

# On the asymptotic relationship for some process capability indices $\hat{C}_p$ , $\hat{C}_{pk}$ and $\hat{C}_{pm}$ under bivariate normal distribution

Joong-Jae Cho<sup>a</sup> · Hyo-Il Park<sup>b,1</sup>

<sup>a</sup>Department of Information and Statistics, Chungbuk National University;

<sup>b</sup>Department of Statistics, Cheongju University

(Received October 27, 2015; Revised January 4, 2016; Accepted January 14, 2016)

---

## Abstract

The process capability index is used to determine whether a production process is capable of producing items within a specified tolerance. Some process capability indices  $C_p$ ,  $C_{pk}$  and  $C_{pm}$  have been of particular interest as useful management tools for tracking process performance. Most evaluations on process capability indices focus on statistical estimation and test of hypothesis. It is necessary to investigate their asymptotic relationship among basic estimators  $\hat{C}_p$ ,  $\hat{C}_{pk}$  and  $\hat{C}_{pm}$  of process capability indices  $C_p$ ,  $C_{pk}$  and  $C_{pm}$ . In this paper, we study their asymptotic relationship for three process capability indices  $\hat{C}_p$ ,  $\hat{C}_{pk}$  and  $\hat{C}_{pm}$  under bivariate normal distribution  $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ . With some nonnormal processes, the asymptotic correlation coefficient of any two respective process capability index estimators could be established.

Keywords: asymptotic correlation coefficient, bivariate normal distribution, limiting distribution, process capability index, process performance

---

## 1. 서론

공정능력(process capability)이란 제조공정이 제품의 설계과정에서 설정한대로 얼마나 균일한 제품을 생산할 수 있는지를 반영하는 공정의 고유능력 즉, 균일성을 의미한다. 이처럼 고유능력을 평가하기 위해서 다양한 통계적 기법들이 제안되어 왔으며, 이를 공정의 변동과 제품의 규격한계 등으로 공정능력을 평가하는 것을 공정능력분석(process capability analysis)이라 하고, 이를 정량적으로 표현한 것이 공정능력지수(process capability index)이다. 공정능력분석을 위해 여러 가지 공정능력지수들이 다양하게 연구되고 있다. 특히, Pearn 등 (1992)은 공정능력지수들의 추정량들에 대해 분포적인 문제들을 연구하였다. 또한 Kotz와 Johnson (1993)은 기존 연구결과들을 로버스트 문제, 다변량 공정능력지수들까지 체계적으로 정리하였다. Chan 등 (1990)은 몇 가지 추정된 공정능력지수들과 관련된 극한분포 결과를 유도하였다.

제품의 품질은 그들 특성 각각의 성능보다는 오히려 결합된 성능에 영향을 받는다. 실제로 이들 특성을

---

This work was supported by the research grant of Chungbuk National University in 2013.

<sup>1</sup>Corresponding author: Department of Statistics, Cheongju University, 298, Daeseong-ro, Cheongwon-gu, Cheongju-si, Chungcheongbuk-do 28503, Korea. E-mail: [hipark@cju.ac.kr](mailto:hipark@cju.ac.kr)

하나 하나 측정하지만, 특성치들간에 독립적이라기 보다는 오히려 관련이 있어서 결합적으로 분포되어 있다고 가정하는 것이 보다 현실적일 것이다. 이러한 경우에 설명하고자 하는 공정능력조차 하나의 공정능력지수로 표현하여 사용하는 것은 충분하지 않을 수 있다. 따라서 보다 확장된 개념의 다변량 공정능력지수를 사용하는 것이 매우 자연스럽고 바람직할 것이다. 또한 자동 검사 시스템에 의해 여러 특성들을 하나 하나 쉽게 측정할 수 있는 오늘날에 다변량 품질관리의 중요성은 더욱 크다고 할 수 있겠다. 관련 연구결과로 Kocherlakota와 Kocherlakota (1991)는 이변량 정규분포  $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$  하에서 가장 간단한 공정능력지수의 추정량들인  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{py}$ 의 결합 확률분포함수를 계산하고 통계적 추론 방향을 제시하였다. 그 이후에는 Park 등 (2002)이 벡터공정능력지수 관련하여 극한분포와 신뢰영역에 대하여 연구하였다. 최근에는 Shahriari와 Abdollahzadeh (2009)이 새로운 다변량 공정능력지수 벡터를 제안하여 비교, 연구하였다.

본 논문에서는 공정능력지수  $C_p$ 와  $C_{pm}$  그리고  $C_{pk}$ 의 추정량들의 점근적 상관관계에 대하여 연구하였다. 먼저 2절에서는 이들 공정능력지수들의 기본적인 정의와 이변량 정규공정하에서의 기본적인 공정능력지수들에 대한 플러그인 추정량  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{pmx}$  그리고  $\hat{C}_{pkx}$ 들을 정의, 설명하였다. 그리고 3절에서는 이변량 정규분포  $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$  하에서 추정량  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{py}$ ,  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{pmx}$ , 그리고  $\hat{C}_{pkx}$ 와  $\hat{C}_{pky}$  등의 점근적인 상관관계를 규명, 연구하였다.

## 2. 기본적인 공정능력지수들의 정의

우선 가장 널리 사용되는 공정능력지수에 대한 정의를 소개한다. 평균이  $\mu$ 이고 분산이  $\sigma^2$ 인 정규공정  $N(\mu, \sigma^2)$ 에 대한 기본적인 공정능력지수  $C_p$ 와  $C_{pk}$  그리고  $C_{pm}$ 들은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{d}{3\sigma},$$

$$C_{pk} = \frac{\min(\mu - LSL, USL - \mu)}{3\sigma} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma},$$

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{USL - LSL}{6\tau} = \frac{d}{3\tau}.$$

USL와 LSL은 각각 해당 공정에 대한 규격상한과 규격하한을 나타낸다. 또한  $d$ 와  $M$  그리고  $\tau^2$ 는 각각 다음을 나타낸다 (단,  $T$ 는 공정 목표치임).

$$d = \frac{USL - LSL}{2}, \quad M = \frac{USL + LSL}{2} \quad \text{그리고} \quad \tau^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2.$$

위에서 정의된 공정능력지수들은 일변량 특성치에 대한 공정능력지수이다. 그러나 보다 정확한 공정능력분석을 위해서는 여러 개의 특성치를 한꺼번에 다루는 다변량 공정능력지수 또는 벡터공정능력지수들이 활용될 수 있을 것이다.

본 연구에서는 두 가지 품질특성치들을 고려한 공정능력지수들을 기초로 연구하고자 한다. 우선 필요한 이론적인 확률모형은 다음과 같다.

두 가지 품질특성치들에 대응하는 이변량 확률벡터  $(X, Y)$ 는 이변량 정규공정  $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 를 따른다고 하자. 이때 고려하고자 하는 공정능력지수들  $C_{px}$ 와  $C_{pmx}$  그리고  $C_{pkx}$ 은 다음과 같다.

$$C_{px} = \frac{USL_x - LSL_x}{6\sigma_x} = \frac{d_x}{3\sigma_x},$$

$$C_{pmx} = \frac{USL_x - LSL_x}{6\sqrt{\sigma_x^2 + (\mu_x - T_x)^2}} = \frac{USL_x - LSL_x}{6\tau_x} = \frac{d_x}{3\tau_x},$$

$$C_{pk_y} = \frac{\min(\mu_y - LSL_y, USL_y - \mu_y)}{3\sigma_y} = \frac{d_y - |\mu_y - M_y|}{3\sigma_y}.$$

이들 공정능력지수  $C_{px}$ 와  $C_{pmy}$  그리고  $C_{pk_y}$ 에서 아래첨자  $x$ 와  $y$ 는 각각 확률변수  $X$ 와  $Y$ 에 대응하는 변수를 의미한다. 이들 공정능력지수에 대하여 소위 플러그-인(plug-in) 방법으로 공정능력지수 추정량들을 고려할 것이다. 다음 절에서 두 품질특성치들과 관련하여 공정능력지수들의 추정량  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{pmy}$ ,  $\hat{C}_{pk_y}$ 에 대한 상관관계를 보다 구체적으로 연구, 제시할 것이다.

### 3. 이변량 정규공정 하에서의 상관관계

이 절에서는 공정 표본  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 이 이변량 정규공정  $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 로부터 임의 추출되었다고 할 때, 두 공정능력지수들  $C_{px}$ 와  $C_{py}$ ,  $C_{px}$ 와  $C_{pmy}$  그리고  $C_{px}$ 와  $C_{pk_y}$ 의 추정량들에 대한 점근적 상관관계들을 규명하고자 한다. 공정능력지수  $C_p$ 와  $C_{pm}$  그리고  $C_{pk}$  등은 이론적으로 혹은 현장에서 매우 유용하게 공정능력분석에 이용되는 바, 이들의 관계를 명확히 규명, 연구하여 적절히 활용할 필요가 있을 것이다. 먼저 점근적 상관관계들을 규명하기 위해 필요한 보조정리(lemma)를 소개하면 다음과 같다. 아래의 기호  $\xrightarrow{d}$ 는 분포수렴(convergence in distribution)을 의미한다.

**Lemma 3.1** 공정평균  $\mu_x$ 와  $\mu_y$ , 공정분산  $\sigma_x^2$ 와  $\sigma_y^2$  그리고 4차 중심적률  $\mu_{4x} = E(X - \mu_x)^4$ 와  $\mu_{4y} = E(Y - \mu_y)^4$ 이 존재하는 임의의 이변량 공정분포로부터의 확률 표본  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 에 대하여 표본의 크기  $n$ 이  $n \rightarrow \infty$ 일 때, 다음의 결과가 성립한다.

$$\begin{aligned} (Z_{1n}, Z_{2n}, Z_{3n}, Z_{4n}) &= (\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_x), \sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_y), \sqrt{n}(S_x^2 - \sigma_x^2), \sqrt{n}(S_y^2 - \sigma_y^2)) \\ &\xrightarrow{d} (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \sim MN(\mathbf{0}, \Sigma_{4 \times 4}). \end{aligned}$$

단, 분산-공분산 행렬  $\Sigma_{4 \times 4} = (\sigma_{ij})_{4 \times 4}$ 은 다음과 같은 각각의 성분을 갖는다.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \text{Var}(X) = \sigma_x^2, & \sigma_{12} &= \text{Cov}(X, Y), & \sigma_{13} &= E(X - \mu_x)^3, & \sigma_{14} &= \text{Cov}(X, (Y - \mu_y)^2), \\ \sigma_{22} &= \text{Var}(Y) = \sigma_y^2, & \sigma_{23} &= \text{Cov}((X - \mu_x), Y), & \sigma_{24} &= E(Y - \mu_y)^3 = \mu_{3y}, \\ \sigma_{33} &= \mu_{4x} - \sigma_x^4, & \sigma_{34} &= \text{Cov}((X - \mu_x)^2, (Y - \mu_y)^2), & \sigma_{44} &= \mu_{4y} - \sigma_y^4. \end{aligned}$$

증명: Park 등 (2002) 참조. □

우선 다음 형태의 기본적인 두 공정능력지수  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{py}$ 에 대한 상관계수  $\text{Corr}(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{py})$ 는 Lemma 3.1을 이용하여 근사적으로 다음과 같이 유도되어진다. 이와 같은 사실은 공정능력분석에서 중요한 역할을 할 수 있으리라 생각된다.

**정리 3.1** 공정 표본  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 가 이변량 정규공정  $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 를 따른다면, 두 공정능력지수  $\hat{C}_{px} = d_x/(3S_x)$ 와  $\hat{C}_{py} = d_y/(3S_y)$ 의 상관계수  $\text{Corr}(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{py})$ 는 근사적으로 다음과 같다.

$$\text{Corr}(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{py}) \approx \rho^2.$$

증명: 우선 Park 등 (2002)의 정리 1에 의하면 다음의 극한분포가 성립된다.

$$\sqrt{n}(\hat{C}_{px} - C_{px}, \hat{C}_{py} - C_{py}) \xrightarrow{d} \left( -\frac{d_x}{6\sigma_x^3} Z_3, -\frac{d_y}{6\sigma_y^3} Z_4 \right).$$

확률변수  $Z_3$ 과  $Z_4$ 는 Lemma 3.1의  $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \sim MN(\mathbf{0}, \Sigma_{4 \times 4})$ 이다. 그러므로 근사적인 상관계수의 계산에 필요한 분산과 공분산은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\sigma_{px}^2 &= \text{Var}\left(-\frac{d_x}{6\sigma_x^3}Z_3\right) = \frac{d_x^2}{36\sigma_x^6}(\mu_{4x} - \sigma_x^4) = \frac{d_x^2}{36\sigma_x^6}2\sigma_x^4 = \frac{d_x^2}{18\sigma_x^2}, \\ \sigma_{py}^2 &= \text{Var}\left(-\frac{d_y}{6\sigma_y^3}Z_4\right) = \frac{d_y^2}{36\sigma_y^6}(\mu_{4y} - \sigma_y^4) = \frac{d_y^2}{36\sigma_y^6}2\sigma_y^4 = \frac{d_y^2}{18\sigma_y^2}, \\ \sigma_{pxy} &= \text{Cov}\left(-\frac{d_x}{6\sigma_x^3}Z_3, -\frac{d_y}{6\sigma_y^3}Z_4\right) = \frac{d_x d_y}{36\sigma_x^3 \sigma_y^3} \text{Cov}(Z_3, Z_4) = \frac{d_x d_y}{18\sigma_x \sigma_y} \rho^2.\end{aligned}$$

따라서 공정능력지수  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{py}$ 의 점근적 상관계수  $\rho_{pxy}$ 는 다음의 식으로 계산된다

$$\rho_{pxy} \approx \frac{\sigma_{pxy}/n}{\sqrt{\sigma_{px}^2/n} \sqrt{\sigma_{py}^2/n}} = \rho^2.$$

□

소표본 확률모형을 기초로 주요 연구결과인 정리 3.1을 구현해 본 사례를 제시하면 다음과 같다. 기본적인 두 공정능력지수  $C_{px}$ 와  $C_{py}$ 에 대하여  $LSL_x = 40$ ,  $USL_x = 60$ ,  $LSL_y = 90$ ,  $USL_y = 110$ 인 경우 이변량 정규분포  $BN(49, 99, 3^2, 2^2, 0.9)$ 로부터 100개의 난수벡터를 생성하여 공정능력지수  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{py}$ 의 상관계수를 계산하고 Figure 3.1에 산점도를 작성하였으며 추정치로서 0.8076을 얻었다. Figure 3.1은 100개의 난수벡터를 이용한 산점도를 그린 결과이며 정리 3.1의 이론적인 결과를 잘 나타내고 있음을 알 수 있다.

그리고 다음 형태의 두 공정능력지수  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{pmy}$ 에 대한 상관계수  $\text{Corr}(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{pmy})$ 는 Lemma 3.1을 이용하여 근사적으로 다음과 같이 유도되어진다.

**정리 3.2** 공정 표본  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 가 이변량 정규공정  $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 를 따른다면, 두 공정능력지수  $\hat{C}_{px} = d_x/(3\hat{\sigma}_x)$ 와  $\hat{C}_{pmy} = d_y/(3\hat{\tau}_y)$ 의 상관계수  $\text{Corr}(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{pmy})$ 는 표본의 크기  $n$ 이 충분히 클 때, 다음의 결과가 성립한다.

$$\text{Corr}(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{pmy}) \approx \frac{\rho^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_y - T_y}{\sigma_y}\right)^2}}.$$

증명: 우선 Slutsky 정리와 Park 등 (2002)의 내용들을 고려하면 다음 결과를 쉽게 유도할 수 있을 것이다.

$$\sqrt{n} \left( \hat{C}_{px} - C_{px}, \hat{C}_{pmy} - C_{pmy} \right) \xrightarrow{d} \left( -\frac{d_x}{6\sigma_x^3}Z_3, -\frac{d_y}{6\tau_y^3}(Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2) \right) \sim \text{BN}(\mathbf{0}, V_{ppm}).$$

단,  $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \sim MN(\mathbf{0}, \Sigma_{4 \times 4})$ 이며 공분산행렬  $V_{ppm} = (\sigma_{ppmij})_{i,j=1,2}$ 의 각 성분은 다음과 같이 계산 정리된다.

$$\begin{aligned}\sigma_{ppm11} &= \frac{d_x^2}{36\sigma_x^6}(\mu_{4x} - \sigma_x^4) = \frac{d_x^2}{18\sigma_x^2}, \\ \sigma_{ppm22} &= \text{Var}\left(-\frac{d_y}{6\tau_y^3}(Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2)\right) = \frac{d_y^2}{\tau_y^6}(2\sigma_y^4 + 4(\mu_y - T_y)^2\sigma_y^2), \\ \sigma_{ppm12} &= \sigma_{ppm21} = \frac{d_x d_y}{18\sigma_x \tau_y^3} \rho^2 \sigma_y^2.\end{aligned}$$

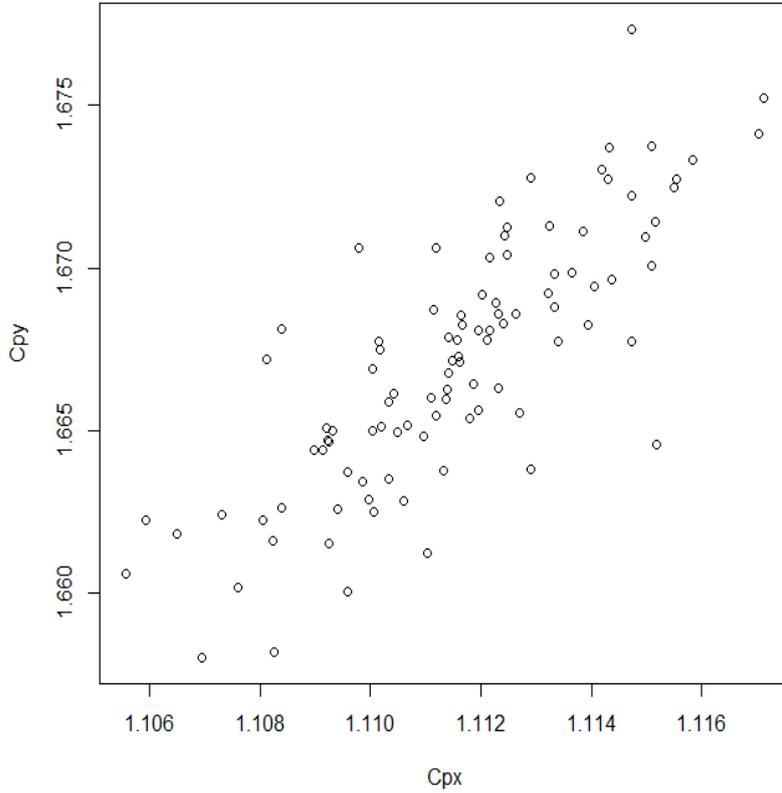


Figure 3.1. Scatter plot from a simulation for  $\hat{C}_p = (\hat{C}_{px}, \hat{C}_{py})$ .

따라서 공정능력지수  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{pmy}$ 의 점근적 상관계수는 다음의 식으로 계산될 수 있을 것이다.

$$\rho_{ppm} \approx \frac{\sigma_{ppm12}}{\sqrt{\sigma_{ppm11}}\sqrt{\sigma_{ppm22}}} = \frac{\rho^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_y - T_y}{\sigma_y}\right)^2}}.$$

□

나아가 다음 형태의 두 공정능력지수  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{pky}$ 에 대한 상관계수  $Corr(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{pky})$ 도 근사적으로 다음과 같이 유도되어진다.

정리 3.3 공정 표본  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 가 이변량 정규공정  $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 를 따른다면, 두 공정능력지수  $\hat{C}_{px} = d_x / (3\hat{\sigma}_x)$ 와  $\hat{C}_{pky} = (d_y - |\bar{y} - M_y|) / (3S_y)$ 의 상관계수  $Corr(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{pky})$ 는 표본의 크기  $n$ 이 충분히 클 때, 다음의 결과가 성립한다.

$$Corr(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{pky}) \approx \begin{cases} \frac{\rho^2}{\sqrt{1 + \frac{\pi-2}{\pi} \frac{2\sigma_y^2}{d_y^2}}}, & \mu_y = M_y, \\ \frac{\rho^2}{\sqrt{1 + \frac{2\sigma_y^2}{(|\mu_y - M_y| - d_y)^2}}}, & \mu_y \neq M_y. \end{cases}$$

증명: 우선 Slutsky 정리와 Park 등 (2002)의 내용들을 고려하면 다음 결과를 쉽게 유도할 수 있을 것이다. 첫째, 먼저  $\mu_y = M_y$ 인 경우를 고려하면 다음과 같다.

$$\sqrt{n} \left( \hat{C}_{px} - C_{px}, \hat{C}_{pky} - C_{pky} \right) \xrightarrow{d} \left( -\frac{d_x}{6\sigma_x^3} Z_3, -\frac{d_y}{6\sigma_y^3} Z_4 - \frac{|Z_2|}{3\sigma_y} \right) \approx \text{MN}(\mathbf{0}, V_{ppk}).$$

단,  $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \sim \text{MN}(\mathbf{0}, \Sigma_{4 \times 4})$ . 공분산행렬  $V_{ppk} = (\sigma_{ppkij})_{i,j=1,2}$ 의 각 성분은 다음과 같이 도출된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ppk11} &= \text{Var} \left( -\frac{d_x Z_3}{6\sigma_x^3} \right) = \frac{d_x^2}{36\sigma_x^6} (\mu_{4x} - \sigma_x^4) = \frac{d_x^2}{18\sigma_x^2}, \\ \sigma_{ppk22} &= \text{Var} \left( -\frac{d_y Z_4}{6\sigma_y^3} - \frac{|Z_2|}{3\sigma_y} \right) = \frac{d_y^2}{18\sigma_y^2} + \frac{\pi - 2}{9\pi}, \\ \sigma_{ppk12} &= \sigma_{ppk21} = \text{Cov} \left( -\frac{d_x Z_3}{6\sigma_x^3}, -\frac{d_y Z_4}{6\sigma_y^3} - \frac{|Z_2|}{3\sigma_y} \right) = \frac{d_x d_y}{36\sigma_x^3 \sigma_y^3} \text{Cov}(Z_3, Z_4) = \frac{d_x d_y}{18\sigma_x \sigma_y} \rho^2. \end{aligned}$$

따라서  $\mu_y = M_y$ 인 경우에 공정능력지수  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{pky}$ 의 점근적 상관계수  $\rho_{ppk}$ 는 다음의 식으로 계산될 수 있을 것이다.

$$\rho_{ppk} \approx \frac{\rho_{ppk12}}{\sqrt{\rho_{ppk11}} \sqrt{\rho_{ppk22}}} = \frac{\rho^2}{\sqrt{1 + \frac{\pi-2}{9\pi} \frac{18\sigma_y^2}{d_y^2}}}.$$

둘째,  $\mu_y \neq M_y$ 인 경우를 고려하면 다음과 같다.

$$\sqrt{n} \left( \hat{C}_{px} - C_{px}, \hat{C}_{pky} - C_{pky} \right) \xrightarrow{d} \left( -\frac{d_x}{6\sigma_x^3} Z_3, \frac{|\mu_y - M_y| - d_y}{6\sigma_y^3} Z_4 + \frac{\text{sgn}(\mu_y - M_y)}{3\sigma_y} Z_2 \right) \approx \text{MN}(\mathbf{0}, V_{ppk}).$$

단,  $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \sim \text{MN}(\mathbf{0}, \Sigma_{4 \times 4})$ . 비슷한 방법에 의해 공분산행렬  $V_{ppk} = (\sigma_{ppkij})_{i,j=1,2}$ 의 각 성분은 다음과 같이 계산 정리된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ppk11} &= \text{Var} \left( -\frac{d_x Z_3}{6\sigma_x^3} \right) = \frac{d_x^2}{36\sigma_x^6} (\mu_{4x} - \sigma_x^4) = \frac{d_x^2}{18\sigma_x^2}, \\ \sigma_{ppk22} &= \text{Var} \left( \frac{|\mu_y - M_y| - d_y}{6\sigma_y^3} Z_4 + \frac{\text{sgn}(\mu_y - M_y)}{3\sigma_y} Z_2 \right) = \frac{(|\mu_y - M_y| - d_y)^2}{18\sigma_y^2} + \frac{1}{9}, \\ \sigma_{ppk12} &= \sigma_{ppk21} = \text{Cov} \left( -\frac{d_x Z_3}{6\sigma_x^3}, \frac{|\mu_y - M_y| - d_y}{6\sigma_y^3} Z_4 + \frac{\text{sgn}(\mu_y - M_y)}{3\sigma_y} Z_2 \right) \\ &= -\frac{d_x (|\mu_y - M_y| - d_y)}{36\sigma_x^3 \sigma_y^3} \text{Cov}(Z_3, Z_4) = -\frac{d_x (|\mu_y - M_y| - d_y)}{18\sigma_x \sigma_y} \rho^2. \end{aligned}$$

따라서  $\mu_y \neq M_y$ 인 경우에 공정능력지수  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{pky}$ 의 점근적 상관계수  $\rho_{ppk}$ 는 다음의 식으로 계산될 수 있을 것이다.

$$\rho_{ppk} \approx \frac{\rho_{ppk12}}{\sqrt{\rho_{ppk11}} \sqrt{\rho_{ppk22}}} = \frac{\rho^2}{\sqrt{1 + \frac{2\sigma_y^2}{(|\mu_y - M_y| - d_y)^2}}}.$$

□

지금까지 이변량 정규분포  $\text{BN}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$  하에서의 추정량  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{py}$ ,  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{pmy}$  그리고  $\hat{C}_{px}$ 와  $\hat{C}_{pky}$  등의 점근적인 상관관계를 연구하여 제시하였다.

#### 4. 결론

공정능력분석분야 나아가 품질관리분야에서 다양한 여러 가지 품질특성치들을 관심을 갖고 모니터링 연구하게 될 것이다. 특히 가장 기본적인 형태의 공정능력지수들인  $C_p$ 와  $C_{pm}$  그리고  $C_{pk}$ 들을 연구하는 경우, 두 특성치들( $X, Y$ )이 이변량 정규공정  $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ 에 분포할 때 이 지수들 추정량들의 상관관계도 매우 중요한 주제라 생각된다. 본 논문에서는 가장 기본적으로 상관계수  $\text{Corr}(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{py})$ ,  $\text{Corr}(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{pmy})$  그리고 상관계수  $\text{Corr}(\hat{C}_{pkx}, \hat{C}_{pky})$ 의 근사적인 연구결과를 얻었다.

각 공정능력지수들 간에 접근적인 상관계수는 공통적으로 이변량 정규공정의 모상관계수 의 변화에 매우 의존적이며 구체적인 관계를 규명한 의미있는 연구결과라 판단된다. 따라서 이러한 공정능력지수들 간의 상관성에 대하여 보다 다양하게 구체적으로 체계화하는 연구를 계속할 필요가 있을 것이다.

#### 감사의 글

저자들은 호의적인 심사를 하신 익명의 심사위원들에게 감사의 말을 전하고자 합니다.

#### References

- Chan, L. K., Xiong, Z., and Zhang, D. (1990). On the asymptotic distributions of some process capability indices, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **19**, 11–18.
- Kocherlakota, S. and Kocherlakota, K. (1991). Process capability indices: bivariate normal distribution, *Communication in Statistics: Theory and Methods*, **20**, 2529–2547.
- Kotz, S. and Johnson, N. L. (1993). *Process Capability Indices*, Chapman & Hall, New York.
- Park, B. S., Lee, C. H., and Cho, J. J. (2002). On the confidence region of vector-valued process capability indices and, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, **30**, 44–57.
- Pearn, W. L., Kotz, S., and Johnson, N. L. (1992). Distributional and inferential properties of process capability indices, *Journal of Quality Technology*, **24**, 216–231.
- Shahriari, H. and Abdollahzadeh, M. (2009). A new multivariate process capability vector, *Quality Engineering*, **21**, 290–299.

# 이변량 정규분포 하에서 공정능력지수에 대한 점근적 상관관계에 관한 연구

조중재<sup>a</sup> · 박효일<sup>b,1</sup>

<sup>a</sup>충북대학교 정보통계학과, <sup>b</sup>청주대학교 통계학과

(2015년 10월 27일 접수, 2016년 1월 4일 수정, 2016년 1월 14일 채택)

---

## 요약

공정이 특정 허용범위 내에서 생산을 할 수 있는 지 여부를 결정하는 데 공정능력지수가 사용된다. 공정능력지수  $C_p$ ,  $C_{pk}$  그리고  $C_{pm}$  등은 공정의 현황을 추적할 수 있는 활용성이 높은 관리도구로서 특별한 관심을 가진다. 대부분 공정능력지수에 대한 계산결과는 통계적 추정과 가설검정에 초점을 맞춘다. 따라서  $C_p$ ,  $C_{pk}$  그리고  $C_{pm}$ 의 추정치  $\hat{C}_p$ ,  $\hat{C}_{pk}$  그리고  $\hat{C}_{pm}$  사이의 점근적 성질을 조사하는 것이 의미가 있을 것이다. 이 논문에서는  $BN(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$  하에서 세 가지 추정치  $\hat{C}_p$ ,  $\hat{C}_{pk}$  그리고  $\hat{C}_{pm}$  간의 점근적 상관관계를 연구한다. 비정규성을 가진 공정에서는 두 종류의 공정능력지수 간에 상관관계를 정립할 수 있을 것이다.

주요용어: 점근적 상관계수, 이변량 정규분포, 근사분포, 공정능력지수, 공정 현황

---

이 논문은 2013년도 충북대학교 연구기금을 지원받았음.

<sup>1</sup>교신저자: (28503) 충북 청주시 청원구 대성로 298, 청주대학교 통계학과. E-mail: hipark@cju.ac.kr