대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 1, 159 ~ 173. Mar 2016

구체물의 추상화와 추상적 개념의 구체화에 나타나는 초등학생의 수학적 사고 분석

임 영 빈* · 홍 진 곤**

실제 교육 현장에서는 구체적 맥락에서 추상화하는 과정과 반대로 추상화된 개념을 먼저 가르치고 구체적인 문제 상황을 도입하는 경우도 있다. 즉, 추상적 지식을 구체화해야 하는 경우가 있는 것이다. Freudenthal은 이런 상황을 반교수학적인 전도라고 표현하며 부정적인 견해를 나타낸 바 있지만 모든 수업상황이 구체적 상황이나 구체물에서 출발하는 추상화로 진행될 수 있는지는 의문의 여지가 있다. 본 연구에서는 구체물을 추상화하여 추상적 개념을 형성하는 과정과 추상적 개념을 구체적인 상황으로 구체화하는 과정에서 나타나는 수학적 사고의 차이점을 비교·분석하여 그 교육적 시사점을 살펴보고자 한다. 이를위해 AiC의 분석틀을 활용하여 구체물의 추상화 과정에서의 수학적 사고를 분석하였고, AiC의 분석틀을 토대로 연구자가 구안한 방식으로 추상적 개념의 구체화 과정에서의 수학적 사고를 분석하였다. 두 과정을 비교·분석한 결과 구체물의 추상화 과정만큼이나 추상적 개념의 구체화 과정에서도 유의미한 수학적 사고를 유도할 수 있음을 확인할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

초등학생의 대다수가 Piaget의 인지 발달 단계 중 구체적 조작기에 해당된다. 하지만 고학년 학생들의 경우에는 형식적 조작기에 접어들어 더 이상 눈에 보이는 실체에만 집중하지는 않는다. 이 시기에는 가설적 상황에 대해 생각할 수 있게 되고 추론 능력이 발달하며 여러 가지 차원과 추상적 특징에 대해 생각할 수도 있게 된다 (Schunk, 2004, p.545). 추상적 지식은 최소한의 언어로 최대의 의미를 표현하려는 수학의 간결성과 관련된 요인은 물론이고, 추상화된 과정을 통해 일반화 시킴으로서 학습한 내용을 더욱 넓은 범위로 확대·적용하는데 반드시 필요한 요소이다(황혜정 외, 2015, p.38). 형식적 조작기에 접어든 학생에게는 물론, 그렇지 못한 학생에게도 추상적으로 구성된 수학적 지식은 조금 더 고차원의 지식을 구성하기 위한 수단이 될 수 있기 때문에 그 역할이 중요하다. 실제로 Kaminski (2008, p.454)의 연구에 따르면, 구체적인 예의 학습보다는 추상화된 지식의 학습 후에 지식의 전이가 잘 일어난다고 한다.

수학적 개념은 '구체에서 추상으로'라는 역사적 발달 단계를 거치면서 오늘에 이른 것이 사실이다. 그러므로 한 인간의 수학 학습 과정도 구체로부터 출발하여 추상과 형식으로 도약해야 하며, 직관으로부터 논리로 진행해야 한다는 것

* 인천해서초등학교, loveace-bin@hanmail.net (제1 저자)
** 건국대학교, dion@konkuk.ac.kr (교신저자)

이 여러 학자들의 주장이다(정동권, 2001, p.447). 이런 주장에 걸맞게 초등학교 수학의 지도 과정도 대체로 구체적인 현상이나 구체물의 조작을 통해 추상적인 지식을 구성해가는 방향성을 띄고 있다. 이 과정에서 학생들의 학습 의욕을 고취시키기 위해 친숙한 문제 상황을 제시하거나 수학사 및 교구를 활용하기도 한다. 그러나 문제 상황이나 교구의 조작 과정에서 본질적인 요소를 찾아내어 추상화하지 못한다면 학생들의 활동은 단순한 놀이에 그치고 말 것이다. 친숙한 상황이나 교구를 활용한 놀이상황에 그치지 않고, 수학화의 과정을 거쳐야 비로소 수학적인 지식이 구성되는 것이라면, 구체적인 상황이나 구체물의 추상화 과정, 즉 추상적 지식의 구성은 수학 수업에서 매우 중요한 과정이라고 할 수 있다.

그러나 실제 수학 수업 상황에서 보면, 현실적이고 구체적인 맥락에서 자연스럽게 추상적 지식을 구성하는 경우가 있는 반면, 기존에 타인이 기술한 추상적 지식을 바로 습득하는 경우도 있다. 사실, 현재 국내의 교육 상황에서는 수업시간 중에 자연스럽게 추상적 지식을 구성하기 어려운 경우도 많이 있다. 선행학습 등으로 인해 구체적인 상황에서 자연스럽게 형성된 지식이 아닌 타인에 의해 형성된 지식을 전수받은 학생들이 많기 때문이다. 그런데 이렇게 추상적 지식을 먼저 학습한 학생들이 꼭 학습에 어려움을 겪지는 않는다. 게다가 추상적 지식의 구체화 과정을 겪으면서 오히려 추상화 과정에서 볼 수 없었던 유의미한 사고과정을 거치기도 한다. 실제로 원기둥의 구적 공식을 먼저 학습했던 학생이 밑면의 넓이에 곱해주는 '높이'의 의미를 파악함으로써 구체화한 것도 유의미한 학습이 될 수 있을 것이다.

이에 본고에서는 초등학생이 구체물을 사용하여 이분모 분수의 덧셈 학습을 할 때 나타나는 추상화 과정을 분석하고, 이미 습득한 추상적 개념을 통한 이분모 분수 덧셈의 구체화 과정에서의 수학적 사고를 분석한 뒤 두 과정의 차이점을 비교하고자 한다. 그런데 추상화와 구체화 과정이 같은 과정을 거치는 것이 아니기 때문에 직접적인 비교가 어려울 수 있다. 그래서 각 과정에서 관찰되는 수학적 사고를 분석하여 비교하고자 한다.

2. 연구문제

본 연구에서는 이분모 분수의 덧셈 학습에 관하여 구체물을 사용한 추상화와 추상적 개념의 구체화 과정에 나타나는 수학적 사고의 분석을 통해 두 과정을 비교해보고 교육적 시사점을 제시하고자 한다. 본 연구의 목적을 위하여 설정한 연구 문제는 다음과 같다.

