대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 1, 85 ~ 103. Mar 2016

초등영재학급을 대상으로 그래핑 계산기의 지오보드를 활용한 Pick 공식의 탐구 과정에서 나타난 논증활동의 분석[1)]

김 진 환[*] · 강 영 란[**]

이 연구는 5학년 영재반 수업에서 TI-73 그래핑 계산기의 지오보드를 사용하여 Pick의 공식을 찾아가는 과정에서 나타난 수업담화로부터 논증과 논증활동의 특성을 알아보고자 하였다. 분석을 위한 자료는 수업 비디오, 음성녹음록, 활동지가 있으며 Toulmin의 논증 도식을 분석의 준거로 사용하였다. 연구 결과 그래핑 계산기의 지오보드는 주어진 조건의 다양한 격자다각형에 대한 넓이를 계산해줌으로써 실험과 관찰의 환경을 조성하고 '자료→주장'의 구성과 이의 정당화를 위한 보증, 지지, 한정어, 반박의 논증활동을 유발시키는 도구적 역할을 하였다. 경계점의 수와 내점의 수로 Pick의 공식을 유도할 때 '집단적 논증'의 방식이 나타났으며 교사는 논증활동을 지휘하는 역할, 지식을 판단하는 권위자의 역할을 하였다.

Ⅰ. 서 론

2015 개정 수학과 교육과정은 창의적 역량을 갖춘 융합 인재로 성장할 수 있는 기반을 제공하기 위하여 주요 핵심역량을 강조하고 있으며 의사소통과 추론은 이 역량 내에 포함되어 있다(교육부, 2015). 교육과정에서 제시하는 이러한 역량들의 실천은 수학 수업에서 우선적으로 제고해야 할 권고사항이다. 이 때 수업담화는 이에 대한 실재를 살펴볼 수 있는 좋은 자료로(Kieran, Forman, & Sfard 2001; Lampert & Cobb 2003), 수업담화의 분석을 통해 교육과정에서 강조하는 의사소통과 추론 활동의 실천 정도, 의사소통 과정에서 드러나는 담화의 개선 방안, 그리고 학습 경로를 추적할 수 있다.

최근 과학교육에서는 학생들의 실험·관찰과 직접 탐구하는 과정에서 얻은 자료를 근거로 현상의 발생 과정이나 원리를 설명하고 정당화하는 의사소통과 추론을 강조하는 연구가 많이 이루어지고 있으며 이에 논증(argument)과 논증활동(argumentation)에 대한 중요성이 제기되고 있다(맹승호, 박영신, 김찬종, 2013). 공학이나 다양한 교구들이 점차 학교수학에 도입되면서 실험과 관찰이 강조되고 있으며 의사소통과 추론을 토대로 추측하기라는 수학적 활동이 중시되는 점에서 볼 때 수학교육에서도 논증활동은 고려해볼만한 가치가 있다.

논증활동에 대한 논의는 Toulmin (2003/2006)의 논증 모델을 중심으로 이루어지고 있다. Toulmin의 논증 모델에는 '주장', '자료', '보증', '지지', '반박', '한정어'의 6개 요소가 있으며 Toulmin은

* 영남대학교 kimjh@ynu.ac.kr (제1 저자)
** 효자초등학교 yr3027@hanmail.net (교신저자)
1) 이 연구는 2015년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

형식적 논리에만 집착하는 논리적 타당성보다 의미론적 내용과 이에 적합한 구조를 옹호하고 일상생활을 포함한 다양한 영역에 적용할 수 있는 일반적인 도식을 제공하고 있다. 2015 개정 수학과 교육과정에서도 추측, 정당화의 활동, 추론 능력을 일상생활에서 적용할 수 있도록 권장하고 있으며 이는 Toulmin에 의해 주창된 논증 활동과 밀접한 관련이 있다.

한편, 국내의 수학교육에서는 논증활동에 대한 연구가 많이 이루어지지 않은 편이다. Toulmin의 논증 모델이나 '한정어'와 '반박'을 제외한 수정된 Krummheuer의 논증 모델에 관련된 선행연구가 세 편 있었다(강현영, 송은경, 조진우, 이경화, 2011; 김민주, 권오남, 2006; 이윤경, 2016). 강현영, 송은경, 조진우, 이경화(2011)는 통계적 논증에 따른 의사소통이 일어나도록 하는 과제의 개발을 중시하였고, 김민주, 권오남(2006)은 중학생을 대상으로 사회적 상호작용의 탐구 지향적 학습을 지향하는 패턴 찾기 과제의 분석 과정에서 나타나는 학생들의 논증 구조의 유형을 찾았다. 이윤경(2016)은 고등학교 확률 수업의 '몬티홀 문제' 과제 맥락에서 일반화하는 과정에 나타난 논증 과정과 수학 캠프에서 '큰 수의 법칙'을 소재로 가추법을 Toulmin의 논증 모델로 분석하면서 통계적 추론에 대한 시사점을 찾았다. 이 세 논문들은 중·고등학생들을 대상으로 이루어진 연구로 그 결과를 통해 논증을 불러 일으킬만한 가능성이 있는 맥락을 가진 과제의 선택이 중요하다는 점을 알 수 있었다. 지금까지 초등학생을 대상으로 한 논증 연구는 이루어지지 않았고, 선행연구에서 도출된 바와 같이 초등학생들을 대상으로 과제 맥락이 귀납적 발견에 의한 생산적인 논증의 기회를 제공해줄 수 있는 과제를 제공한다면 초등학생들을 대상으로 하는 논증 담화가 가능할 것이라 여겨진다. 박교식(2007)에 따르면 Pick의 공식은 정수쌍을 꼭짓점으로 가지는 좌표평면 위의 단순다각형의 넓이를 구하는 간결하면서도 고상한 공식으로 초등학교 고학년을 대상으로 귀납적 발견을 위한 소재로 도입가능성을 논의한 바에 있어 본 연구에서는 이를 과제 맥락으로 선정하였다.

이에 본 연구에서는 Y초등학교 5학년 영재학급 학생들을 대상으로 TI-73 그래핑 계산기의 지오보드를 활용하여 Pick의 공식을 찾아가는 학습 과정에서 일어난 담화를 토대로 논증과 논증활동의 특성을 분석해보고자 한다. 이 연구를 바탕으로 논증과 논증활동의 중요성을 인식하고 수학교육이 추구하는 역량 강화에 도움이 되는 교수・학습을 설계하는데 도움을 주고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 논증활동과 Toulmin의 논증 도식

가. 논증(argument)과 논증활동(argumentation)

이 논문에서는 argument와 argumentation을 다룬 수학교육에 관련된 선행연구(강현영, 송은경, 조진우, 이경화, 2011; 김민주, 권오남, 2006; 이윤경, 2016)처럼 argument를 논증, argumentation을 논증활동으로 번역하여 사용한다. argument와 argumentation이 국내의 여러 문헌이나 연구에서 사용되고 있으며 논증이나 논증활동 뿐 아니라 논변, 논의, 논변활동, 논의활동이라는 용어로 사용되고 있다(강남화, 이은경, 2013). 여기서 논증(argument)은 수학에서 흔히 쓰는 논리적 증명(logical proof)을 의미하는 것은 아니다. 논증에 대한 이해는 그것이 발달한 계기에서 잘 드러난다.

논증의 시작은 오랫동안 형식논리학에서 배제되었던 Aristotles의 수사학으로 간주되고 있다. 20세기 이후 비형식적 논리 즉, 일상에서 사용되

는 논리에 관한 이해의 중요성이 증가하면서 논증활동 이론(argumentation theory)이 생겨났으며, Van Eemeren은 이 이론의 출발점을 1958년에 출간된 Toulmin의 argument에 관한 책[2])으로 보았다(강남화, 이은경, 2013 재인용). Toulmin은 형식논리학을 배격하고 증거나 근거에 기초한 추론으로부터 주장을 정당화하는 것을 논증으로 보았으며 일상에서 사람들이 주장을 어떻게 정당화하는가의 문제로부터 논증 구조를 분석하였다(Toulmin, 2003/2006). 논증활동 이론이 발달하면서 논증에 관련된 활동 과정을 포괄하여 논증활동의 용어가 사용되기 시작했다. 이 활동 과정에서 활동의 내용이 되는 하나의 논리로 연결된 내용 부분들은 논증들(arguments)이 된다.

논증과 논증활동에 대한 정의도 다양하다. 강남화, 이은경(2013)은 과학교육을 중심으로 선행연구를 총괄하여 논증과 논증활동의 개념을 명료화한 바 있다. Toulmin의 논증이론을 수학교육에 처음 적용한 Krummheuer(1995)는 논증을 다음과 같이 정의하고 있다:

> 모든 참여자들에 수용된 최종 일련의 진술문들을 논증(argument)이라 할 것이다. 이 진술문들은 참여자들이나 관찰자에 의해 다소간 완전하게 재구성될 수 있다(p. 247).

