The Korean Journal of Applied Statistics (2016) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2016.29.1.181
29(1), 181–192

Comparison of methods of approximating option prices with Variance gamma processes

Jaejoong Lee[a] · Seongjoo Song[a,1]

[a]Department of Statistics, Korea University

(Received December 15, 2015; Revised January 5, 2016; Accepted January 5, 2016)

Abstract

We consider several methods to approximate option prices with correction terms to the Black-Scholes option price. These methods are able to compute option prices from various risk-neutral distributions using relatively small data and simple computation. In this paper, we compare the performance of Edgeworth expansion, A-type and C-type Gram-Charlier expansions, a method of using Normal inverse gaussian distribution, and an asymptotic method of using nonlinear regression through simulation experiments and real KOSPI200 option data. We assume the variance gamma model in the simulation experiment, which has a closed-form solution for the option price among the pure jump Lévy processes. As a result, we found that methods to approximate an option price directly from the approximate price formula are better than methods to approximate option prices through the approximate risk-neutral density function. The method to approximate option prices by nonlinear regression showed relatively better performance among those compared.

Keywords: asymptotic option price, Gram-Charlier expansion, Lévy process, variance gamma, normal inverse gaussian

1. 서론

옵션의 가격은 주어진 수익함수(payoff)를 현재시점으로 할인하여 위험중립 확률측도 하에서 기대값을 취함으로써 얻어질 수 있다. 특히, 기초자산의 가격이 따르는 확률과정이 블랙-숄즈 모형에서 가정되는 기하 브라운 운동을 따르는 경우에는 정규분포를 사용하여 쉽게 옵션의 가격을 계산할 수 있게 된다. 그러나 기초자산의 가격이 기하 브라운 운동을 따르지 않는 경우 블랙-숄즈 모형을 이용하여 옵션의 가격을 결정하게 되면 오차가 발생한다. 블랙-숄즈 모형은 옵션가격의 결정모형으로서 큰 성공을 거두었지만, 경험적으로 관측되는 기초자산의 로그 수익률 분포의 첨도가 정규분포에 비해 많이 크다든지, 옵션의 가격을 결정할 때 행사가격에 따라 변동성 스마일(volatility smile) 현상이 발생한다든지 하는 등 모형의 단점도 잘 알려져 있다.

This research was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (NRF-2013 R1A1A3012819).

[1]Corresponding author: Department of Statistics, Korea University, 145 Anam-ro, Seongbuk-Gu, Seoul 02841, Korea. E-mail: sjsong@korea.ac.kr

블랙-숄즈 모형이 실제 시장에서 잘 맞지 않는다는 것이 명백하다 하더라도, 그 가격결정의 방법이 매우 간단하면서도 강건해서 모형이 어느 정도 다른 경우에도 좋은 근사값을 제공하기 때문에 아직도 많이 사용되고 있다. 실제 시장에서 뿐만 아니라 학계에서도 블랙-숄즈의 가격은 언제나 벤치마크가 되는 값들을 제공한다. 그런 의미에서, 블랙-숄즈 가격은 참값에 대한 1차적인 근사값을 준다고 볼 수 있을 것이다. 이러한 맥락에서, 블랙-숄즈 가격을 선도항(leading term)으로 하여 그 오차를 보정하는 방식으로 옵션의 가격을 결정하는 방법이 여러 가지로 시도되어 왔다. 예를 들어, Jarrow와 Rudd (1982), Madan과 Milne (1994), Corrado와 Su (1997), Rompolis와 Tzavalis (2007), Song 등 (2011) 등의 연구에서 확장을 통한 근사식으로 옵션의 가격을 결정하는 방법들을 제시하였다.

Jarrow와 Rudd (1982)는 로그수익률의 위험중립 확률밀도함수를 일반화 Edgeworth 급수방법으로 확장하여 A-type Gram-Charlier의 방법을 옵션의 가격결정에 이용하였다. Corrado와 Su (1997)는 Jarrow와 Rudd (1982)의 급수확장을 S&P500 index option에 적용하였는데, 옵션 가격을 통해 표현되는 위험중립 확률분포가 음의 왜도와 양의 초과첨도(excess kurtosis)를 가지며 Jarrow와 Rudd의 근사방법이 변동성 스마일 현상을 줄여주고 있음을 확인하였다. Madan과 Milne (1994)도 헤르미트 다항식을 직교정규기저로 사용하여 옵션가격에 대한 급수확장식을 얻어내었다. Rompolis와 Tzavalis (2007)는 C-type Gram-Charlier 급수확장을 이용하여 Edgeworth 형태의 급수확장이 음의 확률값을 만들어내는 문제를 해결하였고 이를 이용한 옵션의 가격결정을 가능하게 하였다. 이 밖에도 Aït-Sahalia (1999, 2002)로 대표되는 전이확률밀도함수에 대한 급수확장의 결과들이 많이 있으나 대부분 위험중립 확률측도에서가 아니라 실제 관측하는 확률측도를 고려하고 있어 로그 수익률 자체를 자료로 하여 추정한다. 하지만 옵션의 가격결정 문제에 있어서는 위험중립 확률측도를 근사해야 하기 때문에 시장의 옵션가격을 자료로 사용하여야 하는 차이점이 있다. 최근에는 전이확률밀도함수에 대한 급수확장과 같은 방식을 옵션 가격에 적용하여 근사적 닫힌 해의 형태로 가격을 구하는 방법도 연구되고 있다 (Xiu, 2014).