가. 구체물을 이용한 이분모 분수의 덧셈 학습에 나타나는 추상화 과정에서는 어떤 수학적 사고를 관찰할 수 있는가?

나. 이미 추상적 개념만 습득한 학생이 구체화 과정을 거칠 때 관찰할 수 있는 수학적 사고는 어떤 것들인가?

다. 구체물의 추상화 과정과 추상적 개념의 구체화 과정에서 나타나는 수학적 사고는 어떤 차이점을 가지고 있는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 관찰 및 분석 가능한 수학적 사고

수학 교육의 목적은 수학적으로 사고하는 능

력과 태도를 개발하는 것이라고 말할 수 있다(우정호, 1998, p.15). 대부분의 연구자들은 수학적 사고와 태도가 중요하다는 견해를 가지고 있지만 수학적 사고와 태도를 설명하는 입장은 다양하다. 본 연구에서 살펴보고자 하는 학생들의 추상화와 구체화는 눈으로 직접 볼 수 없기 때문에 그 과정에서 보이는 수학적 사고, 아울러 그러한 수학적 사고를 유발하는 수학적 태도를 분석함으로써 간접적으로 비교해보고자 한다. 이를 위해 본 절에서는 관찰하고자 하는 수학적 사고와 태도를 분명하게 규정하기 위한 선행연구를 분석할 것이다.

수학적으로 사고하는 능력을 알기위해 수학의 네 가지 측면을 생각해 볼 수 있다. 그것은 '알고리즘적 수학', '개념적 수학', '추론으로서의 수학', '문제해결로서의 수학'이다(우정호, 1998, p.15)

위의 네 가지 측면과 관련하여 볼 때 수학의 목표는 다음과 같은 네 가지로 좀 더 상세히 진술될 수 있다.

(1) 여러 가지 기본적인 계산 능력을 포함한 알고리즘의 구사 능력
(2) 기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성의 이해력과 이에 수반되는 수학적인 용어, 기호, 그래프 등 수학적 표현의 구사력
(3) 수학적인 추론 능력, 곧 추측하고 발견하는 능력과 증명하는 능력
(4) 수학 내적인 문제의 해결 능력과 응용문제의 해결 능력

정리해보면, 수학적으로 사고한다는 것은 여러 가지 계산법, 나아가 문제해결에 이르는 명확한 절차 곧, 알고리즘을 능숙하게 구사하고 이를 개발하는 것이며, 수학적인 '안목'을 갖고 의미 충

<표 II-1> 수학적 사고 · 태도의 구조(片桐重男, 1989)

문제해결 과정	수학적 태도	수학적 사고	
		방법에 관련된 사고	내용에 관련된 사고
문제 형성파악	· 스스로 자신의 문제나 목적, 내용을 명확히 파악하려는 태도 · 내용을 간결 명확히 나타내려는 태도	추상화 단순화 수량화 기호화 도형화	함수적 사고
해결방안 구상	· 이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도	유추 특수화 수량화 도형화	단위의 사고 개괄적 파악의 사고
해결실행	· 이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도 · 내용을 간결 명확히 나타내려는 태도	귀납 연역 유추 단순화 특수화 기호화 구체화	단위의 사고 표현의 사고 조작의 사고 개괄적 파악의 사고 함수적 사고 식에 관한 사고
논리적 검증 및 발전	· 이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도 · 내용을 간결 명확히 나타내려는 태도 · 보다 나은 것을 구하려는 태도	일반화 연역 귀납 통합 발전	단위의 사고 표현의 사고 조작의 사고 알고리즘의 사고 기본 성질의 사고 함수적 사고 식에 관한 사고

실한 개념적 사고를 하면서 수학적인 용어와 기호를 구사하는 것이며, 수학적인 명제를 증명하고, 수학적인 개념과 원리, 법칙을 귀납과 유추를 통해 추측하고 발견하는 것이며, 수학의 여러 가지 개념, 원리, 법칙 사이의 관련성을 파악하고 또한 수학적인 내용과 수학 외적인 상황과의 관련성을 파악하여 문제를 수학적으로 해결하는 것이다. 개념적 사고도, 알고리즘도, 추론도 결국은 문제를 풀기 위한 수단에 불과하다고 볼 수 있으므로, 수학적 능력의 핵심은 수학적으로 문제를 해결하는 능력이라고 볼 수 있을 것이다(우정호, 1998, pp.19-20).

이환철 외(2009, p.100)는 강문봉, 片桐重男 등의 연구를 토대로 수학적 사고의 신장을 측정하기 위한 방법을 찾기 위한 유형별 준거를 제시하는 등 학생의 행동을 준거로 수학적 사고를 관찰하였다. 본고에서도 이와 같이 학생들의 행동을 준거로 수학적 사고를 관찰하고자 한다. 수학적 사고라는 인간의 정신 활동은 그 자체로 관찰이 가능한 것이 아니다. 그러나 이와 같은 준거를 토대로 학습자의 활동과 반응을 분석한다면 그 행동을 유발한 수학적 사고를 규정지을 수 있을 것이다.

片桐重男[1]는 문제 해결 과정을 토대로 각 단계에서 어떤 '수학적 태도'가 쓰이는 일이 많은지 분석하였다. 그리고 이들 각 태도가 어떤 '방법에 관련된 수학적 사고'와 '내용에 관련된 수학적 사고'를 발동시켰는지 설명하고 있다. 이를 구조화한 것이 <표 II-1>이다.

2. 맥락에서 추상화 하기(AiC)

학생들의 학습과정에서 추상화 과정을 설명하기 위한 '맥락에서의 추상화(Abstraction in Context, AiC)'라는 이론적 틀은 Dreyfus가 Hershkowits, Schwarz 와 함께 학습 맥락의 특수성을 고려하여 만든 것이다. 여기서 이야기하는 '맥락'은 수학적, 사회적, 교과적 요소뿐만 아니라, 학생들의 과거 학습 경험 및 기술적인 것이나 다른 도구들을 포함한 학습 환경을 포함한다. Freudenthal 이나 Davydov 등의 생각에 기반을 두고 있는 이 틀에 따르면 추상화 과정은 필요(need), 출현(emergence), 통합(consolidation)의 세 단계를 거친다. 여기에서 학생들에게 새로운 구성물의 출현은 세 가지 관찰 가능한 인식론적 행위와 관련된 모델(recognizing, building-with, constructing)[2]로 다룰 수 있다(Dreyfus, 2012).

