석은 오류일 수 있다. 그는 이러한 오류의 원인이 우리가 현대인과 고대의 그리스인이 공유하고 있는 직관적인 관념과 오늘날 익숙해진 수학의 극한 개념을 쉽게 뒤섞어 버리기 때문에 발생한다고 지적한다.

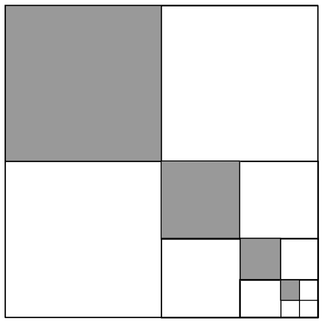
4) Archimedes는 Quadrature of the Parabola의 서문에서 포물선 영역의 넓이를 역학적 방식으로 먼저 발견한 뒤 기하적 방식으로 증명하였다고 기술하고 있으며(Heath, 2002), Quadrature of the Parabola의 방법과 The Method의 무한소적인 방법을 각각 기하적이고 증명적인 것, 역학적이고 발견술적인 것이라고 특징짓고 있다(Christianidis & Demis, 2010). 그러나 Quadrature of the Parabola의 정리 14와 16의 증명에 사용된 방식도 역학적일 수 있다는 점에서(Christianidis & Demis, 2010), Archimdes가 말하는 역학적 방식이 반드시 The Method의 무한소적인 방법을 말한다고 볼 수는 없다.

아이디어의 세부적인 내용은 여전히 명확하지 않다. 정리 24를 소개하는 문헌들에서도 증명의 엄밀성이란 관점에서 Archimedes가 사용한 착출법과 이중귀류법에 초점을 맞추어 기술하고 있으며, 그 증명 과정을 현대의 극한 개념으로 설명하면서(e.g., Toeplitz, 1963; Edwards, 1979) Archimedes의 아이디어에 대한 어떠한 해석을 제시하고 있지 않다.

여기서 한 가지 주목할 만한 것은 전술한 두 가지 방식에서 공통적으로 Archimedes가 부분을 비교하여 전체의 비를 이끌어 내는 상승적 시도를 하고 있다는 점이다. 즉, The Method에서 포물선의 영역과 삼각형의 내부를 구성하는 선분의 비를 구하여 포물선의 영역의 넓이와 삼각형의 넓이의 비를 구하였다면 Quadrature of the Parabola에서는 단계별로 삼각형들을 만들어 나갈 때 연속한 두 단계의 삼각형들의 넓이의 비를 구함으로써 동일한 시도를 한다는 것이다. 이 때, 전자는 적분의 평균개념인 무게중심과 지렛대의 원리를 이용하여 연속체인 선분 AC를 따라 각 선분의 길이의 비를 넓이의 비로 바꾸고 있다면, 후자는 자연수에 기초하는 점화식 $1/3a_n = a_{n+1} + 1/4a_{n+2}$을 이용하는 차이가 있을 뿐 부분의 비를 이용하여 전체의 비를 이끌어내는 상승적 아이디어는 공통적으로 작동하고 있다.

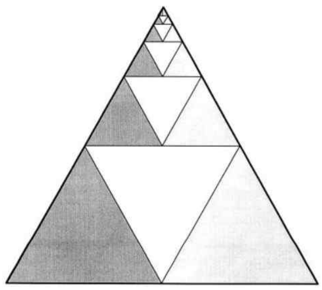
2. 기하적 상황과 대수적 상황

정리 23의 식(2)에 적용되는 상승적 아이디어의 이면에는 [그림 II-3]과 같은 기하적 상황이 있다고 볼 수 있다(DeSouza, 2012). 즉, 넓이가 1인 정사각형을 사등분하여 그 중 한 개를 칠하고 같은 방식으로 정사각형의 내부를 계속 칠해 나갈 때, 식(1)의 좌변을 색칠된 정사각형들의 넓이의 합으로 간주하는 것이다. [그림 II-3]에서 모양은 반복해서 나오고 색칠된 부분은 모양의 1/3이다. 재귀적으로 무한 반복되는 이러한 패턴에서 부분의 비로부터 전체의 비를 유추하면 색칠된 부분은 전체의 1/3임을 알 수 있다.



[그림 II-3] 식(1)의 기하적 무한 유추

기하적 무한 유추는 학교수학 수준에서 재발견될 수 있는 아이디어이며, [그림 II-4]는 식(1)에 대하여 재발견된 기하적 무한 유추이다. 여기서도 의 패턴이 반복되므로 마찬가지로 계산할 수 있다. [그림 II-3]과 [그림 II-4]의 경우 서로 다른 모양의 도형이라도 식(1)의 무한 등비급수의 합이 하나의 비로서 표현됨으로써 기하의 구체적 문맥에서 벗어나 추상화된다는 것을 알 수 있다.



[그림 II-4] 식(1)에 대한 기하적 무한 유추의 재발견(Nelson, 2000, p.111).