또한 Krummheuer는 논증활동은 전통적으로는 청중들을 확신시키고자 하는 개인과 개인에 의해 수행되는 내적인 과정이기도 하여 개개인들로 구성된 집단에 의해 성취되는 논증활동을 '집단적 논증활동(collective argumentation)'이라 기술하였다.

본 연구에서는 강남화, 이은경(2013)과 Krummheuer (1995)의 정의를 토대로 논증을 논증활동에 포함된 특수한 하위 구조나 논증활동에서 참여자들에 의해 합의되어 수용된 내용이나 결과로 정의하고자 한다. 이 논증은 참여자들에 의해 재구성될 수 있으며 논증활동은 개인적 또는 사회적으로 증거나 근거에 기초하여 추측이나 주장에 대한 설득, 그리고 정당화의 전체 과정이라 하겠다. 간단히 말하면, 논증활동은 과정, 논증은 활동 과정의 산물이라 할 수 있다. 수학에서는 표, 그림, 수식이 언어적 표현에 포함되기 때문에 논증과 논증활동에 수식 및 시각적 표현을 포함시키고자 한다.

나. Toulmin의 논증 도식

Toulmin의 논증 도식은 6개의 요소, 즉 주장(Claim), 자료(Data), 보증(Warrant), 지지(Backing), 한정어(Qualifier), 반박(Rebuttal)으로 구성되어 있다.

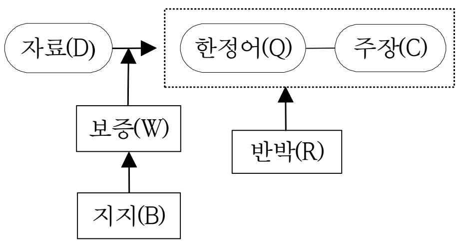
- 주장(Claim): 입증하고자 하는 주요 관점 혹은 입장으로, 잠정적 결론(conclusion), 추측(conjecture) 등을 나타낸다. 여기서 주장은 추측이나 잠정적 결론과 동일시하고 혼용하여 사용한다.
- 자료(Date): 주장에 대한 우선적인 이유들로 근거(grounds), 증거(evidence), 사실(fact), 정보(information) 등을 나타낸다.
- 보증(Warrant): 제시된 자료에 기초하여 어떻게 주장에 이르게 되었는지 주장 간의 연결을 정당화하는 것으로 수용된 자료와 주장을 논리적 혹은 정신적으로 연결하는 기능을 한다. 보증의 유형은 논증 목적이나 유형에 따라 분류될 수 있는데, 권위자(가령, 수업에서 교사, 계산기 등)의 행위에 의한 권위적 보증

2) 이러한 논증활동 이론(argumentation theory)를 창시한 Toulmin의 저서 'The use of argument'(1958년에 초판, 2003년 개정판)를 국내에서 '논변의 사용'(고현범, 임건태 역, 2006년 번역)이라 하였다. 이 책은 'Toulmin의 anti-logic 책' 이라 불리기도 하며, 형식적 논리와는 구별하고자 했으며 '비형식적 논리'로 알려지게 되었다.

(authoritative warrant), 주장을 지지하는 청중의 확신, 미덕, 가치 등의 호소에 의존하는 동기적 보증(motivational warrants), 그리고 자료와 주장에 내포되어 있는 암묵적 혹은 명시적인 가정, 추론 규칙, 정의, 유추, 기본 원리에 의존하는 논리적 추론의 전통적 형식이나 예에 기초한 일반화에 의존하는 실제적인 보증(substantive warrants)이 있다.

- 지지(Backing): 보증을 지원하는 것으로 더 많은 증거를 제시한다. 논증에서는 논증되고 있는 주요 관점인 주장을 필연적으로 증명할 필요는 없지만 보증이 참이라는 것을 입증하여야 한다. 지지는 통계, 사례, 증언 등 하나 그 이상의 조합으로 구성될 수 있다.
- 한정어(Qualifier): 논증의 확실성 정도, 논증의 힘을 제한하는 서술어, 논증이 참이 되게 하는 조건들을 제안하는 서술어로 결론으로서 자격을 부여한다.
- 반박(Rebuttal): 논증을 반박하는 이유를 진술하거나 주장이 성립하지 않는다는 조건들을 진술하여 잠정적으로 반박한다.

이들 6개의 요소들이 함께 연결된 Toulmin의 논증 도식은 [그림 II-1]과 같다.



[그림 II-1] Toulmin의 논증 도식

주어진 논증에서 이러한 범주들이 서로 간에 배타적이지 않고 상당히 중첩되는 부분이 있으며 필연적이고 명시적으로 언어화되지 않을 수도 있다(Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson, 2007). Toulmin의 논증 모델을 사용하는 과학교육의 연구들(Duschl, 2008; Kelly et al., 2008)에서도 '자료와 보증', '보증과 지지'를 구분하기 쉽지 않다고 지적한 바 있다(맹승호, 박영신, 김찬종, 2013 재인용).

Krummheuer(1995)은 교실에 기반한 수학적 논증들을 분석하는데 Toulmin의 논증 도식을 수학교육 분야에 처음으로 적용했다. 그러나 그는 원래의 도식에서 '한정어'와 '반박'을 생략하고 축소 개정하여 수학에 적용했다. 그는 이 두 요소를 수학적 논증과는 관계가 없는 것으로 보았던 것이다. 이후 여러 수학 교육 연구들(Evens & Houssart, 2004; Hoyles & Kuchemann, 2002; Knipping, 2003; Pedemonte, 2007; Weber & Alcock, 2005; Yackel, 2001)은 Krummheuer의 모델을 사용하였다. 그러나 Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson(2007)는 Krummheuer의 축소된 개정 모델이 Krummheuer가 원하는 수준에 맞추어 수학 교실 에피소드들을 분석하는데 충분할지는 모르나 논증활동의 재구성을 목적으로 하는 개념의 틀로는 적절하지 않다고 보았다. 이에 '한정어'의 역할을 강조하면서 Toulmin의 6개의 요소를 포함한 도식을 논증활동에 활용할 것을 권고하였다. Erduran, Simon & Osborne(2004)도 논증의 구성 요소가 많이 포함될수록 복잡하고 정교한 논증사례를 보여준다고 하였다. 따라서 논증 담화의 상황에 따라 잘 드러나지 않는 논증의 구성요소가 있을 수 있지만 본 연구에서는 Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson(2007)의 권고에 따라 Toulmin의 논증 도식을 사용하고자 한다.

2. Pick의 공식

초등학교에서 다루는 대표적인 평면도형은 다각형과 원이다. 학교수학에서 다각형은 어떤 구

멍(hole)도 가지지 않고 모서리들이 교차하지 않는 닫혀있는 단순(simple) 다각형으로 한정한다. 오스트리아 수학자 Pick은 1899년 꼭짓점이 격자들 위에 있는 격자다각형(lattice polygon)의 내부(간단하게, 격자다각형) 넓이를 경계선 즉 모서리 상에 있는 점(경계점)들의 수와 다각형 내부에 있는 점(내점 혹은 내부점)들의 수를 이용한 Pick의 공식을 얻었다: A를 단순 격자다각형의 넓이라 하고, i를 이 격자다각형의 내점의 수, b를 격자다각형의 경계점의 수라 하면

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

이 성립한다.

이 Pick의 공식(혹은 정리)는 진술이 쉽고 간편하며 경계점과 내점을 세기만 하면 되기 때문에 적용하기가 용이하고 삼각형, 사각형뿐 아니라 모든 다각형에 적용된다는 점에서 초등 수학에서 다루어질 수 있다.

3. TI-73 그래핑 계산기와 지오보드

2015 개정 수학과 교육과정은 이전 교육과정에 연속하여 계산 능력과 무관한 복잡한 계산의 수행, 수학적 개념과 원리의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 수학용 소프트웨어 등의 공학 도구 및 다양한 교구의 활용을 권장하고 있다(교육부, 2015). 여러 교구 중 그래핑 계산기는 사고를 증진시키고 학생들로 하여금 문제해결자로서의 자질과 유연성을 가지는 데 도움을 줄 수 있는 유용한 도구(Campbell & Stewart, 1993; Ellington, 2003; Hembree & Dessart, 1992; Stiff, 2001)로 학생들의 성취와 성향에 영향(Van Devender & Rice, 1984; Williams, 1987)을 주고 일반화 능력 및 추론 능력(Charles, 1999)에도 도움을 준다(강영란, 2015 재인용). 특히 그래핑 계산기는 탐구 중심의 수학 수업을 가능하게 하고 사회적 상호작용을 풍부하게 할 수 있는 잠재력을 가지고 있다(Trouche, 2005).