Noss와 Hoyles의 상황적 추상화 과정과 Davydov의 활동이론에 영향을 받은 Dreyfus, Hershkowits 등은 추상화에 대한 기존의 인지심리학자들의 연구들이 주로 이론적인 관점을 받아들여 추상화를 탈맥락적인 형태로 설명해왔다고 비판하였다. 이들은 추상화 과정을 새로 정의하고, 경험적인 자료 분석에 기초한 수많은 사례연구를 통해 추상화 과정을 연구하였다. 이들은 추상화의 특성이 되는 세 가지 인식론적 행동, 즉 기존 구조의 인식(R), 기존 구조 확립(B), 새로운 구조 구성(C)을 확인하고 이를 기반으로 추상화 과정에 대한 모델 RBC 이론을 제시하였다. 그리고 이러한 추상화 과정에서 사회적, 문화적, 역사적 맥락은 배제할 수 없는 필수적인 구성요소임을 강조하였다(송정화, 2010, p.51).

추상화에 대한 Freudenthal 등의 이론은 교육과정이 특정 종류의 추상화를 제시하고 있음을 알려주지만, 동시에 이를 사용할 것인지 아닌지는 학생 및 교사들의 선택에 달려있다. AiC는 수직적 수학화와 Davydov의 구체로의 상승법의 관점에서 학습자에게 새로운 구성물을 이끌어내기

1) 카타기리 시게오
2) 각각의 모델을 인식(R-행위), 형성(B-행위), 구성(C-행위)로 나타낸다.

<표 II-2> AiC 틀에 따른 추상화 과정(Dreyfus, 2012)

구분		내용
필요 (need)		추상화를 하도록 유도할 때 그리고 적절한 설계 및 학습자의 개념 형성 초기에 나타나는 막연함으로부터 나타나는 것으로 과거의 지식과 미래의 구성을 서로 연결 짓게 하며, 이전에 존재하던 구성물들을 수직적으로 재조직하는 구성화 과정에 반드시 선행되어야 하는 것
출현 (emergence)	인식	학습자가 사전 지식 구성물이 상황과 관련됨을 깨닫는 것
	형성	인식된 구성물의 조합으로 이루어진 것으로, 전략의 실제화, 문제 정당화 또는 문제해결과 같은 국소적 목표를 달성하기 위한 것
	구성	수직적 수학화로 새로운 구성물을 만들기 위해 기존 구성물들을 모으고, 통합하는 것으로 새로운 구성물이 학습자에 의해 표현되거나 사용된다는 것을 의미하며, 아직 자유롭고 유연하게 사용하는 것을 의미하지 않음
통합 (consolidation)		학생들이 자신의 구성물들을 알아가게 되는 끊임없는 과정이며, 이 구성물의 사용은 즉각적이고 자명하며, 구성물을 사용할 때 학생들의 자신감은 상승한다. 학생들은 구성물을 사용하는데 더욱 자유롭고 유연성을 가짐

위해 기존 수학 내에서 수학적 수단을 사용하여 학습자들이 가진 기존의 수학적 구성물을 수직적으로 재조직하는 과정을 추상화라고 정의한다(Dreyfus, 2012).

학습자가 새로운 구성물에 대한 필요를 인식하면 미래의 구성물에 대한 모호한 형식을 갖게 되고, 새로운 구성물에 대한 필요를 인식할 때, 학습자는 현실 세계에 과학적 설명을 제공하는 새로운 구성물인 일관되고 정교한 형식을 개발하기 위해 이전 지식을 재구성할 준비를 하는 다음 단계에 진입한다(Kidron & Monaghan, 2009, p.87).

새로운 구성물의 출현은 세 가지 관찰 가능한 인식론적 활동인 인식하기(R), 만들기(B), 구성하기(C)를 통해 기술되고 분석된다. 구성물의 통합은 하나의 행위에 내재된 구성물이 다른 활동들에서 세워질 때마다 일어날 수 있다. 이러한 다른 활동들은 새로운 구성물을 이끌어낼 수도 있기 때문에 연속적인 구성화 과정과 연결되고, 활동의 설계와 매우 밀접한 관계가 있다. R-행위는 B-행위에 포함되며 이 두 행위는 C-행위를 구성하며 이에 포함된다. 아울러 낮은 수준의 C-행위는 넓은 수준의 C-행위 안에 포함될 수 있다. 이러한 특성을 바탕으로, 이 모델을 맥락 내에서 추상화를 역동적으로 포함하는 인식론적 행위 모델이라 부르고 간단히 RBC 모델이라 부른다(Dreyfus, 2012). 통합의 중요성을 부각시키기 위해 구성물을 강화하는 두 번째 C(consolidation)를 사용하여 RBC+C 모델로 부르기도 한다.

Ⅲ. 구체물의 추상화 과정에서 볼 수 있는 수학적 사고의 분석

초등학교에서 분수 학습을 할 때, 보통의 경우에는 구체물을 통해 자연스럽게 학습한다. 분모가 한 자리수인 간단한 분수의 개념이나 동분모 분수의 덧셈의 경우에는 구체물의 학습을 토대로 기호를 사용하거나 덧셈의 방식을 추상할 수 있다. 그러나 다양한 분수를 접하게 되고, 이분모 분수의 덧셈 등으로 발전시킬 경우에는 계속 구체적인 상황을 통해 학습하기에 어려움이 따른다. 그래서 구체물이나 구체적 상황과 추상화 사이의 징검다리 역할을 해줄 반구체물이 필요하다. 본 절에서는 분수 학습에 이용될 수 있는 구체물인 퀴즈네어 막대(Cuisenaire Rod)를 활용하여 이분모 분수의 덧셈을 지도하고, 그 과정에서 학생들의 추상화 과정을 분석해보고자 한다.

1. 연구대상의 선정

퀴즈네어 막대를 활용하여 이분모 분수의 덧셈을 지도하기 위해, 아직 선행학습을 하지 않고, 평균적 이상의 수학과 성취 능력을 가지고 있는 5학년 학생A를 연구 대상으로 선정하였다. 이 학생A는 4학년 때 배운 동분모 분수의 덧셈을 할 줄 알며, 5학년 1학기 초반에 배우는 약수와 배수 및 최소공배수와 최대공약수의 개념을 잘 이해한 학생으로 아직 이분모 분수의 통분을 배우지 않아서 이분모 분수의 덧셈을 하지 못하는 학생이다. 실험을 함에 앞서 퀴즈네어 막대를 활용한 동분모 분수의 덧셈, 진분수로의 통약 및 최소공배수 구하기를 지도하였다.