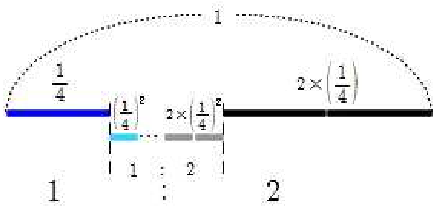
한편 식(2)에서 나타나는 Archimedes의 상승적 아이디어는 대수적 문맥에서도 발견된다. 기원을 정확히 알 수는 없는 고대의 문제로 아버지가 낙타 17마리를 큰 아들부터 차례로 세 아들이

각각 $1/2, 1/3, 1/9$만큼 나누어 갖도록 하는 유언을 남겼을 때 낙타를 어떻게 분배할 것인가 하는 것이 있다. $1/2+1/3+1/9=17/18$이므로 유산을 분배할 때 주어진 양의 $1/18$배 만큼 나머지가 계속 남게 되고 이를 분배하기 위해서는 $1/18+(1/18)^2+(1/18)^3+\cdots=1/17$을 구해야 한다[5]. 이러한 문제 상황은 아르키메데스의 문제와 동일하지만 낙타는 실제로 무한히 나누고 더하는 것을 상상할 수 없다는 현실적인 어려움도 갖는다. 이 문제와 함께 전해 내려오는 풀이에서는 현자가 자신의 낙타 한 마리를 보태 18마리를 만든 다음 세 아들에게 각각 9, 6, 2 마리를 나누어주고 나머지 한 마리를 다시 가져간다. 이 풀이의 이면에는 끝없이 나누고 더해가는 과정 $17\times\{1/18+(1/18)^2+(1/18)^3+\cdots\}$을, $17\times(1/17)=1$로 대체하여 유한 과정으로 바꾸는 것이 포함되어 있으며 이는 Archimedes의 상승적 아이디어와 동일하다. 즉, 처음 주어진 수 a의 $17/18$배인 $(17/18)a$만큼을 분배하고 $a/18$가 남는 문제 상황에서 $a=18$이면 분배하는 17마리와 나머지 1마리가 남는 경우가 된다. 나머지 1마리는 17마리를 나누어 갖고 다시 같은 비율로 분배해야할 대상이 되지만 이를 분배하던 분배하지 않던 전체의 비에는 영향을 미치지 않는데, 다음에서 이러한 분배 시나리오를 이용하여 기하적 무한 유추를 은유적으로 확장한다.

III. Archimedes의 아이디어의 은유적 확장

1. 기하적 무한 유추의 대수적 확장

분배 시나리오를 이용하면 Archimedes의 아이디어를 대수적으로 확장할 수 있으며 Zippin (1962)는 식(1)에 대하여 다음과 같은 시나리오를 제시 한다[6]. [그림 II-3]에서 주어진 정사각형을 갑과 을이 나누어 가질 때 갑의 몫은 식(1)의 좌변과 같이 주어진다고 하자. 우선 주어진 1을 4등분하여 $1/4$()은 다음 단계에 분배할 부분으로 일단 따로 떼어 놓는다. 이제 갑이 $1/4$만큼 가져가고 (에서 색칠된 부분), $2/4$를 을이 가져가면(에서 색칠되지 않은 부분), 갑과 을이 이 단계에서 나누어 갖는 비는 1:2이다. 나머지 $1/4$()에 대해 같은 과정을 적용하면 갑은 $(1/4)^2$만큼 더 가져가게 되고 이와 같은 과정을 무한히 반복하면 갑은 정확히 식(1)의 좌변만큼 가져가게 된다. 그런데, 나머지 $1/4$()을 분배하는 것은 처음 분배상황과 동일한 상황이 되므로 전체의 분배비는 첫 단계에서 부분 의 분배비와 같다. 따라서 첫 단계에서 얻어진 갑의 몫, $1/(1+2)=1/3$은 전체에 대한 분배상황에서도 그대로 유지된다. 이러한 재귀적 분배상황의 패턴은 [그림 III-1]과 같이 나타낼 수 있다.



[그림 III-1] 분배 시나리오의 재귀적 이미지

---

5) 세 아들들의 몫은 큰 아들부터 차례대로 각각 다음과 같다.
$\frac{1}{2}\cdot17+\frac{1}{2}\cdot17\cdot\left(\frac{1}{18}\right)+\frac{1}{2}\cdot17\cdot\left(\frac{1}{18}\right)^2+\cdots$, $\frac{1}{3}\cdot17+\frac{1}{3}\cdot17\cdot\left(\frac{1}{18}\right)+\frac{1}{3}\cdot17\cdot\left(\frac{1}{18}\right)^2+\cdots$, $\frac{1}{9}\cdot17+\frac{1}{9}\cdot17\cdot\left(\frac{1}{18}\right)+\frac{1}{9}\cdot17\cdot\left(\frac{1}{18}\right)^2+\cdots$

6) Zippin(1962, p. 29)은 이 시나리오를 Archimedes가 말한 것으로 인용부호 처리를 하였으나 그 출처를 제시하지는 않고 있다. 본 연구자가 그가 제시한 참고문헌을 조사하여 보았으나 어떠한 문헌에서도 이를 확인할 수 없었다. 이러한 측면에서 본 연구자는 Zippin이 Archimedes의 상승적 아이디어를 은유적으로 확장한 것이라고 추측한다. White(1992, pp. 139-140)도 Zippin의 이러한 설명이 식(1)에 대한 Archimedes의 증명을 비공식적으로 특징짓는다고 본다.

앞서 현자가 자신의 낙타 한 마리를 집어넣은 것은 이러한 재귀적 상황을 거꾸로 한 것이다. 즉, 분배할 때마다 $1/18, (1/18)^2, (1/18)^3, \cdots$과 같이 분배 대상이 남아가는 재귀적 상황을 거꾸로 진행시켜 1/18의 바로 전 단계로 1이 남는 상황을 만듦으로써 이를 해결한 것이다. 이러한 재귀적 닮음 구조에서는 18마리의 낙타 중 17마리를 분배하고 다음 분배의 대상으로 남긴 현자의 낙타 1마리는 분배하지 않아도 전체 분배 비율에 영향을 미치지 않는다. 즉, 유산의 몫을 구하는 연산자 1/2, 1/3, 1/9를 계속 적용할 때 발생하는 재귀적 상황에서 이들 연산자의 비 $1/2:1/3:1/9 = 9/18:6/18:2/18 = 9:6:2$는 변하지 않으며 이 비는 다시 연산자로서, 부분과 전체사이의 관계인 비 $9:6:2 = 9/(9+6+2):6/(9+6+2):2/(9+6+2) = 9/17:6/17:2/17$로 환원될 수 있음을 보여준다. 따라서 분배되어야 할 낙타의 수는 각각 $17\times(9/17)=9$, $17\times(6/17)=6$, $17\times(2/17)=2$이다. 결국 연산자의 관념에서 비의 관념으로 다시 연산자의 관념으로의 전환이 이루어진다.

분배 시나리오를 이용하여 확장된 은유적 모델은 기하적 무한 유추가 해결하기 어려운 무한등비급수의 계산을 가능하게 한다. 예를 들어, 아래의 식(10)은 기하적 무한 유추로 시각화하여 해결하기가 어렵지만 은유적 모델은 이 경우에도 다음과 같이 잘 적용된다(Zippin, 1962).

$$2/5+(2/5)^2+(2/5)^3+\cdots=2/3 \quad \cdots\cdots \text{식}(10)$$

우선, 길이가 1인 선분을 5조각으로 나눈다 (). 갑과 을이 각각 2/5 (), 1/5()씩 가져가고 2/5()는 다음 분배를 위해 남긴다. 남은 조각 2/5에 대해 위와 같은 과정을 반복할 수 있다. 이 때, 갑과 을이 가져가는 비는 2:1이므로 갑은 전체의 2/3를 가져가면 된다. 즉, 식(10)의 좌변을 $2/5\cdot(1+2/5+(2/5)^2+\cdots)$와 같이 보아 처음에 갑이 1의 2/5배 만큼 몫으로 가져갈 때 다음 분배할 몫 2/5를 남기고 그 이외의 부분을 을이 가져가며 그 다음 계속해서 $(2/5)^2$, $(2/5)^3, \cdots$ 등을 남기면서 몫을 분배하는 것이다.7) 이 은유적 모델을 적용하면 $0<r(=m/n)\le 1/2$인 유리수 공비에 대해서 두 자연수 m, n이 $m \le n/2$일 때, $\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^2+\left(\frac{m}{n}\right)^3+\cdots=\frac{m}{n-m}$임을 보일 수 있다. 즉, 갑이 m/n을 가져가고 m/n을 남겨 놓은 다음 나머지 $(n-2m)/n$을 을이 가져가므로 갑과 을이 가져가는 비는 $m:n-2m$이다. 따라서 갑의 몫은 전체의 $\frac{m}{n+(n-2m)}=\frac{m}{n-m}$이다.

2. 은유적 모델의 확장

가. $1/2<r<1$인 유리수 공비 r로의 확장

분배 시나리오는 $1/2<r<1$인 유리수 공비 r로도 확장된다. 이 경우 갑이 처음 가져가고 남는 양이 원래 양의 1/2보다 적기 때문에 어려움이 발생하는데 음수를 도입하여 다음 식(11)을 계산하여 보자.

$$3/5+(3/5)^2+(3/5)^3+\cdots=3/2 \quad \cdots\cdots \text{식}(11)$$

먼저, 길이가 1인 선분을 5조각으로 나누고 () 갑이 3/5()만큼 가져가면 2/5()가 남는다. 갑이 $(3/5)^2$만큼 더 가져가기 위해서는 그 다음 분배할 선분의 길이가 3/5이어야 하는데 2/5만 남았으므로 을이 1/5()만큼을 내놓아서 분배 하는 양을

7) 이는 $r+r^2+r^3+\cdots=x$라 할 때, $x=r(1+r+r^2+\cdots)=r(1+x)$이므로 $x=r/(1-r)$의 조작과 같다.

3/5로 만들면 3/5( )에 대하여 처음과 같은 분배과정을 다시 시행할 수 있다. 이 때, 갑과 을이 가져가는 비는 $3:(-1)$이므로 갑은 전체의 $\frac{3}{3+(-1)}=\frac{3}{2}$를 가져가면 된다. 마찬가지로, $n/2<m<n$일 때에도 갑이 m/n을 가져가고 m/n을 남겨 놓기 위해 을이 $(2m-n)/n$을 내놓는다면 갑과 을이 가져가는 비는 $m:-(2m-n)$이므로 갑의 몫은 전체의 $\frac{m}{m+[-(2m-n)]}=\frac{m}{n-m}$임을 알 수 있다.

나. 양의 실수로의 확장

은유적 모델을 적용하여 양의 실수 $r(0<r<1)$에 대해 $r+r^2+r^3+\cdots=r/(1-r)$를 이끌어 낼 수 있다. 먼저 1의 r배 만큼 갑이 가져가자. $0<r<1/2$인 경우 r만큼 남기고 을이 $1-2r$만큼 가져가면 갑의 몫은 $\frac{r}{r+(1-2r)}=\frac{r}{1-r}$이다. 또한 $1/2\le r<1$인 경우에도 r만큼 남기기 위해서는 마찬가지로 을이 $1-2r$만큼 가져간다. 이 때, $1-2r$이 음수이면 을이 $2r-1$만큼 내놓는 것으로 해석할 수 있다. 특히, $1\le r$인 경우에는 갑이 r배만큼 가져갈 때 을은 r배만큼 계속 내놓아야 하므로 $r/[r+(-r)]=\infty$와 같은 상황을 만나게 된다.

다. 음의 실수로의 확장

은유적 모델은 음의 실수 $s(-1<s<0)$에 대해 $s+s^2+s^3+\cdots=s/(1-s)$의 유도에도 적용된다. $r=-s$라 하면 $-(r-r^2+r^3+\cdots)=-r/(1+r)$8) 이므로, $r-r^2+r^3-\cdots=r/(1+r)$임을 보이자. 이 경우에는 $r-r^2$과 r^3-r^4이 재귀적임을 생각한다. 1의 r배 만큼 갑이 가져가고 을은 $1-2r$배 만큼 가져간다. 다시 분배되어야 할 나머지 양 r에 대해 갑은 r배 만큼 내놓고($-r^2$만큼 가져가고), 을은 남아 있는 양 r을 가져간다. 갑이 $r-r^2$만큼 가져갈 때 을은 $(1-2r)+r=1-r$만큼 가져갔으므로 갑의 몫은 $\frac{r-r^2}{(r-r^2)+(1-r)}=\frac{r}{1+r}$이다.

IV. 은유적 모델의 교육적 적용

1. 조작적, 동적 이미지 vs. 구조적, 정적 이미지

극한의 개념은 역사적으로 길이나 넓이의 소진(exhaustion)과 관련되는 기하문제와 무한급수의 합의 문제, 미분 문제 등의 어려움을 해결하기 위해 도입되었다(Cornu, 1991). 극한의 존재성과 관련되는 형이상학적 측면에서의 인식론적 장애는 학생들이 산술과 대수에서 익숙하게 다루어 왔던 계산 방법으로는 극한을 직접 계산하지 못 한다는 점에 주로 기인하는데(Cornu, 1991), 이는 경험적 직관에 기반 하는 양 개념과 추상화된 수 개념 사이의 간극을 드러낸다. 즉, 고대 유산 분배 문제에서 나타나는 것과 같이 계속해서 작아지는 양을 무한히 더해 나가는 식 (1)의 좌변을 실제로는 계산할 수 없다는 사실과 그 합이 1/3과 같다는 진술 사이에는 존재론적, 인식론적 장애가 개재된다. Sfard(1991)는 무한급수 $0.999\cdots$를 그 자체로 하나의 대상으로 보아 $0.\dot{9}=0.999\cdots$와 같이 인식하는 것과 대수적 조작을 통해 $0.999\cdots=1$임을 인식하게 되는 것을 각각 구조적, 조작적이라고 구분한다. 이러한 관

8) s를 $-r$로 치환하여 이 식의 좌변을 이끌어 내기 위해 분배법칙을 적용하는 과정에서 중학교 2학년 교과서에 나오는 식(12)의 조작과 동일한, 무한 유추에 기반하는 대수적 조작이 사용되었다.

점에서 보면 $0.\dot{9}=1$임을 구조적이면서도 조작적으로 인식할 때 즉, 식(1)을 하나의 수로 보는 실수의 완비성에 대한 구조적 인식과 그 합을 이끌어 내는 과정에서 이루어지는 조작적 인식 사이의 변증법적 발전과정을 통해 형이상학적 측면에서의 인식론적 장애에 대한 극복이 가능해진다고 볼 수 있다[9].

우리나라 교육과정에서 $0.\dot{9}=1$과 극한에 대한 접근 과정은 조작적이며 동적이라고 특징지을 수 있다. 우선 중2 과정에서는 다음과 같은 식(12)를 통하여 $0.999\cdots=1$임을 조작적으로 설명하고 있다(e.g., 황선욱 외 8인, 2015).

$$\begin{array}{rl} & 10x=9.999\cdots \\ -) & \underline{\quad x=0.999\cdots} \\ & 9x=9 \end{array} \qquad \cdots\cdots \text{식}(12)$$

식(12)는 우변의 각각의 항 $0.9,\ 0.09,\cdots$을 무한히 빼나가는 대수적 조작을 필요로 하므로 본질적으로 식(1)의 좌변에서 각항을 무한히 더해나가는 것과 같다. 그러나 식(1)의 좌변에서 차례대로 더해가는 과정은 인지적인 부담이 큰 반면 식(12)에서 소수점 아래 진행하는 9를 빼서 0으로 만드는 것은 인지적 부담이 적어서 9가 무한히 소거될 것이라는 대수적 무한 유추를 쉽게 적용가능하게 한다[10]. 이러한 대수적 무한 유추는 [그림 III-3]과 [그림 III-4]에서 패턴이 무한히 반복될 것이라는 기하적 무한 유추와 비교할 수 있는데, 전술하였듯이 대수적 무한 유추와 기하적 무한 유추는 각각 하강적이고 상승적이라는 점에서 서로 상보적이다. 특히, 식(12)에서 대수적 조작에 의한 $9/(10-1)=9/9=1$이라는 결론은 자칫 기계적으로 흐를 위험이 있지만 1을 10등분하여 갑이 9를 갖고 을은 0을 가지며 나머지 한 조각은 다음 분배를 위해 남겨 놓는 분배 시나리오는 일관되게 유지되는 부분의 비와 전체의 비 사이의 관계를 통하여 이 식에 새로운 의미를 불어넣음으로써 관계적이고 구조적인 접근을 가능하게 한다[11].

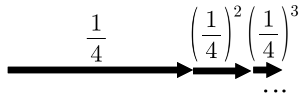
고교과정인 수열과 극한에서는 수열이 진행됨에 따라 수열이 그 극한에 '무한히 가까워진다'고 설명하며 이에 대한 시각화를 병행하고 있다는 점에서 조작적이고 동적인 측면에서의 직관적 이해를 강조하고 있다고 볼 수 있다(e.g., 황선욱 외 10인, 2015). 이와 같은 접근방식은 식(1)의 좌변에서 각 항을 계속 더해감에 따라 $1/3$에 '무한히 가까워지는' 조작적이고 동적인 직관적 이미지를 강화할 수 있다[그림 IV-1]. 그런데

9) 이러한 인식론적 장애의 극복이 가능한가(필요한가) 또는 $0.\dot{9}=1$임을 인식하는 것이 곧 그것을 극복하는 것이라고 말할 수 있는가에 대해서는 논란의 여지가 있다. 특히, $0.\dot{9}\neq1$임을 수용하는 Robinson의 Hyperreal Number System의 관점에서 본다면 $0.\dot{9}=1$임을 강조하는 것은 수학을 하는 자유로운 정신의 발달을 억압하는 매우 비교육적인 일이 될 수도 있다(조한혁・최영기, 1999). 그러나 본 연구는 학교수학의 수준에서 우리나라 교육과정에서 이루어지는 접근방식과 Archimedes의 아이디어 사이의 차이점을 드러내고 그 교육적인 활용 방안의 모색을 목표로 하고 있으므로 이 문제를 수학, 철학적 차원에서 포괄적으로 다루는 것은 본 연구의 범위를 벗어난다.

10) 조한혁・최영기(1999)는 식(12)의 과정에서 대수적 무한 유추보다는 $9.999\cdots$와 $0.999\cdots$ 사이에 닮음비가 10인 자기닮음(self-similarity)이 있다는 것에 주목한다. 이러한 관점에서 보면 식(12)는 $0.999\cdots$를 하나의 수 x로 보고 전체와 부분의 관계로서 식 $10x=9+x$를 이끌어 낸다는 점에서 정적이며 구조적이다. 이는 각주 6)에서 나타나는 것과 동일한 것으로, 보다 높은 수학적 관점에서 볼 때 드러나는 것이다. 그러나 본 연구는 높은 수준에서 $9.999\cdots$ 안에서 $0.999\cdots$를 파악하는 자기닮음의 인식이 아니라 중학교 2학년 수준의 조작 과정에서 대수적 무한 유추가 작동하는 것과 은유적 모델에서 반복되는 분배 상황의 재귀적 패턴(닮음)을 통한 부분과 전체의 구조에 대한 인식을 비교하고 있다.

11) 전술된 Sfard(1991)의 관점에서 볼 때 분배 시나리오에 의해 설명되는 이러한 상황은 여전히 조작적이라고 볼 수 있다. 그러나 조작과 구조의 이분법은 절대적인 것이 아니라 변증법적 발전 과정에서 그 역할이 뒤바뀔 수 있는 상대적인 것이다. 예를 들어 $1/3=2/6=3/9=\cdots$를 동치류로 생각하면 구조적이지만 약분의 과정을 생각하면 조작적이다.

이러한 동적 관념은 시간을 함축하기 때문에 Zeno의 이분법(dichotomy) 역설에 직면하게 된다.



[그림 IV-1] 식(1) 좌변의 조작적이고 동적인 이미지

Zeno의 이분법 역설은 일정한 속도로 달리는 사람이 거리가 유한인 구간 S의 끝에 일정한 시간 안에 도달할 수 없다는 것이다. 그 이유는 이 사람이 $S/2$를 가야하고 $S/4$, $S/8$, $\cdots$와 같이 무한히 가야하기 때문이라는 것이다. 이를 현대적 관점에서 보아 $S/2+S/2^2+S/2^3+\cdots=S$이므로 당연히 S에 도달한다고 말하는 것은 문제의 본질을 충분히 이해하지 못 하는 것이다. 이 역설이 제기하는 물음을 다르게 표현하자면, 길이가 S인 선분을 칼로 $S/2$만큼 잘라내고 나머지 $S/2$를 $S/4$만큼 잘라 잘라낸 $S/2$에 다시 붙이는 방식으로 계속해서 선분을 잘라 붙여나갈 때, 만들어진 선분의 길이가 원래의 선분의 길이와 같은가 또는 이와 같이 계속 자를 때 칼이 S의 끝에 도달할 수 있는가이다. 이러한 관점에서 보면 위 식의 좌변은 그 극한인 우변의 S와 결코 같을 수 없지만 좌변이 그 극한에 계속 접근하고 있기 때문에 극한과의 차이를 원하는 만큼 작게는 만들 수 있다는 D'Alembert의 관념에 이르게 된다(Counu, 1991). 즉, $\lim_{n\to\infty} S(1-1/2^n)=S$이지만 $\lim_{n\to\infty}[0, S(1-1/2^n)]=[0,S)$이다(조한혁 · 최영기, 1999).

Zeno의 역설은 직관적이고 경험적인 양의 관념과 추상화되는 수 개념 사이의 간격을 드러내고 있는데 여기에 개재되는 세 가지 양상을 생각해 볼 수 있다. 첫째, 식(1) 좌변의 연산과 조작에는 직관적인 운동의 관념이 작동한다. Zeno의 역설에서 나타나는 이러한 운동 관념은 Cauchy가 최초로 시간의 요소를 배제한 $\epsilon-\delta$를 이용하는 극한의 정적인 정의를 도입함으로써 제거 되었다[12]. 이 정의에서 시간의 흔적은 '극한(limit)'이라는 단어에만 남아 있을 뿐이다 (Randolph, 1957). 둘째, 식(1)의 좌변의 동적인 과정에 개재되는 시간 요소를 제거하여도 무한 연산의 가능여부는 해결되지 않는다. 이러한 무한 연산의 가능에 대한 물음 즉, 칼날의 도달지점을 실제로 말할 수 있다고 하면 무한소 개념에 다다르며 잠재적으로 가능하다고 하면 상계의 개념에 의존하게 된다. 이러한 무한 연산의 가능성은 Archimedes에게 있어서 상반된 두 가지 방식으로 답변되었다. 전술하였듯이 Archimedes는 정리 24에 대해 The Method에서는 무한소를 이용하여 삼각형을 채우는 방법을 사용한 반면 Quadrature of the Parabola에서는 무한히 수행되어야 하는 연산 부분을 잠재적인 것으로 남겨놓는 방식 즉, 양이 주어지면 유한번의 조작으로 그 보다 작게 나누는 것이 가능하다는 착출법을 이용하여 무한 연산을 배제하였다(White, 1992). 이러한 착출법은 Archimedes의 정리[13] 또는 Archimedes의 공리와 본질적으로 유사하다. 셋째, 식(1)에서 등호의 성립은 공리적 실수체계의 순서공리로 보장된다. Archimedes는 정리 24의 증명에서 이중귀류법을 이용하여 구하는 영역의 넓이가 $4/3\triangle PqQ$보다 작다는 가정이나 크다는 가정이 모두 모순임을 보임으로써 같다는 증명을 이끌어 내었는데 이는 암묵적으로 순서공리를

12) Cauchy가 현재 사용되고 있는 기호와 부등식을 사용한 것은 아니며 순전히 언어적인 방식으로 정의하였다(Grabiner, 1983).
13) 공리적 실수체계에서는 완비성공리로부터 유도된다(e.g., Apostol, 1981).

적용한 것이다. 공리적 실수체계에서 순서 공리는 상한의 유일성을 보장하므로 식(1)의 좌변의 무한 등비급수와 우변 1/3은 모두 집합 $\{1/4, 1/4+1/4^2, 1/4+1/4^2+1/4^3, \cdots\}$의 상한으로 같다. 이와 같은 동일성을 확립하기 위해서는 식(1)의 좌변을 무한히 더해가는 과정이 아닌 하나의 대상으로 파악하는 정적이고 구조적인 인식이 요구되며 이러한 인식은 다시 $0.\dot{9}=1.\dot{0}$이라는 동일성이, 실수로 이루어진 서로 다른 두 집합이 동일한 상한을 가질 수 있으므로 하나의 실수가 서로 다른 두 개의 소수표현을 가질 수 있다는 사실로부터 뒷받침된다는 인식(Apostol, 1981)으로 발전 가능하다.

우리나라 교과서에서 강조하고 있는 무한히 가까워진다는 극한 개념의 직관적이고 동적인 측면은 Zeno의 역설을 피해가기 어렵다는 점에서 추상화된 수 개념의 획득을 위해서는 보다 구조적이고 관계적인 측면에서 보완될 필요가 있다. 그러나 $\epsilon-\delta$의 정의나 순서공리와 완비성 공리를 도입하는 공리적 실수체계 등에 대한 학습은 고교과정을 벗어난다는 점에서 교육적 어려움이 있다. 이러한 측면에서 본 연구자는 은유적 모델과 결합되는 [그림 III-1]의 정적인 재귀적 이미지가 고교 교육과정에서 도입되고 있는 무한히 접근한다는 동적인 관념과 함께 무한 등비급수의 도달 가능성에 대한 인식론적 장애에 상보적으로 작동할 수 있다고 주장한다. 즉, 길이가 1인 선분을 왼쪽에서 1/3지점에서 잘라 분배해야 한다는 사실이 식(1)의 무한 등비급수가 1/3에 수렴한다는 것을 보다 관계적이고 구조적으로 드러낼 수 있다는 점에서 [그림 III-1]의 정적인 이미지가 [그림 IV-1]과 같이 수렴해가는 동적 이미지와 결합되면 학생들이 극한과 수렴 개념을 획득하는데 도움을 줄 수 있다고 본다.

2. 은유적 모델이 제공하는 창의적이고 오류적인 교육적 상황

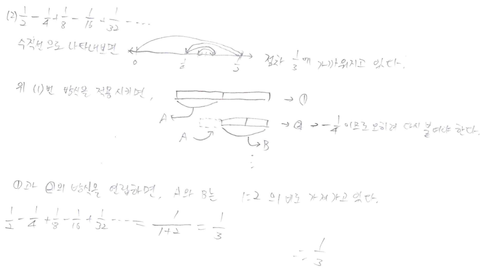
은유적 모델은 극한 개념을 학습하지 않은 중학교 학생들도 무한 등비급수의 합을 계산할 수 있는 개념적 도구를 제공할 수 있다. 본 연구자는 서울의 한 영재교육 기관에서 중학교 2학년을 대상으로 2005년부터 2007년까지 3년에 걸쳐 배당된 2시간 중 1시간 동안, 은유적 모델을 이용하여 무한 등비급수의 합을 구하는 것을 주제로 수업을 실시하였다. 수업은 분배 시나리오를 이용하여 식(1)을 학생들에게 먼저 설명하고 학생들이 이 모델을 적용하여 $1/10+1/10^2+1/10^3+\cdots$, $1/3+1/3^2+1/3^3+\cdots$ 등과 같이 식(1)과 유사한 간단한 문제를 풀어보는 연습활동으로 이루어졌다. 수업이 끝난 후 두 개의 계산 문제[14]와 유리수의 범위에서 일반화하는 문제[15]를 은유적 모델을 적용하여 풀도록 과제물로 부과하였다. 이들 문제는 수업 중 제시된 예에 비해 복잡하였기 때문에 학생들이 은유적 모델을 적용하기 위해서는 분배 시나리오를 확장하는 것이 필요하였다. 이 과정에서 학생들은 창의성을 발휘하였으며 부분과 전체의 개념에 대한 오류도 함께 드러내었다[16]. 예를 들어, 학생들은 교대급수의 합을 구하는 (2)번 문제의 해결 과정에서 은유적 모델을 다양한 방식으로 적용하였다. 학생들은 $(1/2+1/8+\cdots)-(1/4+1/16+\cdots)$와 같이 두 항식 묶고 각 괄호에 은유적 모델을 적용하거나 두 개의 항씩 짝지어 먼저 계산하여 $1/4+1/16+\cdots$

14) (1) $2/3+2/9+2/27+2/81+\cdots$ (2) $1/2-1/4+1/8-1/16+1/32-\cdots$

15) $a>0$이고 $r\,(0<r<1)$이 유리수일 때, $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=a/(1-r)$임을 보이시오.

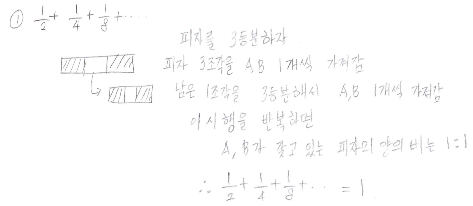
16) 이 모델을 이용하여 문제를 풀도록 하였음에도 일부 학생들은 이 모델을 사용하기 보다는 전술한 중학교 교과서의 방식을 따라서 풀었고 선행을 한 것으로 보이는 학생들은 극한을 사용하거나 고등학교 교육과정에서 제시되는 공식을 그대로 사용하여 답만 간단히 제시하기도 하였다.

를 구한 뒤 은유적 모델을 적용하였다. 또한 몇몇 학생들은 전술한 일반화 방식과 유사하게, 음수의 경우 다시 내놓는 것으로 은유적 모델을 적용하기도 하였다[그림 IV-2].



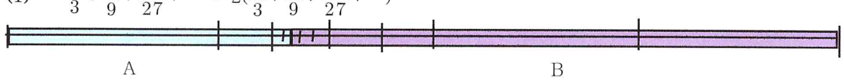
[그림 IV-2] 학생의 교대급수에 대한 은유적 모델의 적용

한편 일부 학생들은 분배상황에서 부분과 전체의 구조를 잘 파악하지 못 하여 오류를 범하였다. 가장 많이 나타나는 오류는 A와 B에게 분배하는 구조에서 무한 등비급수의 합을 $A/(A+B)$가 아니라 A/B로 계산하는 것이었다. [그림 IV-3]에서 $1/3+1/9+1/27+\cdots$에 은유적 모델을 적용할 때 $A:B=1/3+1/9+1/27+\cdots$라고 서술하고 있다. 이러한 오류는 [그림 IV-4]에서도 마찬가지로 나타나는데, 분모와 분자를 합한 만큼 분할한 뒤 1개만 남기고 $A:B$로 분배하는 것을 무한등비급수의 합이라고 보는데 기인한다. 이는 수업에서 분자가 1인 경우만을 연습해 보았기 때문인 것으로 분석되었다. 부분과 전체의 비에 대한 오류를 범한 학생들은 공비가 1보다 작은 양의 유리수의 경우로 일반화하지 못한 반면, 부분과 전체의 구조를 파악한 학생들은 일반화 문제의 경우에도 은유적 모델을 잘 적용하였다. 이러한 부분과 전체의 비에 대한 오류에 대하여서는 구체적으로 설계된 연구의 수행이 요구되겠지만 이들 사례로 비추어 볼 때 중학교 2학년 수준에서 학생들이 분배 시나리오에 기초한 은유적 모델의 이해가 쉽지 않을 수 있다는 점이 드러난다. 다른 한편으로 이러한 오류 사례는 은유적 모델을 수업에 적용할 때 답은 맞지만 왜 일반화에는 적용될 수 없는가 하는 “탐구를 위한 발판으로 사용할 수 있는 오류”로서 수업의 좋은 소재가 될 수 있다(Borasi, 1994).



[그림 IV-4] 부분과 전체의 비에 대한 오류 사례 2

(1) $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots = 2(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots)$



$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$를 아르키메데스의 방법으로 구해보자

위의 수직선과 같이 구해보자 이때 A가 가진 양은 B가 가진 양과 1:2이고,

A:B는 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$만큼을 의미하므로 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots=\frac{1}{2}$이다.

따라서

$2(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots)=2\times\frac{1}{2}=1$

[그림 IV-3] 부분과 전체의 비에 대한 오류 사례 1

V. 결 론

수학사에서 나타나는 수학자들의 일화나 수학적 아이디어는 학생들의 흥미를 자극하고 동기를 부여할 수 있는 새로운 소재가 될 수 있지만 실제 수업에서 활용될 수 있는 것은 많지 않다. 수학사에서 Archimedes가 포물선 영역의 넓이를 구하는 과정에서 무한에 대한 논란을 피하고 엄밀한 증명을 성공적으로 수행하는데 사용한 착출법과 이중귀류법에 관심을 두는 것과 달리, 본 연구는 수업 소재의 개발이라는 측면에서 Archimedes가 사용한 상승적 아이디어에 주목하고 그 교육적 활용방안을 제시하고자 하였다. 이를 위하여 본 연구는 학교수학적 지식의 관점에서(졸고, 2015a), Archimedes가 식(1)을 암묵적으로 어떻게 이끌어 내었는지 밝히고 이를 수업에 실제로 적용할 수 있도록 은유적으로 확장된 모델을 제시하는 형태로 수행되었다.

수학사에서 나타나는 극한 개념과 관련되는 인식론적 장애 중 하나는 고대 그리스 시대에서 나타듯이 도형에 대한 해석에서 순수한 수치적 해석으로 전이를 가능하게 하는 통합적인 극한 개념의 부재이다(Corunu, 1991). 본고에서 제시하는 은유적 모델은 Archimedes의 기하적 문맥과 분배 문제의 대수적 문맥을 통합하고 초중등 수준의 비 개념만으로 무한 등비급수의 합을 계산 가능하게 한다는 점에서 극한 개념에 내재하는 형이상학적 측면이나 기하에서 대수로의 전이적 측면에서 나타는 극한 개념의 인식론적 장애를 우회할 수 있는 하나의 통로를 제공할 수 있다.

현재 우리나라의 교육과정에서는 식(1)에 대하여 주로 조작적이고 동적인 측면에서 극한의 개념에 접근하고 있으나 이러한 측면만을 강조하는 것으로는 대수적 조작을 통하여 이끌어낸 결과와 무한 등비급수가 수렴한다는 것 사이에 개재되는 존재론적, 인식론적 장애를 쉽게 극복하기 어렵다. 따라서 구조적이고 관계적인 측면의 도입을 통하여 이를 보완할 필요성이 제기된다. 그러나 이는 보다 엄밀하게 접근하는 대학수학 영역에서 속하는 것으로 인식되어 왔으며 학교수학에서는 그와 같은 수준의 엄밀하게 형식화된 개념을 도입할 수 없기 때문에 교육적 어려움이 있었다. Zippin(1962, p.20)은 식(1)에 의미를 부여하는 은유적 모델이 극한에 대한 현대 이론의 모든 것을 포함하고 있다고 간주하는데 이러한 측면에서 본 연구자는 은유적 모델이 형식화된 높은 수준의 수학을 도입하지 않고도 우리나라의 현재 교육 상황에서 극한과 무한 개념의 구조적이고 관계적 측면을 조기에 도입 가능하게 하는 교육적 도구가 될 수 있다고 주장한다.

중학교 2학년 영재학생들을 대상으로 한 본 연구자의 수업에서 은유적 모델은 대수적 조작에 기반하는 식 0.999⋯=9/(10-1)=1에 구체적인 분배 상황을 통해 그 의미를 제공함으로써 학생들의 흥미를 유발하였고 학생들에게 창의적이고 오류적인 교육적 상황(ESMCE: Educational Setting for Mathematical Creativity and Errors)을 제공하였다(졸고, 2015b). 또한 은유적 모델은 학생들로 하여금 부분과 전체의 비에 대한 자신의 개념을 적용하게 함으로써 부분과 전체의 비에 대한 학생들의 이해수준을 드러내는데 효과적이었다.

참고문헌

이승우 (2015a). 학교수학이란 무엇인가? **수학교육학연구**, **25**(3), 381-405

이승우 (2015b). 학교수학적 지식의 성장: 고등학교 영재 학생들의 위키(Wiki) 기반 협력 문제해결 활동을 중심으로. **수학교육학연구,** **25**(4), 717-754

조한혁 · 최영기 (1999). 정적 동적 관점에서의

순환소수. **학교수학, 1**(2), 605-615.

황선욱 외 8인 (2015). **중학교 수학2**. 서울: 신사고

황선욱 외 10인 (2015). **미적분 I**. 서울: 신사고

Apostol, T. M. (1981). Mathematical Analysis(2nd ed.). Addison-Wesley Publishing Company.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on Errors as “Springboards for Inquiry”: A Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development: The concepts of the calculus*. Mineola, NY: Dover Publications.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall(Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*(pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Christianidis, J., & Demis, A. (2010). Archimedes' quadratures. In S. A. Paipetis, & M. Ceccarelli (Eds.), *The Genius of Archimedes-23 Centuries of Influence on Mathematics, Science and Engineering* (pp. 57-68). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

DeSouza, C. E. (2012) *The Greek method of exhaustion: Leading the way to modern integration*. (Master degree paper, Ohio State University).

Edwards, C. J. (1979). *The historical development of the calculus*. NY: Springer-Verlag.

Judith V. Grabiner, J. V. (1983). Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. *The American Mathematical Monthly, 90*(3), 185-194.

Heath, T. (2002). *The Works of Archimedes*. Mineola, NY: Dover Publications.

Heath, T. (2003). *A Manual of Greek Mathematics*. Mineola, NY: Dover Publications.

Katz, V. J. (1993). *A history of mathematics: An introduction*. NY: HarperCollins College Publishers.

King, D. Albert. (1968). *A Hisotyr of Infinite Series* (Doctoral dissertation Paper, Peabody College for Teachers of Vanderbilt University).

Knopp, K. (1956). *Infinite sequences and series*. Mineola, NY: Dover Publications.

Randolph, J. F. (1957). Limits. In NCTM (Ed.) *Insights into Modern Mathematics* (pp.200-240). Washington, DC: NCTM.

Nelsen, R. B. (2000). *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. Washington, DC: MAA

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Toeplitz, O. (1963). *The calculus: a genetic approach*. Chicago: University of Chicago Press.

White, M. J. (1992). The continuous and the discrete: Ancient physical theories from a contemporary perspective. Oxford: Oxford University Press.

The Metaphorical Model of Archimedes' Idea on the Sum of Geometrical Series

Lee, Seoung Woo (Seoul Science High School)

This study aims to identify Archimedes' idea used while proving proposition 23 in 'Quadrature of the Parabola' and to provide an alternative way for finding the sum of geometric series without applying the concept of limit by extending the idea though metaphor. This metaphorical model is characterized as static and thus can be complimentary to the dynamic aspect of limit concept adopted in Korean high school mathematics textbooks. In addition, middle school students can understand 0.999⋯=1 with this model in a structural way differently from the operative one suggested in Korean middle school mathematics textbooks. In this respect, I argue that the metaphorical model can be an useful educational tool for Korean secondary students to overcome epistemological obstacles inherent in the concepts of infinity and limit by making it possible to transfer from geometrical context to algebraic context.

* Key Words : Archimedes' idea(Archimedes의 아이디어), Sum of Geometric Series(무한 등비급수의 합), Metaphorical Model(은유적 모델), Epistemological Obstacles(인식론적 장애)

논문접수 : 2016. 2. 10
논문수정 : 2016. 3. 12
심사완료 : 2016. 3. 14