지오보드는 영국의 수학 교육학자인 Gattegno (1911-1988)에 의해 초등기하를 가르치기 위한 조작적 도구로 개발되었다. 수학에서 다양한 도형의 넓이를 계산하는데 사용될 수 있으며, 학습 도구로서 지식의 확장을 유용하게 하는 인지적 비계로 사용될 수 있다(Scandrett, 2008, 재인용). 본 연구에서 사용되는 그래핑 계산기에는 지오보드가 설치되어 격자다각형 그리기와 이 다각형의 넓이를 계산해 주는 기능을 지니고 있다. 따라서 본 연구에서는 영재 학생들을 대상으로 Pick 공식의 유도 과정을 탐구하는데 Texas Instruments에서 개발한 초등학교 고학년용 계산기인 TI-73 그래핑 계산기의 지오보드를 활용하고자 한다. Pick의 공식을 구하는 과정에서 사용되는 계산기에 내재된 지오보드의 활용법은 <부록 1>의 활동지에 5단계로 정리하였다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 참여자

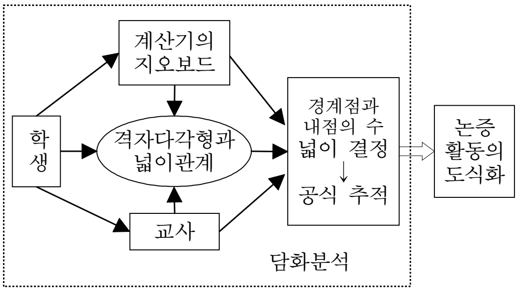
본 연구는 TI-73 그래핑 계산기를 활용한 Pick 공식(정리)를 구성하는 과정에서 나타난 논증활동을 분석하기 위하여 포항시에 소재하는 Y초등학교 5학년 수학영재학급 학생들을 대상으로 하였다. 한 학급에 20명(남학생 13명, 여학생 7명)의 학생이 있었으며 학생들은 영재 시험에서 선발된 집단이었다. 영재학급 대부분의 학생들은 평균적인 사회 경제적 배경을 가지고 있었으며, 특히 초등학교가 대학에 인접하여 학부모의 교육열이 높은 편이었다. 학생들은 모두 개인용 TI-73 그래핑 계산기를 소지하고 있었으며 이전의 수업을 통해 계산기 조작에 대해 친숙한 상

태였다. 교사는 40세의 여자로 교육경력이 16년인 초등교사이며 Y초등학교에서 TI-73 그래핑 계산기를 이용하여 영재반을 지도하고 있었다.

2. 자료 수집과 분석 방법

본 연구의 주 자료는 2014년 5월 14일 이루어진 수업의 자료이다. 이 수업은 비디오 카메라 2대로 100분간 녹화하였다. 비디오 카메라 한 대는 교실 뒤에 고정시켜 100분간 교사와 학생 전체가 나오도록 하였고, 또 다른 한 대의 비디오 카메라는 의사소통이 활발한 소집단을 선정하여 소집단 내에서 일어나는 상호작용을 녹화하였다. 또한 O.C. (observer's comment)에 수업에서의 느낌, 의문 등을 추가하여 현장조사록을 작성하였다. 학생들이 작성한 탐구 활동 자료와 학생들의 계산기 화면은 보조 자료로 사용하였다. 이 비디오 자료를 녹취록으로 작성하였고 Pick 공식의 구성 과정과 관련되는 논증 담화들을 에피소드로 발췌하였다.

수집된 자료를 참고로 하고 수업담화의 에피소드를 중심으로 하여 Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson(2007)의 권고에 따라 Toulmin의 논증 도식을 적용하여 논증활동을 분석하였다. 이 연구의 분석 과정은 [그림 III-1]과 같이 구조화될 수 있다.



[그림 III-1] 계산기를 매개로 Pick 공식을 유발하는 논증활동 분석의 틀

<표 III-1> Pick의 공식을 찾는 수업 내용 및 절

학습 조직	교수 · 학습 활동	자료(□) 유의점(※)
전체	◉ 도형에 대한 넓이를 구하는 방법 상기하기 - 격자점의 개수를 이용하여 도형의 넓이를 구하기	
소집단 활동 및 전체 토론 병행	◉ 계산기 기능과 지오보드 활용 절차 익히기	□계산기
	◉ 격자점의 수와 넓이 사이의 관계 관찰과 추측하기 - 동일한 격자점 수를 가진 다양한 모양을 지오보드에 나타내기 - 활동을 통해 동일한 격자점인 경우 넓이가 찾고 비교하기 - 격자점과 넓이 간의 관계 추측하기 ◉ 격자점의 수와 넓이 사이의 관계로서 공식 추측하기 - 경계선 위의 점의 수는 1씩 변화하고, 내부의 점의 수가 0일 때 넓이 관찰하기와 패턴 찾기 - 경계선 위의 점의 수는 1씩 변화하고, 내부의 점의 수가 2일 때 넓이 관찰하기와 패턴 찾기 - 경계선 위의 점의 수, 내부의 점의 수, 넓이 사이의 관계를 가지고 공식 추측하기 ◉ 공식의 유용성 보기 - 2인 1조로 한 명은 지오보드로 한 명은 찾은 공식으로 문제를 해결하기	※지오보드에 그리고, 넓이를 측정하는 키에 익숙해 질 수 있도록 한 후 활동을 한다.
개별	◉ Pick 공식(정리)를 적용하여 넓이 구하기 - 다양한 다각형, 손바닥 모양 본떠 넓이 구하기	

3. 수업 내용 및 절차

100분 동안 이루어진 TI-73 그래핑 계산기를 활용한 Pick의 공식에 대한 수업 내용 및 절차는 <표 III-1>과 같다. 학생들은 <부록 1>의 활동지를 이용하여 Pick의 공식을 탐구하였다.

Ⅳ. 연구결과

본 연구는 초등 영재 학생들이 Pick의 공식을 찾아가는 단계적 과정을 담화분석의 초점으로 삼았고 이를 통해 논증활동이 어떻게 일어나는지 그 특성을 알아보았다. 수업담화 중 논증과 관련된 의미가 있다고 판단되는 담화만을 추출하여 간략하게 편집하여 에피소드를 구성하였고 이를 Toulmin의 논증 도식으로 분석한 결과는 다음과 같다.

1. 격자다각형의 경계점과 내점의 수가 넓이를 결정

교사는 우선적으로 계산기 환경의 지오보드에 주어진 격자다각형에서 경계점 수와 내점 수가 이 도형의 넓이에 어떤 영향을 미치는지 학생에게 잠정적 결론을 내리도록 하였다. 이러한 논증활동은 2절에서 다루게 될 Pick의 공식을 유도하는데 자연스런 동기를 제공해주었다.

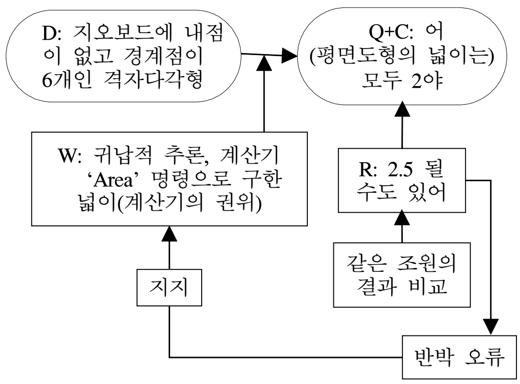
가. 내점이 없고 경계점이 6개인 격자다각형의 넓이에 대한 논증활동

교사는 경계점이 6개이고 내점이 없는 격자다각형 2개를 활동지에 제시하였고 이것을 TI-73 그래핑 계산기의 6×6 지오보드에 그려 ‘Area’ 명령을 사용하여 이 도형의 넓이를 구하도록 하였다.

<에피소드 1> 영광-한솔 조의 내점이 없고 경계점이 6개인 격자다각형 넓이 탐구

영광: 2.0. 2.0, 어 모두 2다.
한솔: 난 2.5000도 나왔는데?
영광: 넓이가... 2.5 될 수도 있어.
[영광, 한솔은 잘못된 부분을 찾지 않고 교사에게 잘못된 부분을 수정해줄 것을 요구한다.]
교사: 점이 일곱 개인데... 점이 일곱 개잖아. 그치?
한솔: 하나 더 그려봐야겠어. 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯, 여섯
한솔: 어 이것도 2.0. 이래 그렸는데도 2.0이야. 이건 마술이야.

위의 <에피소드 1>에서 나타난 논증활동은 [그림 IV-1]과 같은 논증 도식으로 표현될 수 있다.