2. 퀴즈네어 막대를 사용한 이분모 분수의 덧셈 학습과정에서의 수학적 사고 분석

000 학생A : (색막대가 주어졌으나 색막대로 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$을 해결하려는 시도는 하지 못함)

001 교 사 : $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ 라는 문제는 해결할 수 있겠니?

002 학생A : 잠깐만요.... $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ 인데....

002에 나타나는 것은 기존에 배운 동분모 분수의 덧셈과 관련한 유추적 사고라고 할 수 있다.

003 교 사 : 왜 이 문제를 해결하지 못하니?

004 학생A: 분모가 다르니까 더하지 못하겠어요. 그냥 $\frac{3}{5}$인가?......

005 교 사 : $\frac{3}{5}$?

006 학생A: 아니에요... 분모끼리 더하는건 아니겠죠.....

007 교 사 : 그럼 분모가 다른 분수를 더하려면 어떻게 해야 할까?

008 학생A : 그러게요... 분모가 같으면 되나? 분모를 같게 바꾸면 될거같아요?

006은 연역적 사고를 통해 잘못된 풀이를 하지 않으려는 사례이다. 임영빈 · 류희수(2011)는 논리적으로 오류를 없애기 위해 잘못된 풀이를 하지 않으려는 노력도 연역적 사고라고 규정했다. 008은 기존에 알고 있던 형식으로 문제를 변형시키기 위한 유추적 사고라고 할 수 있다.

009 교 사 : 그럼 가장 먼저 해야 할 것은 무엇이지?

010 학생A : $\frac{1}{2}$의 분모를 3으로 만들어야 해요.

011 교 사 : 그렇게 할 수 있겠니?

012 학생A : (잠시 생각) 아... 안되겠네요...

013 교 사 : 왜 안되지?

014 학생A : 3은 2의 배수가 아니라서...

010~014는 연역적 사고를 함으로써 문제가 해결되지 않는 이유를 파악하는 과정이다.

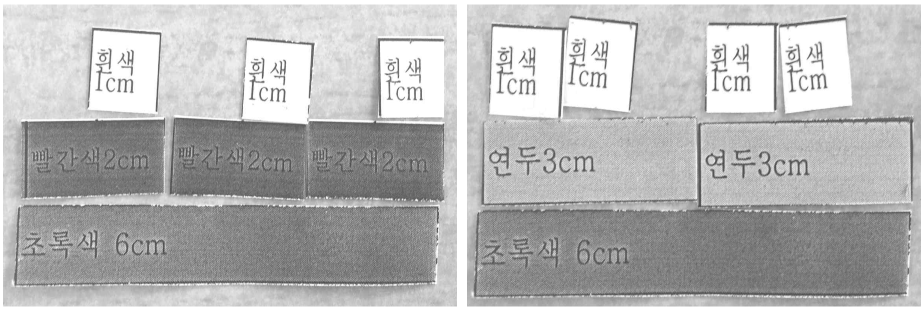
015 교 사 : 그럼 그동안 분수에 대해 배우면서 사용했던 색막대를 사용해서 한번 알아볼까?

016 학생A : 네...(색막대를 이리저리 만지면서 해결방안을 탐색한다.)

017 학생A : 아 $\frac{1}{2}$은 $\frac{3}{6}$이고, $\frac{2}{3}$는 $\frac{4}{6}$니까 $\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$겠네요.

018 교 사 : 어떻게 이 문제를 해결했니?

019 학생A : 우선 2는 짝수고, 3은 홀수니까 어떻게 같은 분수로 만들지는 못



[그림 III-1] 색막대의 조작

하겠고...어제 배운 것 중에 색막대로 같은 분수 만들기 한거처럼 해봤어요. 빨간색이 3개니까 흰색도 3개고.....

019에서 학생A는 조작을 함으로써 유추적 사고를 통해 문제를 해결하고 있다. 그 과정에서 각각의 막대가 가지는 속성을 기호로 표현하고 있다.

020 교 사 : 그럼 다른 문제들도 이렇게 풀 수 있겠니? 예를 들면 $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$이나 $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}$ 같은건?

021 학생A : 되는거도 있고 안되는거도 있겠죠?

022 교 사 : 어째서 안되는거도 있지?

023 학생A: 음~$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$는 $\frac{1}{3}$의 분모를 6으로 바꿔주면 되는데 $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}$은 분모를 ...음...20으로 바꿔야 해서 색막대로 못해요. 색막대는 제일 큰게 10이라서...

024 교 사 : 분모를 20으로 바꿔야 한다는 건 어떻게 알았지?

025 학생A: (5와 4의) 최소공배수잖아요?

026 교 사 : 그럼 색막대를 사용하지 않으면?

027 학생A : 할 수 있죠. $\frac{1}{5}$는....음...$\frac{4}{20}$이고, $\frac{3}{4}$는 ....$\frac{15}{20}$ 이니까 더하면 $\frac{19}{20}$이네요.

028 교 사 : 그럼 이런 식으로 분모가 다른 분수들의 덧셈·뺄셈을 어떻게 할 수 있겠니?

029 학생A : 우선 분모를 같게 해주는데, 최소공배수로 같게 해주면 될거같아요. 그러고서 더하면 되요.

030 교 사 : 분모를 같게 해주는데 분자는 어떻게 바꿔준거니?

031 학생A : 분모가 4개면 분자도 4개잖아요?

032 교 사 : 그럼 이렇게 분모가 다른 분수의 덧셈이나 뺄셈을 하는 방법을 자세히 이야기 해보렴

033 학생A : 분모의 최소공배수를 구해서 곱해준 수만큼 분자도 곱해서 분모를 같게 만들어주어요.