블랙-숄즈 모형에 대한 대안들 가운데 다른 하나는 블랙-숄즈 모형에서 가정되는 기하브라운 운동을 일반적인 레비 확률과정으로 확장시키는 것이다. 기하브라운 운동 또한 레비 확률과정의 한 예가 되므로 이러한 확장은 매우 자연스러운 것이라고 할 수 있다. 로그 수익률의 모형화를 위하여 유한 활동도(finite-activity)와 무한 변동성(infinite variation)을 갖는 순수 점프 레비 확률과정을 중심으로 많은 연구가 이루어져 있고, 내재변동성의 스마일 현상이나 로그 수익률 분포의 두꺼운 꼬리 등 기하브라운 운동으로 설명될 수 없는 많은 부분이 레비 확률과정으로 설명될 수 있음이 밝혀져 있다 (Madan과 Seneta, 1990; Geman, 2002; Carr 등, 2002; 등).

기초자산의 로그 수익률의 분포가 레비 확률과정으로 잘 설명된다 하더라도 기하레비 모형을 사용하게 되면 확률밀도함수와 옵션가격의 결정식이 일반적으로 닫힌 해의 형태로 존재하지 않는다는 단점이 있다. 그래서 옵션가격 결정을 위한 모수 추정과 계산이 어려워지는 경향이 있으나 Variance gamma(VG) 모형에서는 확률밀도함수와 옵션가격의 결정식이 닫힌 해의 형태로 존재하기 때문에 계산이 다소 쉬워진다. Madan 등 (1998)에서는 기초자산의 로그 수익률의 분포를 Variance gamma 모형으로 가정하고 확률밀도함수와 유럽식 콜옵션의 가격 결정식을 닫힌 해의 형태로 제시하였다. 또한 실제 시장자료를 통하여 블랙-숄즈 모형가격보다 더 시장가격에 가깝게 추정할 수 있음도 보였다.

또다른 순수 점프 레비 확률과정인 Normal inverse gaussian(NIG) 모형에서도 확률밀도함수가 닫힌 해의 형태로 존재한다. 이 경우 모수의 갯수가 4개로 분포적합이 일반적으로 좋고, Eriksson 등 (2009)에 의하면 다양한 기초자산의 분포를 적절히 적합할 수 있으며 옵션 가격을 이용하여 위험중립 확률분포를 쉽게 근사할 수 있다. 또 이들은 NIG 분포를 이용하면 상대적으로 간단한 계산을 통해 C-type Gram-Charlier와 비슷한 수준으로 옵션가격을 근사할 수 있음도 보였다.

Song 등 (2001)에서는 위험중립 확률측도 하에서 블랙-숄즈 모형으로 수렴하는 기하 레비 모형을 고려

하여 이 수렴과정을 통해 옵션가격을 근사하였다. 다른 급수확장 방법과는 달리 위험중립 확률밀도함수를 근사하지 않고 옵션가격의 결정공식을 근사적으로 찾은 후, 필요한 모수를 시장가격을 통해 비선형 회귀분석의 방법으로 추정하여 가격을 계산하였다.

이 논문에서는 옵션의 가격을 결정하기 위해 이와 같은 여러 가지 근사적 가격결정 방법을 비교하고자 한다. 유럽식 콜옵션의 가격식이 닫힌 해의 형태로 존재하는 VG 과정을 생성하여 근사적 가격결정 방법의 성능을 비교하고, 실제 KSOPI200 옵션자료에서의 결과를 살펴보았다. 2절에서는 고려하고자 하는 근사방법들을 소개하고, 3절에서는 모의실험과 그 결과를 설명한다. 4절에서는 3절에서 살펴본 결과를 KOSPI200 시장 거래자료를 통해 확인하였다.

2. 근사방법

2.1. A-type Gram-Charlier

Jarrow와 Rudd (1982)는 옵션의 가격 결정을 위해 다음과 같이 A-type Gram-Charlier 방법(이하 GCA)을 제안하였다. 근사하고자 하는 위험중립 확률측도 하에서의 목적분포를 F라 하고 목적분포를 근사하기 위한 기저분포를 A라 하자. 두 분포의 밀도함수가 존재하고 각각을 f와 a라 표현하면 f는 목적분포의 누율(cumulant), $\kappa_j(F)$와 근사분포의 누율, $\kappa_j(A)$를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
f(x) = a(x) &+ \frac{(\kappa_2(F)-\kappa_2(A))}{2!}\frac{d^2a(x)}{dx^2} - \frac{(\kappa_3(F)-\kappa_3(A))}{3!}\frac{d^3a(x)}{3x^3} \\
&+ \frac{3(\kappa_2(F)-\kappa_2(A))^2}{4!}\frac{d^4a(x)}{dx^4} + \epsilon(x),
\end{aligned}
$$

여기서 ϵ은 잔여오차를 뜻하며, 모든 차수의 적률이 존재하는 경우 항의 갯수가 늘어나면서 0으로 수렴한다. 여기서 κ_1의 항이 없는 것은 위험중립 확률측도 하에서는 모든 거래가능한 자산의 기대수익률이 무위험자산의 수익률과 같다는 조건이 있으므로 어떤 분포를 쓰더라도 1차 적률은 같다고 가정할 수 있기 때문이다($\kappa_1(F) = \kappa_1(A)$). 블랙-숄즈 모형의 경우 로그 수익률의 분포를 정규분포로 가정하고 있으므로 근사분포를 정규분포로 쓰는 것이 자연스러우며, 이 경우 정규분포의 모수가 두 개이므로 사용할 분산의 값도 결정해야 하는데, Jarrow와 Rudd (1982)는 세 가지 방법을 제안하고 있다. 이 중 첫 번째 방법인 $\kappa_2(F) = \kappa_2(A)$로 두는 것이 Rompolis와 Tzavalis (2007)과 Eriksson 등 (2009) 등의 논문에서 근사방법을 비교하는 데에 공히 사용되고 있으므로, 이 논문에서도 같은 방법을 사용하기로 한다.

Eriksson 등 (2009)에서는 GCA와 관련된 근사법으로 Edgeworth 확장도 다루고 있는데, $\kappa_2(F) = \kappa_2(A)$를 가정하여 다음과 같이 쓸 수 있다. 평균이 μ, 분산이 σ^2, 왜도가 S, 초과첨도(excess kurtosis)가 K인 확률변수 X에 대해 $Z = (X-\mu)/\sigma$라 하면, X의 확률밀도함수는

$$
f(x) = g(x)\left(1 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m!}E_{X,m}H_m(z)\right)
$$

와 같이 확장할 수 있고, 이 때 $g(x)$는 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 정규분포의 확률밀도함수, $H_m(\cdot)$은 헤르미트 다항식, $E_{X,m}$은 헤르미트 적률($E_{X,m} = E(H_m(Z))$)이다. $m = 4$까지로 GCA 근사를 하면

$$
f(x) = g(x)\left(1 + \frac{1}{6}S\left(z^3 - 3z\right) + \frac{1}{24}\left(z^4 - 6z^2 + 3\right)\right)
$$

이 되고 Edgeworth 근사를 하면

$$
f(x) = g(x)\left(1 + \frac{1}{6}S\left(z^3 - 3z\right) + \frac{1}{24}\left(z^4 - 6z^2 + 3\right) + \frac{1}{72}S^2\left(z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15\right)\right)
$$

이 된다 (Barndorff-Nielsen과 Cox, 1989). 통상 Edgeworth 근사는 랜덤 표본의 표준화된 합의 분포를 근사하기 위해서 사용되고, 표본의 크기가 무한대로 갈 때 오차항의 크기가 제어되지만 여기서 사용되는 Edgeworth 근사는 일반적으로 오차항의 크기를 제어하기 어렵다.

Edgeworth와 GCA는 계산이 빠르고 간단하지만 정규분포 근처로 근사하기 때문에 실제 분포형태가 정규분포가 크게 차이가 날 경우 근사의 정확성이 떨어질 수 있고, 첨도와 왜도가 정규분포에서 일정 범위 이상 벗어나면 음의 확률밀도값이 나타날 수 있다는 단점이 있다.

2.2. C-type Gram-Charlier

Rompolis와 Tzavalis (2007)은 Charlier (1928)에 의해 고안된 C-type Gram-Charlier 급수확장을 이용하여 위험중립 확률측도하에서 확률밀도함수를 근사하는는 방법(이하 GCC)을 다음과 같이 제안하였다.

$$f(x) = \frac{\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\delta_m H_m(z)\right)}{\int \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\delta_m H_m(z)\right)},$$

δ_m은 급수확장의 계수로서 그 정의는 Rompolis와 Tzavalis (2007)에 자세히 나와있다. GCC는 음의 확률밀도값이 나타나는 경우를 방지하고 목적분포가 정규분포에서 멀리 떨어져 있는 경우 GCA보다 좋은 성능을 보인다. 그러나 계산이 복잡하고 추정해야 하는 적률값이 많다는 단점이 있다.

2.3. NIG 분포

레비확률과정의 하나인 Generalized Hyperbolic(GH) 확률과정은 주가의 수익률 과정을 비교적 정확하게 표현할 수 있다고 알려져 있는데 (Eberlein과 Keller, 1995), 그 중 특별한 형태인 Normal inverse gaussian(NIG) 확률과정은 거의 모든 GH 확률과정의 형태를 비슷하게 모사할 수 있다 (Barndorff-Nielsen, 1998). NIG 확률밀도함수는 평균, 분산, 왜도, 첨도와 관계된 4개 모수를 가지며, 적률의 추정값만 있으면 근사분포를 간단하게 추정할 수 있다. Eriksson 등 (2009)은 NIG 분포로 위험중립 확률밀도함수를 추정하는 것을 제안하고, 자산 가격이 Heston model (Heston, 1993)을 따를 때의 모의실험에서 NIG 분포에 의한 근사가 GCA보다 밀도함수를 더 잘 추정하며 GCC와는 비슷한 성능을 보임을 확인하였다. 위험중립 확률측도 하에서의 적률 추정은 Bakshi 등 (2003)의 방법을 따라 외가격(out-of-the-money; OTM) 콜옵션과 풋옵션의 가격을 이용하였다. 3절의 모의실험에서 이 방법은 NIG라는 이름으로 표기하였다.

2.4. 비선형 회귀식

Song 등 (2011)은 위험중립 확률측도에서의 가격과정을 순수 점프 레비 확률과정으로 가정하고, 옵션의 근사적 가격결정식을 유도하였다. 할인된 옵션의 수익함수의 위험중립 기대값을 블랙-숄즈 가격에서 테일러 확장하여 근사식을 얻고, 계수들은 시장에서 관측된 옵션가격들을 자료로 하여 비선형 회귀를 적합시켜 추정하였다. Gram-Charlier 방법이나 NIG 방법과 달리 밀도함수를 추정하지 않고 곧바로 옵션의 가격을 근사시키는 방법이다. 자세한 내용은 Song 등 (2011)을 참조하도록 한다. 모의실험과 자료분석에 있어서 이 방법은 Asymp라는 이름으로 표기하였다.

3. 모의실험

3.1. Variance gamma 확률과정

레비 확률과정을 사용하는 많은 경우 기초자산 가격의 확률과정은 다음과 같은 기하레비 모형으로 가정된다. $X = \{X_t,\, t \geq 0\}$가 레비 확률과정을 따를 때

$$S_t = S_0 \exp(X_t).$$

1차원 레비 확률과정은 특성 트리플렛(characteristic triplet) 또는 레비 트리플렛(Lévy triplet)이라고 부르는 $(\gamma, \eta, k(dx))$에 의해 표현되는데, 이 레비 트리플렛을 가지고 X_t의 특성함수를 아래의 $\psi(u)$ 함수를 써서 $e^{t\psi(u)}$로 표현할 수 있다(Lévy-Khintchine 공식).

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\eta^2 u^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\exp(iux) - 1 - iuxI_{\{|x|<1\}}\right) k(dx),$$

여기서 $\gamma \in \mathbb{R}$, $\eta^2 \geq 0$이고, k는 0을 제외한 실수에서 정의되는 측도로서 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 \wedge x^2) k(dx) < \infty,$$

여기서 $k(dx)$는 레비측도라고 불리며 X의 점프 부분을 통제하게 된다.

모수가 σ, ν, θ인 Variance gamma 과정은 레비 트리플렛 $(\gamma, 0, k(dx))$를 가지며, γ와 $k(dx)$의 형태는 $C = 1/\nu$, $G = (\sqrt{(1/4)\theta^2\nu^2 + (1/2)\sigma^2\nu} - (1/2)\theta\nu)^{-1}$, $M = (\sqrt{(1/4)\theta^2\nu^2 + (1/2)\sigma^2\nu} + (1/2)\theta\nu)^{-1}$에 대해 다음의 식과 같다.

$$\gamma = \frac{-C(G(\exp(-M) - 1) - M(\exp(-G) - 1))}{MG},$$

$$k_X(x)dx = \frac{\exp(\theta x/\sigma^2)}{\nu|x|} \exp\left(-\frac{\sqrt{2/\nu + \theta^2/\sigma^2}}{\sigma}|x|\right) dx.$$

또, Variance gamma 과정 $X(t; \sigma, \nu, \theta)$는 추세가 θ이고 변동성이 σ인 브라운 운동 $b(t; \theta, \sigma)$와 평균이 1이고 분산이 ν인 감마과정 $\gamma(t; 1, \nu)$에 의하여

$$X(t; \sigma, \nu, \theta) = b(\gamma(t; 1, \nu); \theta, \sigma)$$

와 같이 표현될 수 있고, 평균이 μ이고 분산이 ν인 감마과정 $\gamma(t; \mu, \nu)$에 대해 $g = \gamma(t + h; \mu, \nu) - \gamma(t; \mu, \nu)$의 확률밀도함수는 평균이 μh이고 분산이 νh인 감마 밀도함수와 동일하다. 시간 t에서 Variance gamma 과정, $X(t)$의 확률밀도함수는 X와 g의 결합 밀도함수를 g에 대해 적분하여 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$f_{X(t)}(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(x - \theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right) \frac{g^{\frac{t}{\nu}-1} \exp(-g/\nu)}{\nu^{\frac{t}{\nu}} \Gamma(t/\nu)} dg.$$

기초자산의 가격이 위험중립 확률측도 하에서 기하레비 모형을 따를 때, 유럽식 콜옵션의 가격은 닫힌 해의 형태로 표현된다 (Madan 등, 1998). Variance gamma과정을 포함한 레비 확률과정, 특별히 금융에서 사용되는 레비 확률과정에 대한 자세한 것은 Cont와 Tankov (2004) 또는 Schoutens (2003)를 참조할 수 있고, 보다 일반적인 이론에 대해서는 Sato (1999)를 참조할 수 있다.

3.2. 모의실험

이 논문의 주된 관심사는 옵션의 가격을 결정하고자 하는 것이고, 이를 위해 가격근사의 방법들을 비교하는 것이다. 고려 대상이 된 근사방법에는 두 가지 접근방식이 있었다. 한 가지는 위험중립분포의 확률밀도함수를 먼저 근사하고, 그 밀도함수를 이용하여 할인된 수익함수의 기대값을 구함으로써 옵션의 가격을 근사하는 방법이고(이하 RNM 방법이라 표기함) 다른 하나는 이론적으로 옵션의 가격근사식을 직접 얻어서 이를 이용하여 근사하는 방법(이하 OPTIM 방법이라 표기함)이다. 첫 번째 접근방법을 이용하면 모의실험에서 옵션가격의 참값과 근사값을 비교할 수 있을 뿐 아니라 위험중립 확률의 참분포와 근사분포를 비교할 수도 있다. Edgeworth, GCA, GCC, NIG는 모두 RNM 방법으로 계산이 가능하고, GCA와 Edgeworth는 근사가격식이 유도되어 있으므로 OPTIM 계산방법도 가능하다. Asymp의 경우에는 적률을 요구하지 않을뿐더러 분포를 근사하지 않고 근사가격식만 유도하므로 OPTIM으로 계산한다. 이 논문에서 고려한 GCA, Edgeworth, Asymp의 근사가격식은 모두 블랙-숄즈 가격을 선도항으로 갖고 수정항들이 더해지는 형태를 갖는다.

모수로 적률을 요구하는 근사방법의 경우, 2.3절에서 설명한 바와 같이 Bakshi 등 (2003)에서 제시된 조건부 위험중립적률 추정공식을 이용하여 적률을 추정하여 분포를 근사할 수 있다. 이 추정공식을 이용하려면 동일 만기일을 갖는 OTM 옵션가격이 행사가격에 대해 연속적으로 존재하는 것을 가정하게 된다. 그러나 현실적으로 이용할 수 있는 옵션가격의 수에는 한계가 있으므로 근사적으로 계산할 수 밖에 없다. 한편, 분포근사식으로부터 근사가격식이 직접 유도되는 경우에는 모수를 추정하기 위해 옵션가격 자료를 이용하여 비선형최소제곱법을 이용하였다. GCA나 Edgeworth의 OPTIM 방법을 사용할 때, 비선형 최소제곱법으로 모수를 추정하게 되면 추정된 모수를 써서 다시 확률밀도함수를 근사할 수 있으며 3.3절에서 RNM 방법과 OPTIM 방법 두 경우에 대해 모두 분포의 근사결과를 살펴보았다.

3.3절과 3.4절에서, 기초자산의 가격과정이 위험중립 확률분포에서 Variance gamma 과정을 따른다고 가정하고 콜옵션 가격의 자료를 생성하였다. 풋옵션의 가격은 풋-콜 짝짓기 공식을 이용하여 구하였다. 현재시점의 기초자산 가격은 $S_0 = 200$으로 하였고, 무위험 이자율은 $r = 0.05$, 만기기간은 $t = 0.246$(90일)로 하였다. 행사가격 구간은 $[1, 400]$이며 행사가격 간 간격을 1로 하여 옵션가격을 계산하였고, 모수는 높은 첨도와 음의 왜도를 갖는 분포 형태를 모사하도록 $\sigma = 0.3$, $\theta = -0.6$, $\nu = 0.3$으로 설정하였다. 이러한 설정에서 로그수익률, 즉 $\log(S_t/S_0)$의 위험중립 확률측도에서의 분포를 근사하였는데, 모의생성된 목적분포는 높고 뾰족한 봉우리, 급격한 경사면, 봉우리 왼쪽과 오른쪽의 분명한 경사도 차이, 그리고 극단값에서 상대적으로 두꺼운 꼬리를 갖는 것으로 나타난다. 만약 동일분산의 정규분포를 목적분포로 가정하면, 평균 부근과 분포가 치우쳐진 방향에서는 실제보다 확률비중을 낮게 평가하고 반대방향에서는 높게 평가하게 된다.

3.3. 분포근사 결과

근사분포의 적합도를 비교하기 위해 평균절대오차와 평균제곱오차 L^1, L^2를 다음과 같이 정의하고 (Eriksson 등, 2009), Table 3.1에서 결과를 비교하였다.

$$L^1 = \int \left| f(x) - \hat{f}(x) \right| dx, \qquad L^2 = \int \left(f(x) - \hat{f}(x) \right)^2 dx.$$

Table 3.1을 보면, RNM 방법에서 GCC와 NIG가 GCA와 Edgeworth에 비해 확연히 목적분포에 가까운 것으로 나타난다. 다만 평균 부근에서는 OPTIM 방법으로 계산한 GCA의 적합도가 높다. 평균 부근으로 정의한 $[-0.2, 0.2]$ 구간은 미래의 주식가격이 현재가격의 약 80%에서 120%까지 되는 경우로서, KOSPI200 옵션 시장에서 지수가 200 근처일 때 거래가 빈번하게 이루어지는 행사가격 $[160, 240]$ 구간

Table 3.1. Mean absolute error and mean squared error for the approximate density function

Range	Type	Approx. method	MAE(L^1)	MSE(L^2)
All	RNM	Edgeworth	0.7737	0.7180
		GCA	0.9516	1.0786
		GCC	0.4748	0.4181
		NIG	0.4350	0.4386
	OPTIM	Edgeworth	0.5829	0.4470
		GCA	0.5290	0.3142
Vicinity of mean	RNM	Edgeworth	0.4032	0.5267
		GCA	0.4859	0.7721
		GCC	0.2273	0.2646
		NIG	0.3341	0.4257
	OPTIM	Edgeworth	0.3430	0.3921
		GCA	0.2166	0.1947

Vicinity of mean: $[-0.2, 0.2]$
MAE = mean absolute error, MSE = mean squared error, GCA = A-type Gram-Charlier,
GCC = C-type Gram-Charlier, NIG = normal inverse Gaussian.

과 관련성이 크므로 옵션가격의 결정에 있어서 타구간에 비해 상대적으로 중요한 의미를 갖는다.

Figure 3.1의 첫 두 패널은 RNM 방법에 의해 추정된 근사분포를 보여준다. GCA, Edgeworth의 근사분포는 $[-0.5, 0.2]$ 구간과 $[0.25, 0.5]$ 구간에서 음의 확률밀도값이 나타나고 있다. GCC는 음의 확률값이 나타나지 않아 상대적으로 목적분포에 더 가까우나, 비대칭의 두꺼운 꼬리의 형태에서 차이를 보인다. 이에 비해 NIG 방법은 상대적으로 꼬리의 형태를 잘 모사하고 있어 전체적인 위험중립분포의 모양을 근사하는데 있어서 좋은 결과를 보인다. 세번째 패널은 OPTIM 계산방법에 의한 GCA와 Edgeworth 근사분포이다. RNM 방법에 비해 목적분포와 모양은 다르지만 평균적인 확률밀도값 차이를 줄인다. RNM 계산방법에 비해 평균 부근의 적합도가 크게 높게 나타났으나 (Table 3.1) 음의 확률값을 산출하고 있고 전체적인 모양도 목적분포와 크게 달라 적절한 분포추정이라 하기는 어렵다.

3.4. 가격근사 결과

모형가격의 적합도를 측정하기 위해 APE, AAE, RMSE를 다음과 같이 정의하였다 (Schoutens, 2003). AAE는 평균절대오차이고, APE는 평균절대오차를 옵션의 평균가격에 대한 비로 나타낸 것이며, RMSE는 제곱근 평균제곱오차이다.

$$\mathrm{APE} = \frac{1}{\text{옵션가격의 평균}} \sum \frac{|\text{시장가격} - \text{모형가격}|}{\text{옵션갯수}},$$
$$\mathrm{AAE} = \sum \frac{|\text{시장가격} - \text{모형가격}|}{\text{옵션갯수}},$$
$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\sum \frac{(\text{시장가격} - \text{모형가격})^2}{\text{옵션갯수}}}.$$

Table 3.2는 각 근사방법들의 적합도를 계산한 것이다. 계산범위는 행사가격 [160, 240] 구간으로 거래가 빈번한 구간이다. 표에 나타난 결과에 의하면 모든 측도에서 RNM 계산방법보다 OPTIM 계산방법의 적합도가 높은 것을 알 수 있다. Edgeworth와 GCA를 살펴보면 RNM에서는 APE가 약 12%, 14%이지만 OPTIM에서는 11%, 2%으로 줄어들고 있으며 다른 측도에서도 같은 현상이 나타난다. RNM

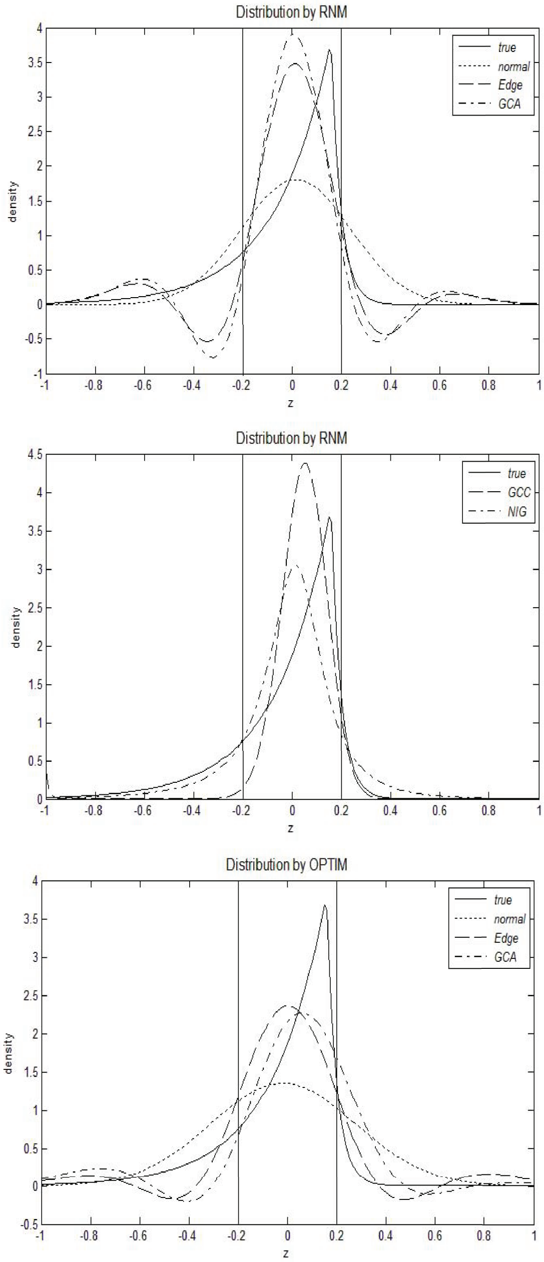

Figure 3.1. Estimated density by RNM/OPTIM.

계산방법이 분포근사 측면에서는 이론적으로도 타당하고 적합도도 높지만, 가격근사 측면에 있어서는 직접적으로 가격을 근사하는 OPTIM 계산방법에 비해 근사가격의 오차가 커짐을 알 수 있다. RNM 중에서는 3.3절에서 적절하게 분포를 추정하였던 GCC(APE 7%)와 NIG(APE 9%) 방법의 적합성과가

Table 3.2. Errors in approximating option price

Type	Approx. method	APE	AAE	RMSE
RNM	Normal	0.2618	4.8335	5.2773
	Edgeworth	0.1177	2.1740	2.4716
	GCA	0.1396	2.5785	2.9532
	GCC	0.0699	1.2909	1.5056
	NIG	0.0917	1.6936	1.9263
OPTIM	Black-Scholes	0.1002	1.8506	2.0133
	Edgeworth	0.1072	1.9798	2.1374
	GCA	0.0203	0.3751	0.4174
	Asymp	0.0184	0.3404	0.4080

GCA = A-type Gram-Charlier, GCC = C-type Gram-Charlier, NIG = normal inverse Gaussian.

Edgeworth(APE 12%)와 GCA(APE 14%)에 비해 좋았다. 그러나 OPTIM GCA와 Asymp은 그보다 도 월등한 적합성과를 보인다. 그중에서도 Asymp이 APE 1.84%로 가장 우수한 것으로 나타났다.

4. KOSPI200 옵션 가격자료

모의실험에서 자료가 일반적인 시장상황을 반영토록 생성하였으나, 실제 시장에서는 상황이 고정되어 있지 않으므로 어느 시점의 자료를 설정하느냐에 따라 분석결과가 달라질 수 있다. 본 절에서는 위험중립확률 분포가 상대적으로 정규분포와 거리가 멀고 분포모양의 변화가 큰 시장환경을 불안정시장, 그 반대의 경우를 안정 시장으로 정의하고, 각 경우를 대표할 수 있는 두 시점의 KOSPI200지수 콜옵션 자료를 고려하였다. 불안정 시장으로는 내표본으로 2008년 10월 17일 금요일자료, 외표본으로는 다음 거래일인 20일 월요일 자료를 사용하였다. 이 시기는 경제전망이 엇갈리던 시기로 KOSPI200 지수 과정의 변화가 크고 블랙-숄즈 가격 오차와 내·외표본 간 옵션가격 차이가 크다. 한편, 2009년 11월 18일 수요일과 19일 목요일 자료는 블랙-숄즈 가격과 차이가 적고 내·외표본 간 옵션가격 차이도 작아 안정 시장 자료로 사용하였다. 내표본의 경우는 모수추정과 옵션가격 계산에 같은 자료를 사용하게 되고, 외표본의 경우 앞선 거래일의 자료로 모수를 추정하고 그 모수를 가지고 옵션가격을 계산하는 것이다. 적합과 APE, AAE, RMSE의 계산에 있어서, 해당일에 공시된 모든 행사가격과 만기에 대하여 옵션의 종가를 사용하였다. 2008년 10월 17일에는 만기일이 28, 58, 81, 147일이었고, 10월 20일에는 만기일이 25, 55, 78, 144일, 2009년 11월 18일에는 만기일이 23, 58, 86, 114일, 19일에는 만기일이 22, 57, 85, 113일이었다. 무위험 이자율 r로는 해당일의 국고채 3년 수익률을 사용하였고, 블랙-숄즈 가격을 계산할 때 필요한 모수인 변동성은 3.2절에서 언급된 바와 같이 다른 OPTIM 방법들처럼 옵션가격 자료를 이용하여 비선형 최소제곱법으로 추정하였다.

불안정 시장과 안정시장에서 OPTIM 방법에 의해 가격을 근사한 결과가 Table 4.1과 4.2에 나타나 있다. RNM 방법은 계산에 현실적 제약이 크고 모의실험에서 확인한 바와 같이 가격 근사성과가 떨어져 제외하였다. 안정시장 (Table 4.2)의 내표본에서 블랙-숄즈 가격의 APE가 4.8%로 불안정 시장 (Table 4.1) 19.61%에 비해 현저히 작다. 불안정 시장의 내표본 가격오차를 살펴보면 모의실험에서 살펴본 바와 같이 GCA가 가장 작으나(APE 10%), 외표본에서 다른 근사모형들에 비해 APE가 크게 상승하여 내표본과는 반대로 가장 오차가 커졌다(22%). 외표본 시장 상황이 내표본 시장상황에 비해 안정되어 선도항인 블랙-숄즈 가격의 오차가 감소하고 있음에도 GCA는 오차가 커진 것이다. 이는 GCA 방법의 과적합 경향을 보여준다고 할 수 있다. Asymp의 경우에는 내표본에서 적합성과가 좋지 않았으나(APE 20.25%) 외표본에서는 높은 적합도를 보였다(16.21%). 이는 블랙-숄즈 가격의 오차 감소분(2.6%)을

Table 4.1. Errors in approximating option price(KOSPI200 option, Oct. 2008, unstable market)

Type	Approx. method	APE	AAE	RMSE
In-sample	Black-Scholes	0.1961	1.6822	2.3059
	Edgeworth	0.1700	1.4582	1.8647
	GCA	0.1079	0.9259	1.0765
	Asymp	0.2025	1.7371	2.2110
Out-of-sample	Black-Scholes	0.1700	1.6080	2.2965
	Edgeworth	0.2186	2.0681	2.7766
	GCA	0.2227	2.1070	3.1410
	Asymp	0.1621	1.5339	2.3673

GCA = A-type Gram-Charlier.

Table 4.2. Errors in approximating option price(KOSPI200 option, Nov. 2009, stable market)

Type	Approx. method	APE	AAE	RMSE
In-sample	Black-Scholes	0.0480	0.6144	0.8182
	Edgeworth	0.0460	0.5880	0.6908
	GCA	0.0317	0.4053	0.5622
	Asymp	0.0318	0.4062	0.5296
Out-of-sample	Black-Scholes	0.0367	0.5162	0.8042
	Edgeworth	0.0341	0.4800	0.6311
	GCA	0.0247	0.3478	0.5145
	Asymp	0.0285	0.4006	0.5121

GCA = A-type Gram-Charlier.

제외하고도 1.4% 더 감소한 수치이다. 안정 시장에서는 내표본에서 GCA의 평균가격오차가 가장 작으며(3.17%), 외표본에서도 가장 작았다(2.27%). 다음으로는 Asymp이 안정 시장 내표본에서 APE 3.18%로 GCA와 비슷하였고, 외표본에서도 2.85%로 GCA만큼 작은 오차를 보였다. 다른 측도들에 대해서도 비슷한 결과를 관찰할 수 있다.

5. 결론

이 논문에서 우리는 블랙-숄즈 옵션가격을 보정하기 위해 사용할 수 있는 근사적 옵션가격 결정방법들을 일반적인 시장상황을 모사한 모의실험과 KOSPI200 옵션가격 자료에 적용하여 비교, 평가하였다. 모의실험은 블랙-숄즈 모형의 확장형태인 레비모형 가운데 옵션가격이 닫힌 형태로 존재하는 Variance gamma 모형에서 이루어졌으며, Gram-Charlier 방법은 분포함수를 먼저 근사하는 방법이기 때문에 분포함수의 근사를 먼저 살펴보고, 옵션가격의 근사를 살펴보았다. 분포함수를 근사했을때, 적률추정 방법(RNM)에서 GCC와 NIG방법이 Edgeworth와 GCA방법보다 좋은 성능을 보였으나, 상대적으로 중요성이 높은 평균부근의 근사에서 OPTIM 방법으로 모수를 추정한 경우가 적률추정 방법에 의한 근사보다 좋다는 것을 알 수 있었다. 옵션 가격의 근사에서도 OPTIM방법에 의해 직접 근사하는 방법이 분포를 먼저 근사하고 기대값을 통해 가격을 계산하는 RNM방법보다 좋은 결과를 보였다. 실제 KOSPI200 옵션가격 자료를 이용하여 OPTIM 방법들을 비교했을 때, 내표본에서는 GCA의 결과가 가장 좋았으나 불안정시장의 외표본에서는 Asymp의 결과가 더 좋았다. 안정시장에서의 외표본 결과는 GCA와 Asymp의 결과가 비슷한 성능을 보였다. Asymp방법은 모의실험에서도 좋은 적합성과를 보여주고 있다.

Asymp방법은 분포를 근사하는 방법은 아니므로 분포함수의 근사를 위해서는 GCC나 NIG방법이 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 그러나 대부분의 경우 옵션가격의 근사가 주요한 목적이므로 가격근사를 위해서는 OPTIM을 통한 GCA와 Asymp이 장점이 있다. 단, GCA는 음의 확률을 제공하는 단점이 있으므로 시장변화가 크고 불안정할 경우 예측성과가 좋지 않을 수 있다. 불안정 시장으로 간주한 시장자료에서 외표본 적합도가 크게 떨어지는 것이 이를 뒷받침한다. 결과적으로, 옵션가격의 결정이 최종적 근사목표일 때 Asymp이 비교한 방법들 중에서 안정적으로 가격을 잘 근사해 줄 것으로 기대된다.

References

Aït-Sahalia, Y. (1999). Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions, *Journal of Finance*, **54**, 1361–1395.

Aït-Sahalia, Y. (2002). Maximum-likelihood estimation of discretely-sampled diffusions: a closed-form approximation approach, *Econometrica*, **70**, 223–262.

Bakshi, G., Kapadia, N., and Madan, D. (2003). Stock return characteristics, skew laws, and the differential pricing of individual equity options, *The Review of Financial Studies*, **16**, 101–143.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1998). Processes of normal inverse gaussian type, *Finance and Stochastics*, **2**, 41–68.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Cox, D. R. (1989). *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*, Chapman and Hall.

Carr, P., Geman, H., Madan, D., and Yor, M. (2002). The fine structure of asset returns: An empirical investigation, *Journal of Business*, **75**, 305–333.

Charlier, C. (1928). A new form of the frequency function, *Maddalende fran Lunds Astronomiska Observatorium*, **II**, 51.

Cont, R. and Tankov, P. (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC.

Corrado, C. and Su, T. (1997). Implied volatility skews and stock index skewness and kurtosis implied by S&P500 index option prices, *Journal of Derivatives*, **4**, 8–19.

Eberlein, E. and Keller, U. (1995). Hyperbolic distributions in finance, *Bernoulli*, **1**, 281–299.

Eriksson, A., Ghysels, E., and Wang, F. (2009). The normal inverse Gaussian distribution and the pricing of derivatives, *The Journal of Derivatives*, **16**, 23–37.

Geman, H. (2002). Pure jump Lévy processes for asset price modeling, *Journal of Banking and Finance*, **26**, 1297–1316.

Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, **6**, 327–343.

Jarrow, R. and Rudd, A. (1982). Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes, *Journal of Financial Economics*, **10**, 347–369.

Madan, D., Carr, P., and Chang, E. (1998). The variance gamma process and option pricing, *European Finance Review*, **2**, 79–105.

Madan, D. and Milne, F. (1994). Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis, *Mathematical Finance*, **4**, 223–245.

Madan, D. and Seneta, E. (1990). The VG model for share market returns, *Journal of Business*, **63**, 511–524.

Rompolis, L. S. and Tzavalis, E. (2007). Retrieving risk neutral densities based on risk neutral moments through a Gram-Charlier series expansion, *Mathematical and Computer Modelling*, **46**, 225–234.

Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press.

Schoutens, W. (2003). *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, John Wiley & Sons, New York.

Song, S., Jeong, J., and Song, J. (2011). Asymptotic option pricing under pure jump Lévy processes via nonlinear regression, *Journal of the Korean Statistical Society*, **40**, 227–238.

Xiu, D. (2014). Hermite polynomial based expansion of European option prices, *Journal of Econometrics*, **179**, 158–177.

Variance gamma 확률과정에서 근사적 옵션가격 결정방법의 비교

이재중[a] · 송성주[a,1]

[a]고려대학교 통계학과

(2015년 12월 15일 접수, 2016년 1월 5일 수정, 2016년 1월 5일 채택)

요 약

옵션의 가격을 결정하는 문제에서 블랙-숄즈 모형이 가지는 단점을 보완하기 위해 블랙-숄즈 가격을 선도항으로 하여 보정항을 구하는 근사적 옵션가격의 결정방법을 고려하였다. 이러한 근사적 가격결정 방법들은 비교적 적은 자료를 가지고 간단한 계산으로 다양한 형태의 위험중립 확률분포에 의한 옵션가격을 계산할 수 있다. 이 논문에서는 일반적으로 관찰되는 시장상황을 모사한 모의실험과 실제 시장에서 관측되는 KOSPI200 옵션가격 자료를 통해 몇 가지 근사방법들의 적합성과를 비교, 평가하였다. 헤르미트 다항식 계열의 Edgeworth 확장과 A-type Gram-Charlier, C-type Gram-Charlier 방법, NIG 분포를 이용하는 방법, 비선형 회귀를 이용한 점근적 근사방법이 고려되었다. 모의실험에서는 순수 점프 레비 확률과정 가운데 옵션가격이 닫힌 해의 형태로 존재하는 Variance gamma 과정을 가정하여 자료를 생성하였다. 모의실험과 실제 자료분석의 결과, 분포함수를 먼저 근사하여 가격을 계산하는 것보다 근사적 가격식을 유도하여 직접 가격을 근사하는 방법들의 성능이 좀 더 좋았으며, 그 가운데 비선형 회귀를 이용한 점근적 근사방법이 상대적으로 좋은 성능을 보였다.

주요용어: 점근적 옵션가격, Gram-Charlier 급수확장, 레비 확률과정, Variance gamma, Normal inverse gaussian

이 연구는 2013년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업 (NRF-2013R1A1A3012819)이며, 제 1저자 이재중의 석사학위논문을 바탕으로 함.

[1]교신저자: (02841) 서울특별시 성북구 안암로 145, 고려대학교 통계학과. E-mail: sjsong@korea.ac.kr