[그림 VI-1] 영광-한솔 조에서 일어난 기초 논증

영광의 입장에서 자료(D)는 경계점이 6개, 내점이 없는 4개의 격자다각형이다. 이러한 격자다각형을 그리고 TI-73 그래핑 계산기의 넓이 구하기 명령으로 얻은 값이 모두 같다는 관찰을 토대로 귀납적 추론을 보증(W)으로 하였고 이들 다각형의 넓이가 2일 것이라는 주장(C)을 한다. 그러나 한솔은 이 주장에 대해 2.5가 될 수 있다는 반박(R)을 하였다. 선생님에 의해 한솔의 반박은 오류로 드러나면서 추론으로서 보증은 지

지(B)를 받아 주장의 신뢰 정도를 높였다. 이 논증 도식에서 특이한 점은 TI-73 그래핑 계산기의 기능에 의존하여 격자다각형의 넓이를 구하고 그 결과를 보증으로 사용하는 것이다. 이것은 '공학의 권위적 보증'이라 할 수 있겠다.

다음 <에피소드 2>, <에피소드 3>은 다른 조에서 나타난 에피소드로 <에피소드 1>과 논증활동이 유사하지만 반박이 없고 한정어가 잘 드러난 논증 담화이다.

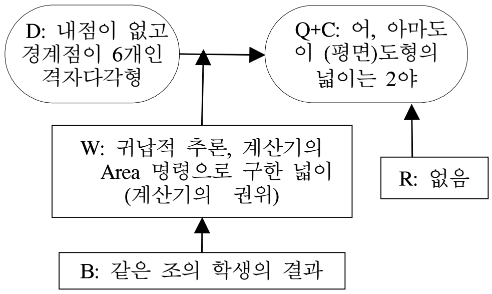
<에피소드 2> 지윤-지연 조의 내부점이 없고 경계점이 6개인 격자다각형 넓이 탐구

지윤: 아! 2.0 아무리 0이 붙어도 2는 2라구.
지연: 이것도 2야. 야! 이거 점이 6개면 다 2 같은데?
지연: 그러니까 점이 여섯 개면 똑같은가?
지연: 너는 어떻게 그렸니?
지연: 여기 그린 거. 됐어?
지윤: 넌 어떻게 그렸니?
지연: 평행사변형 그렸어.

<에피소드 3> 수진-준형 조의 내부점이 없고 경계점이 6개인 격자다각형 넓이 탐구

수진: 다 그렸어?
준형: 아니, 아직. 이건데... 점이 6개여야 해.
수진: 이것도 2 나온다.
준형: 맞지? 아마도... 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯, 여섯, 여기에 또 점이 있네. 안 될 것 같은데... 어, 이거 2 나왔어?
수진: 어.
준형: 나도 해 봐야지. 2. 넌 뭔데?
수진: 2

위의 <에피소드 2>와 <에피소드 3>에서 나타나는 논증활동은 [그림 IV-2]와 같은 논증 도식으로 표현할 수 있다.



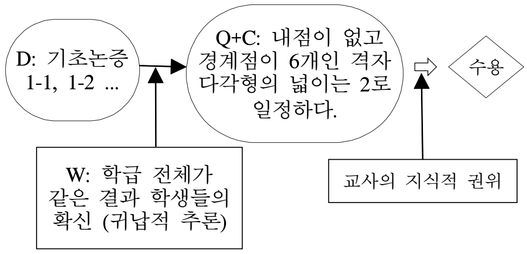
[그림 IV-2] 지윤-지연 조와 수진-준형 조에서 일어난 기초 논증

'6개이면 똑같은가?'라는 반의적 질문성 추측인 주장(C)에는 '아마도'와 같은 암묵적인 한정어(Q)가 내재되어 있다. 귀납적 추론이 보증된 이 주장에 대해 불확실성을 줄이고 신뢰성을 높이고자 친구가 그린 도형의 모양이 무엇인지를 알아보려 하였고 자료로부터 주장을 정당화하려고 하였다. 즉 친구가 그린 다각형이 자기가 그린 다각형과 차이가 있는지를 살펴보면서 임의성을 주어 다각형의 모양은 넓이에 영향을 주지 않는다는 것을 확인하려 했다. 수진-준형 조에서도 '어'나 '아마도'라는 한정어(Q)를 사용하였지만 다른 조원과 비교하며 넓이가 2라는 것에 대한 확신을 높이고 있다. 하지만 학생들은 TI-73 그래핑 계산기로 계산한 넓이가 2.5000을 2.5로 보았듯이 2.0, 2.00, 2.000...으로 표현된 것을 두고 특별한 이유[3]가 있는지를 묻기보다는 모두 다 '2와 같은 것이다'라고 스스로 판단하거나 묵인하면서 '암묵적 결정'이 이루어지고 있음을 볼 수 있었다.

위의 논증들에서 알 수 있듯이, TI-73 그래핑 계산기의 지오보드에 경계점이 6개이고 내점이 없는 격자다각형의 넓이를 2로 추측하였고 다른 조원들과 결과를 의논하면서 학급 전원이 2라는 주장을 확고히 하였다. 이러한 학생들의 논증을

3) 계산기의 소수에 대한 표현 방법으로 유효숫자와 관계된 것이다. 그러나 이 내용은 초등학교 수학의 범위를 벗어난다.

근거로 교사는 이를 넓이로 확정하였다. 이것은 [그림 IV-3]과 같은 핵심 요소로 구성된 간편한 자료(D)-보증(W)-주장(C)형의 논증 도식으로 나타났다. 이 논증은 각 조에서 이루어진 논증들을 종합하여 얻은 것으로 그 주장은 더욱 강력하여 반박(R)이 나타나지 않았다. 그러나 여전히 수학적으로 증명되어진 것은 아니다.



[그림 IV-3] 기초 논증들을 종합하여 주장의 확실성을 높인 종합 논증 1

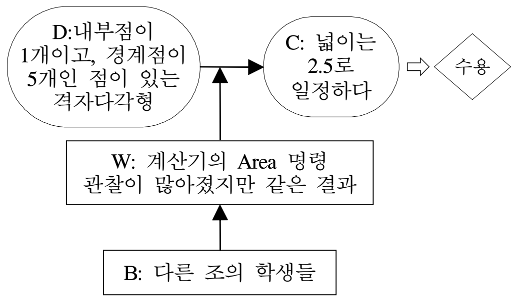
나. 내점이 1개이고 경계점이 5개인 격자다각형의 넓이에 대한 논증활동

경계점이 5개이고 내점이 1개인 격자다각형을 계산기의 지오보드에 옮겨 그려 넓이를 ‘Area’ 명령으로 구하도록 하였고, 이 조건의 격자다각형을 2개씩 그리도록 하여 넓이를 계산하고 비교하였다.

<에피소드 4> 내부점이 1개이고 경계점이 5개인 격자다각형 넓이 탐구

보성: 경계선에 있는 것은 전부다... 2.5인 것 같애.
재훈: 어. 맞아. 점이 이렇게... 2.5
보성: 재훈아 이번엔 우리 다른 걸로 하자.
보성: 봐봐. 경계선에 5개지? 내부의 점을 이렇게 하니까 2.5가 나와. 다 2.5 나와.
수진: 몇 나왔어?
준형: 2.5 .....

<에피소드 4>에서 짐작할 수 있듯이 경계점이 5개이고 내부점이 1개인 격자다각형의 넓이를 결정하는 과정의 논증활동은 연구결과 1절 ‘가’와 거의 동일하게 나타났다. 다시 말해 [그림 IV-4]의 논증 도식처럼 각 조의 논증 활동을 종합한 논증을 근거로 교사는 2.5를 넓이의 값으로 수용토록 확증하였다.



[그림 IV-4] 기초 논증들을 종합하여 주장의 확실성을 높인 종합 논증 2

그러나 1절 ‘가’와 논증활동이 유사함에도 논증 도식이 달리 표현되었다. 이는 자료, 보증, 지지 간의 경계가 구분되어 획일적으로 나타나지 않았기 때문이다(맹승호, 박영신, 김찬종, 2013).

‘가’와 ‘나’에서 그래핑 계산기는 풍부한 자료를 생성해 줌으로써 주장, 반박과 오류의 생성, 오류 개선에도 도움을 주며 논증활동을 활성화하는 도구의 역할을 했다. 예를 들어 주어진 경계점과 내점의 수를 기초로 격자다각형을 그리고 ‘Area’ 명령으로 용이하게 넓이를 구하도록 하였다. 또 이에 따라 격자다각형의 경계점과 내점의 수의 관계로 다각형의 넓이를 구하도록 하는 귀납적 논증의 단초를 제공하였다.

다. 집단적 논증활동을 통한 일반화된 논증

교사는 경계점의 수가 6개이고 내점이 없는 경우와 경계점의 수가 5개이고 내점이 1개인 경우로부터 경계점과 넓이의 관계를 상기시켰다.