020~033의 과정은 전반적으로 일반화의 사고와 추상화의 사고를 통해 추상화하기 위한 과정이다. 일반화의 사고를 위해 주어진 조건보다 일반적인 경우에도 성립하는지 생각을 했고, 여러 가지 경우의 문제가 가지는 성질을 통합적 사고로 종합 정리하였다. 아울러 색막대를 사용할 수 없는 문제를 해결하기 위해 알고리즘의 사고를

<표 III-2> 퀴즈네어 막대를 사용한 이분모 분수의 덧셈 전략 추상화 과정

단계	내용		수학적 사고
필요 (need)	퀴즈네어 막대를 통해 같은 값을 나타내는 분수로 표현하고, 동분모 분수의 덧셈을 할 수 있었던 것을 통해 이분모 분수의 덧셈을 하기 위한 준비를 함		유추적 사고
출현 (emergence)	인식 (R-행위) (recognize)	문제 해결을 위해서는 이분모 분수 형태를 동분모 분수 형태로 변환해야 할 필요성을 인식함	연역적 사고 유추적 사고
	형성 (B-행위) (build-with)	퀴즈네어 막대를 배열하여 동분모 분수 형태로 문제를 해결할 수 있도록 조작함	유추적 사고 연역적 사고 조작의 사고
	구성 (C-행위) (constructing)	동분모 분수 형태로 문제를 해결하고 기호화함	기호화의 사고
통합 (consolidation)	기호화해서 해결한 문제를 바탕으로 통분에 필요한 최소공배수의 역할을 알고리즘화함		일반화의 사고 알고리즘의 사고 추상화의 사고

통해 계산을 형식화 하기 위해 노력하였으며 이는 어떤 조건에서도 문제를 해결하기 위해 본질만을 남기는 추상화의 사고로 볼 수 있을 것이다. 강문봉 외(2005)가 제시하는 추상화의 사고는 비본질적인 속성을 사상시키고자하는 태도에 초점을 맞추고 있기 때문에 '추상화'와 구별 되어질 수 있다.

위 학생이 퀴즈네어 막대를 사용하여 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 전략을 추상화하는 과정을 간단히 살펴보면 <표 III-2>와 같다.

Ⅳ. 추상적 개념의 구체화 과정에서 볼 수 있는 수학적 사고의 분석

추상화의 큰 이점은 다른 영역으로의 전이가 용이하고, 개념을 일반화시킬 수 있다는 점이다. 그러나 비정상적인 선행학습으로 인해 추상화된 수학적 개념을 가지고 있음에도 불구하고 일상생활의 문제해결에 자신이 가진 개념을 사용하지 못하는 학생이 많이 있다. 본 연구에서는 선행학습으로 추상적인 개념을 가지고 있음에도 그 개념이 사용되는 맥락과 연결짓지 못하는 학생의 구체화 과정을 통해 교육적 시사점을 살펴보고자 한다.

구체화 과정은 AiC와 같은 공인된 분석틀이 없기 때문에 연구자가 AiC 틀을 응용하여 <표 IV-1>과 같은 분석틀을 구안하였다. 분석틀을 구안함에 있어 구체적인 상황인 '맥락'과의 연결 및 통합에 초점을 맞추었다.

첫 번째 단계는 '필요'의 단계로 AiC와 마찬가지로 학습자가 맥락화의 필요성을 인식하는 단계이다. 추상적인 수학 개념이 현실 맥락에서 어떻게 사용되는지, 혹은 그 지식이 어떤 맥락에 대한 모델인지 연결 할 필요성을 느끼게 되는 단계이다.

두 번째 단계는 자신의 추상적 개념과 연결지을 수 있는 맥락을 찾아 자신이 가지고 있는 추상적 개념과 현실 맥락 사이의 공통점을 찾아 개념을 통합하는 '맥락 적용' 과정이다.

세 번째 단계는 통합한 추상적 개념을 끊임없이 일상생활의 현실 맥락과 연결 짓고 문제 상황을 수학적으로 인식하는 '반성'의 과정이다.

추상적 개념을 구체화 하는 과정이 반드시 추상화 과정의 역은 아니다. 우선 자신이 가지고 있는 개념을 맥락과 연결 지을 필요성을 인식함

<표 IV-1> 추상적 지식의 구체화 과정

<table>
<tr><td>단계</td><td colspan="2">내용</td></tr>
<tr><td>필요</td><td colspan="2">기존에 알고 있던 추상적 수학 개념을 현실 맥락으로 연결 할 필요성을 인식함</td></tr>
<tr><td rowspan="2">맥락 적용</td><td>맥락 연결</td><td>맥락화하고자 하는 추상적 수학개념과 같은 구조를 가지고 있는 현실맥락들을 찾음</td></tr>
<tr><td>맥락 통합</td><td>찾아낸 현실맥락들 사이의 공통점을 찾아 기존의 추상적인 수학개념과 비교하고 다시 모델링 하는 과정</td></tr>
<tr><td>반성</td><td colspan="2">통합한 추상적 개념을 끊임없이 일상생활의 현실맥락과 연결 짓고 문제 상황을 수학적으로 인식하는 과정</td></tr>
</table>

으로써 구체화는 시작될 수 있다. 그리고 보유한 개념의 현실맥락을 연결짓고 통합하여, 현실과의 연관성을 끊임없이 되새기는 과정을 거쳐야 할 것이다.

1. 연구대상의 선정

선행학습으로 추상적 지식을 가지고 있지만 그 지식을 맥락적으로 생각하지 못하는 학생을 선정하기 위해 두 차례에 걸친 평가를 실시하였다. 첫 번째 평가는 단순한 이분모 분수의 계산식을 해결하는 것이었고, 두 번째 평가는 첫 번째 평가의 종료 후 일주일 정도 뒤에 이분모 분수의 덧셈과 관련된 일상생활의 문장제였다. 평가 결과 식으로만 이루어진 이분모 분수의 덧셈은 대체로 잘 해결하지만 일상생활과 연관된 문장제를 해결함에 있어 어려움을 보이는 5학년 학생B를 선정하였다. 이 학생은 선행학습을 통해 이분모 분수의 통분 및 덧셈을 모두 배워서 단순한 연산은 어느 정도 해결했지만 문장제의 경우 문제를 해결하는데 필요한 과정이 이분모 분수의 통분임을 유추하지 못하는 학생이었다. 이분모 분수의 덧셈 과정에서 학생들에게 추상화된 지식은 최소공배수에서 유추할 수 있는 ‘분모의 통분’과 기존에 학습된 ‘동분모 분수의 덧셈’과정 알고리즘이다. 이와 같은 알고리즘은 학생들이 기존에 학습한 최소공배수와 동분모 분수의 덧셈에서 유추하여 기호화된 지식으로 구성을 할 수 있다. 그런데 단순한 연산으로 제시된 이분모 분수의 덧셈 문제를 해결할 수 있는 학생이라도 학생B와 같이 이분모 분수의 덧셈에 대한 문장제를 해결하지 못한다면 구체적인 실제 상황에 자신의 지식을 적용할 수 없는 문제점을 가지게 된다.