이들 활동을 통해 알게 된 종합 논증들과 이를 토대로 한 일반화의 추론 규칙의 적용을 보증(W)으로 하여 집단적 논증 활동을 통해 일반화된 결과를 주장하도록 유도하였다.

<에피소드 5> 다각형의 경계점의 수와 넓이 사이의 관계

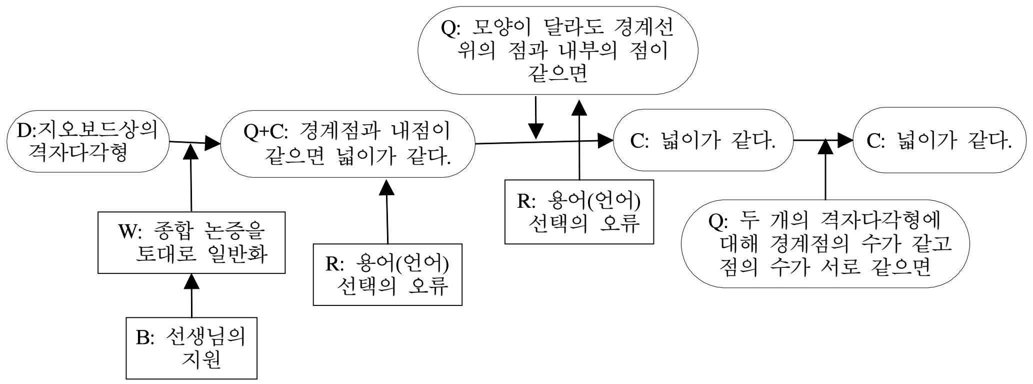
교사: 알게 된 점도 적어보세요.
준형: 경계선에
수진: 경계선에 6개 있으면 항상 넓이가 2가 나오고, 경계선에 5개 있고, 내부에 1이 있으면 2.5가 나온다. 이래 쓸라하재?
교사: 2.5로 나왔죠? 맞습니까? 그런데 하나 놀라운 것은 애를 마지막에 이 활동을 통해서 알게 됐을 때, 대부분의 친구들이 잘 찾았지만. 이거 발표해 볼 사람?
수연: 경계선에 있는 점의 수와 내부에 있는 점의 수가...
교사: 말 끝에 조금 흐려졌지만 뭐라고 했냐하면 경계선에 있는 점의 개수랑 내부에 있는 점의 개수가 어떠면? 같으면 넓이가 같다 맞아요?
학생들: 네
교사: 경계선에 있는 점의 수랑 내부에 있는 점의 개수가 같으면...
상원: 모양이 달라도 경계선 위의 점과 내부의 점이 같으면 넓이가 같다.
교사: 그렇지. '모양이 달라도'라는 여섯 글자가 들어가면 더욱 정확해지는 거야. 모양이 이렇게 달라져도 아무리 모양이 달라도 아까도 모양이 다른 게 있었지?
교사: 무슨 말인지 모르겠어요?
한솔: 아니. 한 도형에서요. 경계점의 수와 내부의 점의 수가 같다는 건지...

이 <에피소드 5>를 토대로 구성한 논증 도식은 [그림 IV-5]와 같다.

자료(D)는 '계산기의 지오보드상의 격자다각형'이고, 주장(C)은 '격자다각형의 넓이가 같다'이며, 여기에 한정어(Q)는 '경계점과 내점에 관한 조건'이 된다. 가장 두드러진 점은 주장의 확실성 혹은 진실성에 작용하는 한정어(Q)를 명확하게 한다는 점이다. 또 교사와 학생들 간의 논의가 자유스럽게 이루어지는 동안 학생들은 교사의 생각을 넘어 한정어(Q)에 대한 보다 정교화된 진술로 발전시키고 있다. 이는 수학적 정리를 명확하게 구성하는 과정이고 경계점과 넓이에 대한 관계를 내면화하고 있음을 알 수 있었다.

2. 경계점과 내점에 의한 넓이 공식 추적

1절의 단계에서 학생들의 상호작용에 의해 얻어진 주장인 '격자다각형의 경계점의 수와 내점의 수가 넓이를 결정한다.'는 것을 학생들이 수용하였다. 이를 토대로 경계점의 수와 넓이와의



[그림 IV-5] 격자다각형의 경계점과 내점 수에 의한 넓이를 찾는 논증

관계를 찾아 Pick의 공식을 만드는 과정이 다음 두 단계에 따라 진행되었다.

가. 내점이 없고 경계점의 수가 변하는 경우의 격자다각형의 넓이 공식 논증

교사는 <부록 1>의 7번 문제를 TI-73 그래핑 계산기의 지오보드에 주어진 조건에 맞는 도형으로 그려서 그 넓이를 구하도록 하였다. 학생들은 격자다각형의 모양에 관계없이 다각형을 그려 'Area' 명령으로 넓이를 계산하였다. 이것은 학생들이 넓이를 결정하는데 격자도형의 모양보다는 내점이나 경계점의 수가 중요한 영향을 준다는 사실을 인식하고 있음을 보여준다. 그리고 교사는 직사각형의 넓이 구하는 공식을 가지고 식에 대해 설명하고서 지금까지 탐구한 결과를 토대로 경계점의 수와 넓이 사이의 관계식을 만들어 보도록 하였다.

<에피소드 6> 내점이 없고 경계점 수가 변할 때 격자다각형 넓이 공식 탐구

교사: 예를 들면 경계선에 있는 점과 내부에 있는 점을 이용하라고 되어 있죠? 그러니까 가로, 세로라는 말 대신에 경계선에 있는 점의 수 또는 내부에 있는 점의 수. 이런 말을 넣고 연산 기호를 넣어서 만드는 게 식이라고 해요. 그걸 구해야 돼. 문장으로 하는 게 아니고. 자, 혹시 했는 친구? 자 보자. 요렇게 하는 거

학생들: 어, 어, 어. 0.5씩 늘어나는데?

재훈: 그러면 경계선 위의 점 수 곱하기 0.5 = 넓이 됐어. 예스

보성: 그런데 0.5*4 했는데 갑자기 2가 나와?

한솔: 뭐라고 적었어?

영광: (경계선 위의 수-2)*0.5

한솔: [계산을 해 보더니] 어, 맞네. 똑똑한데

정탁: 경계선 위의 점의 수를 2로 나누고 빼기 1

현비: 경계선 위의 점의 수 나누기 2 빼기 1

교사: 아 이번에는 나누기를 먼저 하고 빼기 1을 한다? 이거 맞나?

교사: 6을 넣어볼래요? 모두 맞는지...

수연: 경계선 위에 점의 수 곱하기 5 빼기 10 곱하기 0.1

교사: 아, 이 전체를 곱하기 0.5한다?

승아: 0.1이요.

상원: 0.5가 아니라 0.1이요.

교사: 어떻게 이런 식을 만들었는지 해볼까요? 6을 넣었어.

학생들: 30

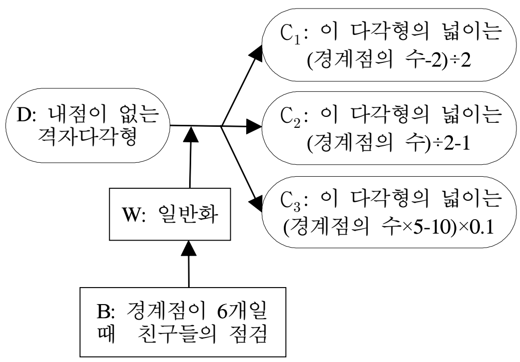
교사: 30이죠? 이번에 이건 20이죠? 0.1을 곱하니까 뭐야?

학생들: 2

학생들: 맞기는 맞는데~

교사: 그러면 여러분이 만든 이 공식 세 개 중에, 이 공식 세 개 중에서 무엇이 정말로 정답인지 찾아보세요.

위 <에피소드 6>의 담화는 [그림 IV-6]과 같은 논증 도식으로 나타낼 수 있다.



[그림 IV-6] 내점이 없는 격자다각형의 넓이 공식 추적에 대한 논증

학생들은 각기 경계점의 수와 넓이 간의 관계를 찾으려고 시도했다. 한 학생이 경계선 위의 점이 1개씩 늘어날수록 넓이가 '0.5씩 커진다.'는 것을 보증(W)으로 넓이가 (경계점의 수)×0.5라고 주장하였다. 그러나 다른 조원이 경계점의 수가 4인 경우 실제 넓이는 1인데 공식에 적용한 값인 2와 맞지 않다는 반례에 의한 반박(R)으로 이

주장은 파기되었다. 학생들은 시행착오를 통해 관계식을 찾아가는 동안 조원의 점검을 받거나 스스로 점검을 했을 것으로 짐작되는 공식을 발표했다. 이 담화에서 나타난 공식은 [그림 IV-6]과 같이 세 가지로 압축되었다.

(경계점의 수 – 2) ÷ 2
(경계점의 수) ÷ 2 - 1
(경계점의 수 × 5 – 10) × 0.1

교사는 이 세 주장의 근거는 일반화의 보증(W)이며 이 주장에 대한 지지 혹은 반박을 알아보고자 경계점의 수가 6개인 경우에 대해 넓이와 공식에 적용한 결과를 비교하였다. 특히 다소 복잡해 보이는 세 번째 공식의 진위 여부에 대하여 학생들의 관심은 높았다. 이 공식을 제시한 수연은 교사와 다른 학생들에게 경계점이 6개인 경우를 직접 설명하며 학생들의 지지를 이끌어 내며 정당화하였다. 학생들은 경계점이 6개인 경우를 임의의 경계점의 수로 보고 공식으로 받아들였으며 이 교실에서 위 세 식들이 동치인 식이라는 것이 언급되지 않은 채 별개의 공식으로 남겨두었다.

나. 내점이 2개이고 경계점이 변하는 경우의 넓이와 Pick의 공식 추측 논증

두 번째 단계로 <부록 1>의 8번 문제인 내점이 2개이고 경계점이 3, 4, 5, 6, 7개인 격자다각형의 넓이를 구하고 이 넓이의 변화를 7번 문제의 넓이 변화와 관계시켜 공식을 구하도록 하였다. 다음의 에피소드는 활동지 8번 문제의 탐구 결과를 정리하고, 7번 문제의 넓이와 비교를 통해 경계점과 내점의 수를 이용하여 넓이 공식을 찾아가는 과정의 담화이다.

<에피소드 7> 내점이 2개이고 경계점 수가 변할 때 격자다각형 넓이 공식 탐구

준형: 2씩 늘어나는데... 내부의 점이 2일 때는
수진: 이거 더하기 이거 나누기 2는 이거 아닌가? 맞지.
준형: [수진이가 말한 것을 교재에 적으면서] 내가 발표할래.
준형: 선생님, 다 했어요.
교사: 뭐야?
준형: 경계선의 점의 수 더하기 내부의 점의 수 나누기 2
교사: 이게 답이야?
[교사는 이것을 공식으로 인정하지 않았다.]
교사: 앞의 문제랑 비교해보았어? 얼마가 차이가 나는지가 힌트거든.
수진: 이거에서 이거를 빼고 나누기 2하고 더하기 2하면
준형: 아. 이건 위의 꺼고
수진: 경계선의 [점의] 수 빼기 2 나누기 2
준형: 더하기 내부점 수
… (중략) …
보성: 찾았어요. [경계점의 수에다] 내부의 점의 수 더하고 나누기 2
교사: 둘이 이야기 해 봐.
재훈: 난 요렇게 했어. 경계선 위의 점의 수 빼기 2를 한 다음 곱하기 0.5를 해. 그리고 내부의 점의 수 곱하기 1을 한 다음 더하면 나와. 좀 복잡하지만 맞아.
보성: [계산해 보고] 맞네. 복잡하지만 맞네.
보성: 곱하기 1 안 해도. 그냥 내부의 점 수.
재훈: 똑같잖아.
보성: 넌 곱하기 1 있잖아.
정우: 그냥 쉽게 2.5를 빼면 되잖아. 응
보성: [경계점 3이고 내부점의 수가 2일 때 계산] 맞네.
재훈: 2.5를 빼?
보성: 야, 이건 안 돼. 경계점이 7인 경우 7에서 2.5를 빼면 4.5고 거기에다 내부의 점 수 더하면
정우: 안 되네.
재훈: 선생님, 내부의 점 수 안 사용해도 되요?
교사: 내부점의 수를 사용해야지.
재훈: 보성아, 네 꺼 틀렸다.

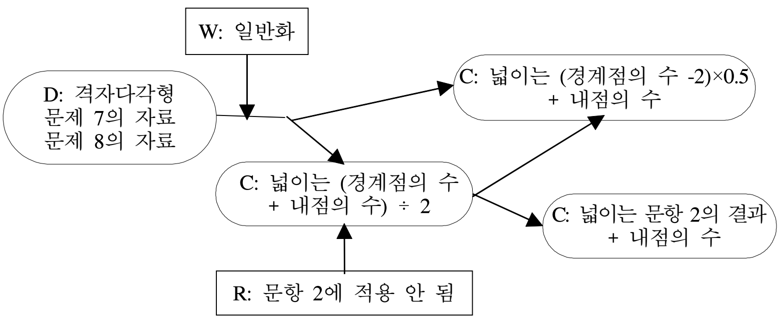
보성: 왜?
재훈: 내 꺼만 맞다.
보성: 위[7번 문제에도]에 것도 다 되어야 해요?
교사: 그럼, 7번과 비교하라고 했지?
재훈: 선생님, 위에거랑 밑에 거랑 둘 다 되는 거 찾았어요.
보성: 둘 다 되어야 하는 거야?
재훈: 응. 둘 다 되는 거 찾았어.
지연: 선생님! 이거 맞아요? 저기에다가 [친구들이 찾은 칠판의 1번 공식에다가] 더하기 2 해서요.
교사 : 더하기 2 그러면 2가 뭐지?
지연, 지윤: 내부의 점 수
교사: 그러면 2가 아니라 뭐지?
지연, 지윤: 내부의 점 수로 해요.
교사: 두 번째 공식에도 적용할 수 있을까요?
지연, 지윤: 네
지윤: 저기다가... [칠판의 2번 공식]
지연: 3 나누기 2하면 1.5야 1.5 빼기 1하면 0.5.. 0.5 더하기 2하면 2.5야.
지윤: 1번을 써도 되나?

<에피소드 7>에서 학생들은 문제 8의 격자다각형의 넓이를 구한 다음 문제 7의 격자다각형의 넓이 차, 즉 경계점 수가 같으면 넓이 차가 얼마인지 알아보았다. 다수의 학생들은 문제 8에서 구한 격자다각형의 넓이들을 토대로 일반화를 보증(W)으로 격자다각형의 넓이를 구하는 공식이 다음과 같다고 주장하였다:

{(경계선의 점의 수) + (내부점의 수)} ÷ 2

이 주장은 내점의 수가 2를 고정하고 경계점이 수가 3, 4, 5, 6, 7인 경우에로부터 추론된 공식인 {(경계점의 수) + 2} ÷ 2에서 2를 내점의 수로 변수화하여 추론한 것이다. 학생들이 위 주장을 공식으로 제시하였을 때 교사는 이 공식을 수용하지 않았다. 그 이유는 내점의 수가 2인 경우에 성립한다고 하더라도 문제 7과 연계시키지 않았기 때문에 다른 힌트를 주었다. 즉, 학생들이 고정된 내점의 수 2를 일반적 내점의 수로 대체하기 위해서 문제 8의 문항 2에서 얻은 결과가 중요하게 작용한다는 것을 인지시키기 위한 의도였다. 이처럼 문제 8의 문항 1만을 자료로 내점의 수가 2인 하나의 경우를 일반적인 경우로 보면서 나타난 오류는 '성급한 일반화(hasty generation)'라 할 수 있고 보증 오류의 일종이다. 문제 8의 격자도형과 문제 7의 격자도형에 대한 동시 성립의 여부가 지지(B)와 반박(R)의 근거로 활용되었다. 이에 따라 위 공식은 파기되었고 학생들과 교사 간의 의사소통을 통해 문항 2의 탐구 활동 결과에 대해서도 성립하는 즉, 내점의 개수를 고려한 공식으로 만들어갔다. [그림 IV-7]은 지금까지의 과정을 논증 도식으로 나타낸 것이다.

학생들은 교사의 안내에 의한 발견학습을 통해 Pick의 공식을 만들어냈다. 학생들이 주장한 공식이 성급한 일반화에 의해 이루어졌다고 교



[그림 IV-7] 내점이 있는 격자다각형의 넓이 공식 추적에 대한 논증 도식

사는 판단했고, 학생들은 자신들의 오류를 수정하였다. 이 초등 영재 교실의 논증활동을 학생들이 주도하고 결론을 이끌어내지만 교사에 의해 수용되어야 한다고 인식하였다. 여기에는 교사의 지식적 권위가 중요하게 작용하며 반박과 지지, 보증을 유도하는 경우에도 중재 역할을 하고 있음을 시사해준다. 그러나 여기서 추적한 공식은 내점이 0개, 2개인 경우 경계점의 변화를 탐구하여 만든 잠정적 공식이며 귀납적 추론으로 볼 때 다소 약할 수 있다. 따라서 추가적인 활동으로 내점이 3개인 경우, 내점이 4개인 경우 혹은 임의의 격자도형에 대해 넓이 공식으로 적절하다는 지지를 이끌어냈다면 학생들이 Pick의 공식을 더 자연스럽게 수용하였을 것으로 본다.