2. 비정상적으로 구성되었던 추상적 지식을 구체화하기 위한 교수 내용

우선 [표 IV-2]와 같이 이분모 분수의 덧셈과 같은 구조를 가지는 실제 상황을 찾는 활동을 함으로써 피상적으로 사용하던 추상화된 개념의 구조와 현실맥락 속의 구조와의 공통점을 알게 한다. 그리고 기존의 연산이 어째서 통분의 과정을 거쳐 동분모 분수로 변환될 수 있었는지 깨닫게 한다. 이와 같은 활동을 토대로 일상생활에서 볼 수 있는 이분모 분수의 덧셈과 관련된 문제 상황을 스스로 구성하게 한다.

034 교 사 : (위의 문제를 제시한다.)
035 학생B: (약 10분간 문제를 해결한다. 대부분의 시간을 ③번 문제를 풀기 위해 컵 그림을 그려보고, 식을 만드는데 사용하였다.) ③번이요.

035의 과정에서는 문제 해결을 위해 표현의 사고, 도형화의 사고, 식에 대한 사고 등이 나타

<표 IV-2> 상황을 구체화 하기 위해 제시한 문제

<table>
<tr><td colspan="3">$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ 문제를 해결하는 것과 같은 원리를 가지고 있는 상황을 고르시오.</td></tr>
<tr><td>① 한판이 8조각인 피자가 있다. 정표는 2조각을 먹었고, 민성이는 3조각을 먹었다. 두 사람이 먹은 피자는 전체의 얼마인지 분수로 나타내시오.</td><td>② 한 변의 길이가 $\frac{2}{5}cm$인 정삼각형의 세 변의 길이의 합은 몇cm인지 구하시오.</td><td>③ 같은 크기의 컵 두 개가 있다. 한 개에는 $\frac{1}{5}$만큼 물이 들어있고, 다른 컵에는 $\frac{1}{3}$만큼의 물이 들어있다. 한 컵의 물을 다른 컵에 모두 부으면 컵에 들어있는 물은 얼만큼인지 구하시오.</td></tr>
</table>

난다. 아울러 같은 구조를 가지는 문제를 찾는 것 자체가 하나의 유추적 사고라고 볼 수 있다.

036 교 사 : 어째서 그렇게 생각을 했니?

037 학생B: 처음에는 ①도 같다고 생각을 했는데 ③을 보고 마음을 바꿨어요.

038 교 사 : ①과 ③은 어떤 차이가 있는데?

039 학생B: ①은 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$하고 비슷하긴 한데 $\frac{2}{8}+\frac{3}{8}$이니까 통분을 안해도 되는 문제고, ③은 $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$이니까 통분을 해야 해서 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$과 비슷한 상황이에요.

039의 과정에서는 연역적 사고가 나타나며, 유사한 원리를 가진 문제들을 통합적 사고로 함께 묶어 생각하게 된다.

040 교 사 : 그럼 이와 같은 실제 상황들을 네가 직접 구상해볼 수 있겠니?

041 학생B: (직접 구상해본다.) 음~피자 몇 판을 ... 어떤건 2조각으로, 어떤 건 8조각으로 자르고, 남은거 합쳐보는 것도 되겠네요.

042 교 사 : 피자를 다르게 자르는 것이 어떻게 같은 상황이라고 생각하니?

043 학생B: 2조각에서 1조각이면 $\frac{1}{2}$이고, 8조각에서 한 조각이면 $\frac{1}{8}$이니까 같은 한조각을 더해도 분모를 같게 해줘야 하는 거잖아요.

041~043의 과정에서는 특수화의 사고가 일어나며 몇 가지 사례를 생각하고 기존의 지식과

<표 IV-3> 추상화 된 이분모 분수의 합 지식의 구체화 과정

<table>
<tr><th>단계</th><th colspan="2">내용</th><th>수학적 사고</th></tr>
<tr><td>필요</td><td colspan="2">기존에 알고 있던 이분모 분수의 덧셈이라는 추상적 수학 지식을 일상생활의 문제 상황과 연결 지을 필요성을 인식</td><td>유추적 사고
표현의 사고
도형화의 사고
식에 대한 사고</td></tr>
<tr><td rowspan="2">맥락 적용</td><td>맥락 연결</td><td>맥락화하고자 하는 추상적 수학지식과 같은 구조를 가지고 있는 현실맥락들을 찾음</td><td>연역적 사고
통합적 사고</td></tr>
<tr><td>맥락 통합</td><td>찾아낸 현실맥락들 사이의 공통점을 찾아 기존의 추상적인 수학지식과 비교하고 모델링하는 과정</td><td>특수화의 사고</td></tr>
<tr><td>반성</td><td colspan="2">모델링한 추상적 지식을 끊임없이 일상생활의 현실맥락과 연결짓고 문제상황을 수학적으로 인식하는 과정</td><td>통합적 사고</td></tr>
</table>

연결지음으로써 통합적 사고가 일어난다.

학생B가 비정상적으로 가지고 있던 추상적 지식을 구체화하고, 가지고 있던 지식에 의미를 부여하는 과정은 <표 IV-3>과 같이 나타낼 수 있다.

Ⅴ. 추상화 과정과 구체화 과정의 비교 분석

이분모 분수의 덧셈 학습에 나타나는 구체물의 추상화와 추상적 지식의 구체화 과정에서 관찰할 수 있는 수학적 사고는 다음과 같다.

구체물의 추상화 과정은 구성주의 학습 이론상 자연스러운 학습 과정으로 유추적 사고에서 시작하여 연역적 사고, 조작의 사고, 기호화의 사고 등을 통해 자연스럽게 알고리즘을 정리하고 추상화 및 일반화함으로써 유의미한 학습을 구성한다.

이에 비해 이미 형성된 추상적 지식의 구체화 과정은 다양한 맥락들을 식이나 도형 등으로 표현해보고 연역적으로 맥락과 지식을 통합하는 과정을 거쳐 새로운 특수한 맥락을 구성해내고 기존의 추상적 지식들을 통합한다.

두 과정을 비교한 결과 구체물을 추상화 하는 과정만큼이나 추상적 지식을 구체화하는 과정에서도 유의미한 수학적 사고를 유도할 수 있다. Kaminski(2008, p.454)가 실행한 실험[3]에서도 오히려 추상적 지식을 먼저 학습하는 것이 지식의 전이가 잘 일어날 수도 있다는 결과를 보여주었는데 이 결과 또한 같은 맥락에서 생각해볼 수 있을 것이다. 비정상적인 경로를 통해 추상화된 알고리즘을 먼저 학습 하는 경우가 많은 우리나라의 교육 현실을 생각할 때, 이미 추상적인 지식을 접한 학생들에게 유의미한 수학적 사고와 태도를 유발시킬 수 있는 방법에도 관심을 가져야 할 것이다.

Ⅵ. 결론 및 제언

본 연구에서는 구체물의 추상화 과정과 추상적 개념의 구체화 과정에서 관찰 할 수 있는 수

<표 V-1> 추상화와 구체화 과정에서 수학적 사고 비교

구체물의 추상화 과정			추상적 지식의 구체화 과정		
필요	유추적 사고	·이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도	필요	유추적 사고 표현의 사고 도형화의 사고 식에 대한 사고	·스스로 자신의 문제나 목적, 내용을 명확히 파악하려는 태도 ·내용을 간결 명확히 나타내려는 태도
출현	유추적 사고 연역적 사고 조작의 사고 기호화의 사고	·이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도 ·내용을 간결 명확히 나타내려는 태도	맥락 적용	연역적 사고 통합적 사고 특수화의 사고	·이치에 닿으며 조리 있는 행위를 하려는 태도
통합	일반화의 사고 알고리즘의 사고 추상화의 사고	·내용을 간결 명확히 나타내려는 태도	반성	통합적 사고	·보다 나은 것을 구하려는 태도

3) 가환군과 관련된 일반적인 식의 학습과 구체적인 예의 학습을 비교한 결과 추상적으로 표현된 일반적인 식을 학습한 학생에게 지식의 전이가 더 잘 일어났다. 이는 '반교수학적 전도'를 이야기하는 입장과 대조적일 수 있다.

<표 VI-1> 2009 개정 교과서 4학년 2학기 <소수의 덧셈과 뺄셈> 차시 구성

차시	주제	수업 내용 및 활동
7차시	소수의 덧셈을 할 수 있어요(1)	• (소수 한 자리 수)+(소수 한 자리 수)의 계산 원리를 이해하게 한다. • 계산 형식을 이해하고 능숙하게 계산하게 한다.
8차시	소수의 덧셈을 할 수 있어요(2)	• (소수 두 자리 수)+(소수 두 자리 수)의 계산 원리를 이해하게 한다. • 계산 형식을 이해하고 능숙하게 계산하게 한다.
9차시	소수의 덧셈을 할 수 있어요(3)	• 1보다 큰 소수 두 자리 수 범위의 덧셈 계산 원리를 이해하게 한다. • 계산 형식을 이해하고 능숙하게 계산하게 한다.
10차시	소수의 뺄셈을 할 수 있어요(1)	• (소수 한 자리 수)-(소수 한 자리 수)의 계산 원리를 이해하게 한다. • 계산 형식을 이해하고 능숙하게 계산하게 한다.
11차시	소수의 뺄셈을 할 수 있어요(2)	• (소수 두 자리 수)-(소수 두 자리 수)의 계산 원리를 이해하게 한다. • 계산 형식을 이해하고 능숙하게 계산하게 한다.
12차시	소수의 뺄셈을 할 수 있어요(3)	• 1보다 큰 소수 두 자리 수 범위의 뺄셈 계산 원리를 이해하게 한다. • 계산 형식을 이해하고 능숙하게 계산하게 한다.

학적 사고를 비교분석하였다. 두 과정 모두 자연스러운 학습이 일어나기 위해서 기존에 배웠거나 이미 알고 있는 내용에 대한 유추적 사고가 필연적으로 동반된다. 구체물의 추상화 과정은 학습자의 지식을 간결, 명확히 나타내기 위한 수학적 사고를 하려는 경향을 보이며 추상적 지식의 구체화 과정에서는 이미 기호화 되어있는 기존의 지식을 특수한 상황에 적용하기 위한 수학적 사고를 하고자 노력한다.

아무리 자연스럽게 추상화 과정을 유도하더라도 모든 수학적 사고를 다 경험하게 할 수는 없다. 일반화가 되어있는 추상적 지식을 학습한 뒤, 구체화하는 과정을 거침으로써 오히려 평소 유발되지 않았던 수학적 사고가 나타날 수도 있다. 즉, 추상적 지식을 먼저 학습하는 것이 반드시 비난받을 교수법은 아니라는 것이다.

오히려 구체물이나 구체적인 상황에서의 추상화를 유도하는 과정은 교과학습 시간의 부족을 야기하는 단점을 가질 수도 있다. 게다가 모든 학습 소재를 구체적인 상황으로 설명하려고 하다보면 억지로 맥락을 설정하기도 한다. 한 가지 예로 2009개정 교육과정 4학년 2학기 1단원 <소수의 덧셈과 뺄셈>을 살펴보자. 이 단원의 경우 소수의 덧셈에 3차시, 소수의 뺄셈에 3차시로 구성이 되어있다. 다음과 같이 소수의 자리 수가 하나 늘어나거나 1보다 큰 소수의 덧셈 또는 뺄셈을 할 때마다 1차시를 할애하고 있다.

[그림 VI-1] 무리한 상황설정의 예

그런데 모든 차시에서 빵이나 과자의 재료, 수직선, 모눈종이 등의 구체적인 예로 학습을 시킴으로 인해 실제 학습량이 많지는 않다. 7차시의 학습 이후에 나머지 8~9차시의 학습을 하지 않고도 대부분의 학생들이 수학익힘책의 8~9차시 내용을 해결할 수 있을 정도로 지식의 전이가 잘 일어난다. 심지어 4학년 1학기에 수학 부진아로 판명된 학생들조차 계산의 형식을 이해하고 어느 정도 문제를 해결할 수 있었다. 게다가 모든 차시를 구체적인 상황에서 맥락으로 적용하

려다보니 [그림 VI-1]과 같은 억지 상황이 등장하기도 한다. 이 상황은 1보다 큰 소수의 덧셈 상황을 설정하기 위해 과자 반죽을 만드는 장면이다. 그런데 과자 한 개를 만들기 위해 각종 재료를 8kg 이상 넣어야 한다. 과자 한 개의 단위가 매우 크다고 생각할 수도 있지만 바로 다음 차시에는 0.1kg의 빵이 등장하기 때문에 일관적이지도 않다.

이러한 문제들을 종합해 보면, 덧셈과 뺄셈의 각 첫 차시 정도는 구체적인 예에서 추상화하는 방식을 취하고 나머지 차시의 경우 형식불역의 원리에 따른 자연스러운 추상적 지식의 사용을 통한 구체화의 방법을 따르는 것도 부족한 교과 시간을 효율적으로 이용하는 한 가지 방법일 수 있을 것이다.

일상생활에서 부딪히는 문제 상황을 수학적으로 해결하는 능력을 키우기 위해서는 구체성을 제거하고 수학적 본질만을 추상하여 해결하는 과정이 분명히 필요할 것이다. 그러나 이러한 과정에는 학습자가 자신이 처해있는 문제 상황이 과거에 형성한 추상적인 수학 개념이나 알고리즘과 어떻게 동형을 이루는지를 유추적으로 파악하는 것과, 기존의 추상적 지식을 현재의 문제 상황으로 전이시키는 것이 포함 되어야 한다.

학습자가 실생활의 구체적 문제를 해결함에 있어서 이미 필요한 추상적 수학개념이 형성되어 있다면 비본질적 요소들을 제거하는 것 또한 의미를 가질 수 있다. 그리고 추상적인 수학 개념을 형성해야 할 학생들에게 과도한 구체성과 맥락의 제공이 오히려 개념 형성을 방해할 소지가 있음 또한 유의하여야 한다.

선행학습 등을 통해 비정상적으로 구성된 추상적 지식을 가지고 있는 학생들이 많은 우리나라의 교육상황을 생각해볼 때 추상적 지식에 대한 구체화의 과정에도 초점을 맞출 필요가 있을 것이다. 그러나 선행학습과 같은 비정규적인 지식습득에 초점을 맞추어 추상적 개념을 먼저 도입하는 것은 물론 논란의 여지가 있다.

본 연구는 구체물의 추상화와 추상적 개념의 구체화 과정에서의 수학적 사고를 비교 분석하였다. 분석 결과 추상적 개념의 구체화 과정에서도 구체물의 추상화 과정만큼 유의미한 수학적 사고를 유도 할 수 있음을 확인할 수 있었다. 본 연구는 특정 학생들을 대상으로 제한적으로 이루어졌기 때문에 다양한 일반 학생들 및 영재아 학습부진아등을 대상으로 다양한 연구가 필요하다. 본 연구를 계기로 추상적 지식의 구체화와 관련한 보다 심화된 후속 연구가 이어지기를 기대한다.

참고문헌

강문봉 외 12인(2005). **초등수학교육의 이해**. 서울: 경문사

김남희(2008). **학교수학과 교구**. 서울: 경문사

송정화 (2010). **상황적 추상화 과정의 고찰: 함수의 변화율을 중심으로 한 사례연구**. 이화여자대학교 박사학위논문.

우정호 (1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판문화원.

이환철, 허난, 장미숙 (2009). 수학적 사고력 신장 측정 방안 마련을 위한 기초 연구. **수학교육학논총 제36집**, 89-102.

임영빈, 류희수 (2011). 선분의 등분할 작도에 나타나는 6학년 영재·일반 학급 학생들의 수학적 사고. **한국초등수학교육학회지 15권** 2호, 247-282.

정동권(2001). 수학교실에서 기하판의 활용 의의와 활용 사례 분석. 대한수학교육학회지 **<학교수학> 제3권** 제2호, 447-473

황혜정(2015). **수학교육학신론**. 서울: 문음사.

片桐重男(1989). **수학적인 생각·태도와 그 지도**. 서울: 경문사 (이용률・성현경・정동권・박영배 공역, 1992)

片桐重男(2004). **수학적인 생각의 구체화와 지도-수학의 진정한 학력 향상을 지향하여-**. 서울: 경문사 (이용률・정동권 공역, 2013)

Dreyfus, T. (2012) Constructing Abstract Mathematical Knowledge in Context. 12th International Congress on Mathematical Education, 8 July - 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education. China lectures. Dordrecht: Kluwer. 우정호・정은실・박교식・유현주・정영옥・이경화 역(2008). 프로이덴탈의 수학교육론. 서울: 경문사

Hoffmann(2006). What is A “Semiotic Perspective”, And What Could it Be? Some Comments on The Contribution to This Special Issue. Educational Studies in Mathematics (2006) 61: 279-291

Kaminski(2008). the Advantage of Abstract Example in Learning Math. [SCIENCE] Vol 320

Kidron, I., & Monaghan, J. (2009). Commentary on the chapters on the construction of knowledge. In B. B. Schwarz [Dreyfus, T. (2012)에서 재인용]

Schunk(2004). Learning Theories: An Educational Perspective. 4/E. 노석준・소효정・오정은・유병민・이동훈・장정아 역(2006). 교육적 관점에서 본 학습이론. 서울: 아카데미프레스

Primary Students' Mathematical Thinking Analysis of Between Abstraction of Concrete Materials and Concretization of Abstract Concepts

Yim, Youngbin (Haeseo Elementary School)
Hong, Jin-Kon (Konkuk University)

In real educational field, there are cases that concrete problematic situations are introduced after abstract concepts are taught on the contrary to process that abstract from concrete contexts. In other words, there are cases that abstract knowledge has to be concreted. Freudenthal expresses this situation to antidogmatical inversion and indicates negative opinion. However, it is open to doubt that every class situation can proceed to abstract that begins from concrete situations or concrete materials. This study has done a comparative analysis in difference of mathematical thinking between a process that builds abstract context after being abstracted from concrete materials and that concretes abstract concepts to concrete situations and attempts to examine educational implication. For this, this study analyzed the mathematical thinking in the abstract process of concrete materials by manipulating AiC analysis tools. Based on the AiC analysis tools, this study analyzed mathematical thinking in the concrete process of abstract concept by using the way this researcher came up with. This study results that these two processes have opposite learning flow each other and significant mathematical thinking can be induced from concrete process of abstract knowledge as well as abstraction of concrete materials.

* Key Words : Mathematical Thinking(수학적 사고), Abstraction(추상화), Concretization(구체화)

논문접수 : 2016. 2. 10
논문수정 : 2016. 3. 7
심사완료 : 2016. 3. 15