Ⅴ. 결 론

이 연구는 TI-73 그래핑 계산기를 사용해 Pick의 공식을 단계적으로 유도해가는 초등학교 5학년 영재학급의 수업담화 사례를 통해 논증활동의 특성을 Toulmin의 논증 도식으로 분석한 것이다. 엄밀한 수학적 증명을 강조하고 형식적 논리에 치중한 논리적 구조보다는 일상생활을 포함한 다양한 담화에서도 적용해 볼 수 있는 적합한 구조라는 점에서 Toulmin의 논증활동에 주목하였다. 연구 결과 논증활동을 촉진시키는 데에는 탐구지향적 학습에 기초한 추론 활동, 과제 맥락, TI-73 그래핑 계산기의 도구적 역할, 그리고 교사의 수업 계획이 중요한 요인임을 알 수 있었다. 이 연구를 통해 얻은 주요 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론과 시사점을 제시하고자 한다.

첫째, 논증 담화를 제공하는 이 수업은 학생들의 활동을 중요시하는 탐구지향적 토론 수업이었다. 상호작용에 기초한 조별 활동을 중심으로 논증활동이 시작되면서 과제에 집중하고 학생들이 자신의 의견을 내고 주장을 만들며 이를 보증하는 논증활동이 이루어졌다는 점에서 조별 활동은 논증 유발의 학습기회를 제공하는 학습 조직이라 진단할 수 있다(Berland & Hammer, 2012; Kim & Song, 2006; Weber et al., 2008). 결국 논증활동을 제공하는 수업은 교사가 지식을 전달하고 학생은 그 지식을 수용하는 기존의 수업관행과는 엄연한 차이가 나며, 학생들이 수업에 능동적으로 참여하여 스스로 지식을 구성해 가고 자신의 사고를 드러내며 표현할 기회를 줌으로써 수학교육에서 추구하는 핵심역량인 의사소통과 추론 능력을 육성하는데 도움이 될 것으로 본다.

둘째, Pick의 공식을 찾아가는 과정에서 TI-73 그래핑 계산기의 지오보드의 활용은 다각형 그리기와 넓이를 관찰하는 데 필요한 풍부한 자료를 생성해 줌으로써 논증활동을 활성화하는 매개 도구의 역할을 했다. 즉, 과제 맥락에서 그래핑 계산기가 격자다각형의 경계점과 내점의 수를 제시될 때 다각형의 넓이에 대한 귀납적 논증의 단초를 제공하였다. 특히 TI-73 그래핑 계산기는 주어진 경계점과 내점을 기초로 격자다각형을 그리고 ‘Area’ 명령으로 넓이를 구해가는 실험과 관찰을 용이하게 하였으며(Magalhaes & Martinho, 2012), 의사소통과 추론을 바탕으로 논증활동을 활성화(Kutzler, 2003)하는데 기여하였다. 또 계산기 화면에 나타난 결과를 관찰하는 동안 개인의 논증활동에서 ‘보증’의 역할을 해주었으며 이를 바탕으로 집단적 논증활동으로 발전해갈 수 있도록 하였다. 그러나 TI-73 그래핑 계산기의 지오보드에 주어진 도형의 넓이를 구해주는 기능에만 의존하는 것은 오히려 학생들이 넓이를 직접 계산해 보는 과정에서 사고할 수 있는 기회를 상실할 수 있다. 따라서 다양한 도형의 넓이를 직접 계산한 결과와 TI-73 그래핑 계산기의 ‘Area’ 명령으로 구한 넓이를 비교하여

경계점과의 관계를 찾아보는 활동이 추가된다면 수학적 증명의 아이디어에 더 근접한 논증활동이 일어날 수 있을 것이다.

셋째, 논증활동에서 교사의 역할은 중요하였다. 먼저 교사는 학생들이 자료로부터 유용한 주장으로 연결되도록 상호작용을 유도하면서 추론활동을 이끌어주는 역할(Boero, 1999; Hanna, 1995; Weber, Maher, Powell, & Lee, 2008)을 하였다. 아울러 학생들이 구성한 주장을 전체 학생들의 합의된 결과로 이끌면서 학생들의 추론 활동에 대한 정당성을 승인하고 학생들에게 지식을 수용하도록 하는 권위자의 역할을 담당하였다. 이처럼 논증활동에서 교사는 학생들의 활동 방향을 설정하고 수업 활동의 전반을 총괄하는 오케스트레이션의 지휘자와 같은 역할을 수행하므로 과제, 학생 및 도구에 대한 풍부한 교수학적 지식이 필요할 것이다.

넷째, 논증활동의 분석은 실질적 수학교실 담화연구의 하나로 교실에서 학생들에게 무슨 일이 일어나고 있는지의 일면을 생생하게 드러낼 수 있었다. 예컨대, 본 연구에서는 수학교실에서 소그룹 활동과 전체 학급 토론이 병행된 논증활동은 교수와 학습의 도구로 기능하며 개인에서 집단적 논증으로 진화하면서 Pick의 공식에 대한 이해를 풍부하게 하였다. 또한 수업담화에서 나타나는 논증 구조에 대한 이해는 논증의 질과 학생들의 논증 능력을 향상시키는 데 도움을 주었다(Chinn & Anderson, 1998; Maloney & Simon, 2006). 따라서 수업 개선과 더 좋은 수업 설계 및 교수학적 지식의 신장을 위해서 다양한 수업의 관찰과 담화로부터 논증 도식의 구성과 분석이 따라야 할 것으로 본다.

본 연구는 TI-73 그래핑 계산기를 사용해 Pick의 공식을 단계적으로 유도해가는 초등학교 5학년 영재학급 수업담화에서 논증활동을 분석해보았다. 그러나 계산기를 숙지를 위한 별도의 시간을 거쳤지만 수업 시간이 2차시라는 연구기간, 영재 학생이라는 연구 대상, 그리고 계산기란 도구의 활용이라는 제한된 측면은 연구 결과를 일반화하기에는 무리가 있다. 더불어 논증활동과 증명이 서로 직접적 관계가 있지 않으나 논증활동과 증명 사이 어느 정도 연계되는지 규명해보는 것은 중요하다고 볼 때(Conner, 2008; Douek, 1999; Pedemonte, 2007), 학년성에 맞는 논증 활동을 유발하는 다양한 수학적 과제 맥락의 개발과 수학적 증명의 아이디어를 담으면서 일상적 담화에서 도움이 되는 논증활동을 제공하는 수업을 통해 논증활동과 증명 사이의 연계 정도를 규명해보는 후속연구가 필요하리라 본다.

참고문헌

강남화, 이은경 (2013). 논변, 논의 그리고 논증 개념의 명료화를 위한 문헌조사연구. **한국과학교육학회지, 33**(6), 1119-1138.

강영란 (2015). **계산기를 활용한 초등 수학 영재의 교실 활동에 관한 활동이론적 분석**, 미출판 박사학위논문, 영남대학교 대학원, 경산.

강현영, 송은영, 조진우, 이경화 (2011). 수학・과학수업 교실문화 분석연구의 신뢰도 검증방법에 대한 고찰: 구성주의 수업관찰 프로토콜을 중심으로. **학습자 중심 교과 교육연구, 15**(6), 643-667.

교육부 (2015). 2015 개정수학과 교육과정. 교육부.

김민주, 권오남 (2006). 사회적 상호작용 중심의 탐구지향학습에서 나타나는 학생들의 논증과 수학적 정당. **한국교육학회 교육학연구, 44**(1), 247-275.

맹승호, 박영신, 김찬종 (2013). 논증 담화분석 연구의 방법론적 고찰: 논증활동의 협력적 구성과 인식적 실행의 분석을 중심으로. **한**

국과학교육학회지, 33(4), 840-862.

박교식 (2007). 정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형의 탐색. **수학교육학 연구, 17**(3), 221-232.

이윤경 (2016). **고등학교 확률통계 담화분석: Mehan의 이론, Toulmin의 논증패턴, Peirce의 가추법을 중심으로**, 미출판 박사학위논문, 영남대학교 대학원, 경산.

Berland, L. K., & Hammer, D. (2012). Framing for scientific argumentation. *Journal of Research in Science Teaching, 49*(1), 68-94.

Chinn, C., & Anderson, R. (1998). The structure of discussions intended to promote reasoning. *The Teachers College Record, 100*(2), 315-368.

Conner, A. (2008). *Argumentation in a geometry class: Aligned with the teacher's conception of proof*. Retrived from http://math.coe.uga.edu/OLIVE/EMAT8990FYDS07/Conner%20Arg%20Geometry.pdf

Boero, P. (1999). *Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education*. Retrived from http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html.

Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. Retrived from http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g1-douek.pdf.

Erduran, S., Simon, S., & Osborne, J. (2004). Tapping into argumentation: Developments in the application of Toulmin's argument pattern for studying science discourse. *Science Education, 88*(6), 915-933.

Evens, H., & Houssart, J. (2004). Categorizing pupils'written answers to a mathematics test question: I know but I can't explain. *Educational Research, 46*(3), 269 – 282.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

Hoyles, C., & Kuchemann, D. (2002). Students' understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics, 51*(3), 193-223.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 3-21.

Kieran, C., Forman, E., & Sfard, A. (2001). Bridging the individual and the social: Discursive approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics 46*(1), 42-49.

Kim, H., & Song, J. (2006). The features of peer argumentation in middle school students' scientific inquiry. *Research in Science Education, 36*(3), 211-233.

Knipping, C. (2003). *Argumentation structures in classroom proving situations*. Retrived from http://lettredelapreuve.org/OldPreuve/CERME3Papers/Knipping-paper.pdf.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 229-269). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kutzler, B. (2003). CAS as pedagogical tools for teaching and learning mathematics. In J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin, & R. M. Zbiek (Eds.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education* (pp.

53-71). Reston, VA: NCTM.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to NCTMs principles and standards* (pp. 237－249). Reston, VA: NCTM.

Magalhãs, M., & Martinho, M. H. (2012). The role of graphical calculator in developing mathematial argumentation. Retrived from http://www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/1308.pdf.

Maloney, J., & Simon, S. (2006). Mapping children’s discussions of evidence in science to assess collaboration and argumentation. *International Journal of Science Education, 28*(15), 1817-1841.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational Studies in Mathematics. 66*(1), 23-41.

Scandrett, H. (2008). Using Geoboards in Primary Mathematics: Going... Going... Gone?. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13*, 29-32.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument (Updated edition)*. NY: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E. (2006). **논변의 사용** (고현범, 임건태 역). 서울: 고려대학교출판부.

Trouche, L. (2005). Calculators in Mathematics Education: A rapid evolution of tools with differential effects. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 9-39). New York: Springer.

Weber, K., & Alcock, L. (2005). Using warranted implications to understand and validate proofs. *For the Learning of Mathematics, 25*(1), 34-38.

Weber, K., Maher, C. A., Powell, A. B., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 247-261.

Yackel, E. (2001), *Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms*. Retrived from http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466631.pdf.

Analysis on the Argumentation in Exploring the Pick's Formula Using the Geoboard of Graphing Calculator in Math-Gifted 5 Grade Class

Kim, Jin Hwan (Yeungnam University)
Kang, Young Ran (Hyoja Elementary School)

This study was to find characteristics of argumentation derived from a discourse in a math-gifted 5 grade class, which was held for finding a Pick's formula using Geoboard function of TI-73 calculator. For the analysis, a video record of the class, transcript of its voice record, and activity paper were used as data and Toulmin's argument schemes were applied as analysis standard. As a result of the study, we found that the graphing calculator helped the students to create an experimental environment that graphing a grid-polygon and figuring out its area. Furthermore, it also provided a basic demonstration through 'data->claim' composition and reasoning activities which consisted of guarantee, warrant, backing, qualifier and refutal for justifying. The basic argumentation during the process of deriving the Pick's theorem by the numbers of boundary points and inner points was developed into a 'collective argumentation' while a teacher took a role of a conductor of the argumentation and an authorizer on the knowledge at the same time.

* Key words : Argumentation(논증활동), Geoboard(지오보드), Graphing calculator(그래핑 계산기), Pick's formula(픽의 공식), Toulmin's argument scheme(툴민의 논증도식)

논문접수 : 2016. 2. 10
논문수정 : 2016. 3. 12
심사완료 : 2016. 3. 14

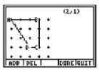
<부록 1>

Pick의 공식 학생용 활동지

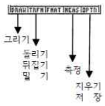
계산기 꼭꼭 기하판(Geoboard)

기하판에 그리기

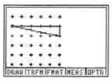
1. APPS , 4:GEOBOARD 선택하여 ENTER을 누른다.
2. 2:6×6 선택하여 ENTER을 누른다.
3. DRAW를 하기 위해 Y= 를 누른다.
   화면 창 아래에 그림을 그리기 위한 도구가 나타난다.
   ADD, DEL, DONE, QUIT



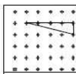
4. 기하판에 그림 그리는 방법은 다음과 같다.
   ① 화살표 방향키를 이용하여 그리고 싶은 곳으로 이동한다.
   ② ADD를 선택하여 첫 번째 점을 선택한다.
   ③ 다음 점을 선택하기 위해 화살표 방향키를 이용하여 점을 옮긴다.
   ④ ADD를 눌러 두 번째 점을 선택한다.
   잘못되어 수정해야 하는 부분은 DEL 키를 누른다.
   ⑤ ①~④를 반복하며 그림을 다 그린 후에는 DONE 키를 누른다.
   ⑥ QUIT 키를 눌러 첫 화면으로 나온다.



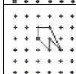
5. 기하판에 다음을 그려서 도형의 넓이를 측정해보자.
   ① 측정을 위해 MEAS를 선택하기 위해 TRACE 를 누른다.
   ② 넓이는 2:Area을 선택하고 ENTER 을 누른다.



6. 다음을 기하판에 그려서 넓이를 구해보자.

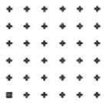


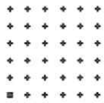
경계선에는 6개의 점이 있고, 내부에는 점이 없는 도형을 그려보자.
이 때 넓이는 (   )이다.

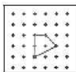


경계선에는 6개의 점이 있고, 내부에는 점이 없는 도형을 그려보자.
이 때 넓이는 (   )이다.

경계선에 6개의 점이 있고, 내부에는 점이 없는 도형을 하나 더 그려보고, 이 때의 넓이를 확인하자.

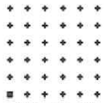

(내가 그린 것)

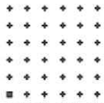

(친구가 그린 것)



경계선에는 5개의 점이 있고, 내부에는 1개의 점이 있는 도형을 그려보자.
이 때 넓이는 (   )이다.

경계선에 5개의 점이 있고, 내부에는 1개의 점이 있는 도형을 하나 더 그려보고, 이 때의 넓이를 확인하자.


(내가 그린 것)


(친구가 그린 것)

위 활동에서 알게 된 점 찾기

7. 경계선 위의 점의 수와 내부의 점의 수를 이용하여 넓이를 구하는 식을 만들어 보자.
   ① 다음 모양을 지오보드에 만들고, 넓이를 확인하여라.

경계선 위의 점의 수	내부의 점의 수	넓이
3	0	
4	0	
5	0	
6	0	
7	0	

   ② 경계선 위의 점의 수, 내부의 점의 수를 이용하여 넓이를 구하는 식을 만들어보자.

8. 경계선 위의 점의 수와 내부의 점의 수를 이용하여 넓이를 구하는 식을 만들어 보자.
   ① 다음 모양을 지오보드에 만들고, 넓이를 확인하여라.

경계선 위의 점의 수	내부의 점의 수	넓이
3	2	
4	2	
5	2	
6	2	
7	2	

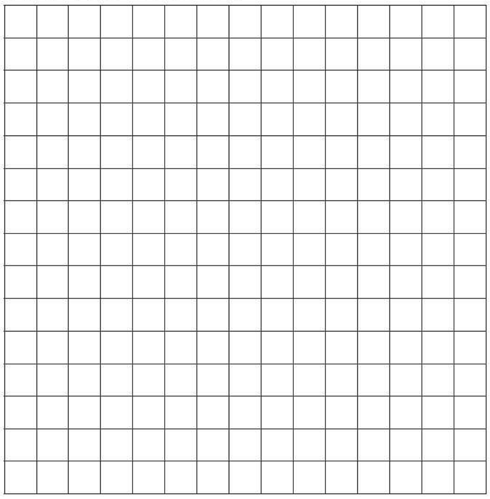
   ② 위 문제 7번의 넓이와 비교해보자. 얼마씩 차이가 나는가?

   ③ 경계선 위의 점의 수, 내부의 점의 수를 이용하여 넓이를 구하는 식을 만들어보자.

수학 톡톡 PICK의 정리

PICK의 정리로 알려진 이 식은 1859년 오스트리아 비엔나에서 출생한 수학자 George Alexander Pick에 의하여 1900년에 발견되었으며, 쉽게 구할 수 없는 다각형의 넓이를 단순히 격자점을 헤아려서 쉽게 구할 수 있다.

9. 내 손바닥의 넓이는 약 얼마인지 구해보자.



내 손바닥의 넓이: