The Korean Journal of Applied Statistics (2016) DOI: http://dx.doi.org/10.5351/KJAS.2016.29.1.171
29(1), 171–180

Comparison of semiparametric methods to estimate VaR and ES

Minjo Kim[a] · Sangyeol Lee[a,1]

[a]Department of Statistics, Seoul National University

(Received December 15, 2015; Revised December 23, 2015; Accepted December 23, 2015)

Abstract

Basel committee suggests using Value-at-Risk (VaR) and expected shortfall (ES) as a measurement for market risk. Various estimation methods of VaR and ES have been studied in the literature. This paper compares semi-parametric methods, such as conditional autoregressive value at risk (CAViaR) and conditional autoregressive expectile (CARE) methods, and a Gaussian quasi-maximum likelihood estimator (QMLE)-based method through back-testing methods. We use unconditional coverage (UC) and conditional coverage (CC) tests for VaR, and a bootstrap test for ES to check the adequacy. A real data analysis is conducted for S&P 500 index and Hyundai Motor Co. stock price index data sets.

Keywords: Value-at-Risk, expected shortfall, CAViaR method, CARE method, Gaussian QMLE, back-testing method

1. 서론

지난 수십 년간 금융 시장은 금융학의 진보, 기술의 발전 그리고 전세계적인 금융 규제 완화 덕분에 양적 성장과 함께 다양하고 고도화된 금융 상품이 등장하게 되었다. 이와 같이 금융 시장이 변화하는 동안 여러 번의 금융 위기가 발생하였는데, 이들 금융 위기는 해당 발생지역만의 지엽적인 문제로 그치지 않고 세계 경제에 치명적인 악영향을 끼치는 범지구적인 문제로 귀결되곤 하였다. 일례로 2007년 발생한 서브프라임 모기지 사태가 그 대표적인 경우인데, 이는 전세계적인 신용경색과 더불어 실물경제에 상당한 악영향을 주었다. 따라서, 이러한 금융 위기에 대한 사전 대비는 반드시 필요하며, 특히 금융 상품의 가격 상승 또는 하락에 의해서 발생하는 위험, 즉 시장 위험을 전반적으로 관리하는 것은 매우 중요한 문제라고 할 수 있다. 통상적으로 시장 위험을 측정하는 방법은 주로 VaR(Value-at-risk)와 ES(Expected Shortfall)이 이용되고 있으며 본 논문에서도 이에 대한 준모수적 방법론을 다룰 것이다.

VaR와 ES를 추정하는 방법은 크게 세 가지로 분류된다 (Manganelli와 Engle, 2004). 첫째, 비모수적 방법. 예를 들어, 금융 상품 수익률에 대한 VaR와 ES를 추정한다고 할 때, 모형 또는 분포 대한 어떠한 가정도 없이 일정 기간 동안 관측된 그 금융 상품의 수익률들의 경험적 분위수로 VaR를 추정하고,

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry Science, ICT and future Planning (No. 2015R1A2A2A010003894).
[1]Corresponding author: Department of Statistics, Seoul National University, 1 Gwanak-ro, Gwanak-Gu, Seoul 08826, Korea. E-mail: jpgrslee@gmail.com

한편 ES는 추정된 VaR 이상의 손실이 발생한 수익률들의 평균으로 추정한다. 비모수적 방법의 단점은 표본의 크기를 정하는 문제가 난해하다는 점인데 과도하게 작은 표본 크기는 표본 오차를 크게하고 필요 이상의 큰 표본은 분포 변화에 빠른 대응을 어렵게 만든다는 것이다. 또한, 실측 자료 분석에서 비모수적 방법의 예측 정확도가 우수하지 않음도 Taylor (2008)을 통해 확인할 수 있다. 둘째, 준모수적 방법. 예를 들어 어떤 주식 수익률이 GARCH 모형을 따른다고 가정 할 때, GARCH 모형의 조건부 분위수로 부터 유도된 CAViaR(conditional autoregressive value at risk) 모형을 가지고 분위회귀를 통해 직접적으로 원하는 수준의 VaR 값을 얻을 수 있다. 또한, ES를 추정할 때는 CARE(conditional autoregressive expectile) 모형을 이용하여 비대칭 최소 제곱 회귀를 통해서 원하는 수준의 ES 값을 직접적으로 얻을 수 있다 (Kim와 Lee, 2016). 이러한 접근 방법은 오차항에 대한 분포 가정이 필요없다. 다른 준모수적 방법으로 극단치 이론을 이용한 방법이 많이 사용되기도 한다. 셋째, 모수적 방법. 이 방법은 주어진 자료에 대한 모형과 오차항의 분포를 가정 한 후 모수를 추정하고 모수의 함수 형태로 표현되는 VaR와 ES에 추정된 모수를 대입함으로써 VaR와 ES를 추정한다. 이 방법의 단점은 잘못된 모형 또는 오차항에 대한 가정이 추정의 정확도를 상당히 손상시킬 수 있다는 점이다. 특히 금융 상품의 수익률과 같이 왜도가 존재하고 분포의 꼬리 부분이 두꺼운 자료를 다룰 때에는 정규분포를 사용하는 것보다는 skew t 분포와 같이 왜도와 두꺼운 꼬리를 설명하기에 적합한 분포를 사용하는 것이 바람직하다.

밑의 2장에서는 VaR와 ES의 준모수적 추정방법들에 대해 설명을 하고, 3장에서는 VaR와 ES 추정에 대한 사후 검정방법에 대한 서술을 하며, 4장에서는 실측 자료 분석을 통해서 준모수적 추정방법들의 성능을 비교할 것이다.

2. VaR와 ES의 준모수적 추정방법

2.1. CAViaR 방법

금융 자료의 대표적인 특성으로서 자기상관성, 이분산성 및 왜도 등이 널리 알려져 있다. 통상적으로 이러한 특성을 가지는 자료를 모델링 하기 위해서 GARCH 유형의 모형들을 사용한다. Engle와 Manganelli (2004)는 조건부 VaR를 추정하기 위하여 여러 GARCH 유형의 모형에서 유도된 조건부 분위수를 이용하여 CAViaR 모형을 제안하였고, 분위 회귀를 통하여 그 모수를 추정하고 VaR 값을 추정하는 방법을 제안하였다. 예를 들어, GARCH$(1,1)$ 모형으로부터 유도된 CAViaR 모형은 다음과 같다. Y_t가 다음과 같은 GARCH$(1,1)$ 모형을 따른다고 하자:

$$\begin{aligned} Y_t &= \sqrt{h_t}\eta_t, \\ h_t &= \omega + \alpha Y_{t-1}^2 + \gamma h_{t-1}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

단, $\eta_t \sim i.i.d.(0,1)$, $\omega \geq 0$, $\alpha > 0$이고 $\beta > 0$이다. GARCH$(1,1)$ 모형으로부터 유도된 Y_t의 주어진 수준 θ에서 조건부 분위수는 다음과 같다:

$$\begin{aligned} f_t(\beta) &= \xi\sqrt{h_t} \\ &= -\sqrt{\beta_1 + \beta_2 Y_{t-1}^2 + \beta_3 f_{t-1}^2(\beta)}. \end{aligned}$$

단, $\beta_1 = \xi^2\omega$, $\beta_2 = \xi^2\alpha$, $\beta_3 = \gamma$이고 $\xi\,(<0)$는 η_t의 θ 분위수이다. 이와 같은 방법으로 TGARCH$(1,1)$와 AR(1)-GARCH$(1,1)$에서 유도된 CAViaR 모형은 각각 다음과 같다 (Lee와 Noh, 2013):

$$\begin{aligned} f_t(\beta) &= \beta_1 + \beta_2 f_{t-1}(\beta) + \beta_3 Y_{t-1}^+ + \beta_4 Y_{t-1}^-, \\ f_t(\beta) &= \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} - \sqrt{\beta_2 + \beta_3 Y_{t-1}^2 + \beta_4 f_{t-1}^2(\beta)}. \end{aligned}$$

위와 같은 CAViaR 모형은 $f_t(\beta)$ 값이 곧 t 시점에서의 조건부 VaR 값을 의미하게 된다. 이 때, 모수의 추정은 분위 회귀 (Koenker와 Bassett, 1978)를 이용하여 추정하게 되고 θ 수준의 분위 회귀 추정량은 다음과 같다:

$$\hat{\beta}_n(\theta) = \arg\min_{\beta} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \rho_\theta(Y_t - f_t(\beta)).$$

단, $\rho_\theta(x) = |x(\theta - I(x<0))|$이고 $I(\cdot)$은 표시함수이다. CAViaR 방법의 장점은 시계열 모형에서 오차항에 대한 분포 가정이 필요없기 때문에 오차항 분포의 적합도에 대한 사전 검토 과정이 필요 없다는 것이다. 또한, VaR의 추정은 분포의 꼬리 부분의 움직임을 정확하게 파악하는 것이 가장 중요한데, CAViaR 방법은 주어진 수준에서의 분위수, 즉 분포 꼬리에 있는 VaR를 직접적으로 추정하기 때문에 주어진 수준의 VaR 값을 가장 잘 예측하는 모형을 용이하게 선택할 수 있게 해준다.

2.2. CARE 방법

Taylor (2008)는 CAViaR 방법처럼 오차항에 대한 분포 가정이 필요없고 직접적으로 원하는 수준의 ES를 추정할 수 있는 CARE 방법을 제안하였다. CARE 모형은 expectile의 정의와 그 성질을 바탕으로 GARCH 유형의 모형들로부터 유도된다. 단변량 Y의 기대값이 유한할 때($E|Y| < \infty$), Y의 τ-expectile은 다음과 같이 정의된다:

$$\mu_Y(\tau) = \arg\min_{m} E\left[\phi_\tau(Y-m) - \phi_\tau(Y)\right]. \tag{2.2}$$

단, $\tau \in (0,1)$이고 $\phi_\tau(x) = |\tau - I(x<0)|x^2$이다. 위의 정의로부터 아래의 식을 쉽게 얻을 수 있다:

$$E[Y|Y<\mu_Y(\tau)] = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau)F(\mu_Y(\tau))}\right)\mu_Y(\tau) - \frac{\tau}{(1-2\tau)F(\mu_Y(\tau))}E(Y).$$

단, F는 Y의 분포함수이다. 또한, 주어진 수준 $\theta \in (0,1)$에서 $\mu_Y(\tau) = \mathrm{VaR}_Y(\theta)$를 만족하는 유일한 τ가 존재함이 알려져 있다 (Newey와 Powell, 1987). 따라서, 주어진 수준 θ에 대하여 $\mu_Y(\tau) = \mathrm{VaR}_Y(\theta)$를 만족할 때, Y의 θ수준에서의 ES는 다음과 같다:

$$\mathrm{ES}_Y(\theta) = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau)\theta}\right)\mu_Y(\tau) - \frac{\tau}{(1-2\tau)\theta}E(Y). \tag{2.3}$$

이 식은 분포의 아래 꼬리에서의 ES를 나타낼 때의 표현이며 위쪽 꼬리부분에서의 ES를 다룰 때에는 τ와 θ를 $1-\tau$와 $(1-\theta)$로 대체하여 사용하면 된다. 이제 단변량 Y에서의 expectile 정의와 유도된 성질을 시계열 Y_t로 확장하면 다음과 같다. 우선, Y_t의 조건부 기대값이 유한 할 때, Y_t의 조건부 τ-expectile은 다음과 같이 정의된다:

$$\mu_{Y_t|\Omega_t}(\tau) = \arg\min_{m} E\left[\phi_\tau(Y_t - m) - \phi_\tau(Y_t)|\Omega_t\right].$$

단, Ω_t는 $t-1$ 시점까지의 정보집합이다. 또한, $\mu_{Y_t|\Omega_t}(\tau) = \mathrm{VaR}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)$일 때 Y_t의 θ수준에서의 조건부 ES는 다음과 같다:

$$\mathrm{ES}_{Y_t|\Omega_t}(\theta) = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau)\theta}\right)\mu_{Y_t|\Omega_t}(\tau) - \frac{\tau}{(1-2\tau)\theta}E(Y_t|\Omega_t). \tag{2.4}$$

Y_t가 식 (2.1)과 같은 GARCH(1,1) 모형을 따를 때, Y_t의 조건부 τ-expectile은 다음과 같다:

$$\begin{aligned}\mu_{Y_t|\Omega_t}(\tau) &= \zeta\sqrt{h_t} \\ &= -\sqrt{\beta_1 + \beta_2 Y_{t-1}^2 + \beta_3 \mu^2_{Y_{t-1}|\Omega_{t-1}}(\tau)}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

단, $\beta_1 = \zeta^2\omega$, $\beta_2 = \zeta^2\alpha$, $\beta_3 = \gamma$이고 $\zeta\,(< 0)$는 η_t의 τ수준에서의 expectile이다. 위 식 (2.5)는 GARCH$(1,1)$ 모형에서 유도된 CARE 모형이 된다. 이와 비슷한 방법으로 TGARCH$(1,1)$와 AR(1)-GARCH$(1,1)$ 모형에서 유도된 CARE 모형은 각각 다음과 같다:

$$\mu_{Y_t|\Omega_t}(\tau) = \beta_1 + \beta_2\mu_{Y_{t-1}|\Omega_{t-1}}(\tau) + \beta_3 Y_{t-1}^{+} + \beta_4 Y_{t-1}^{-},$$
$$\mu_{Y_t|\Omega_t}(\tau) = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} - \sqrt{\beta_2 + \beta_3 Y_{t-1}^2 + \beta_4\mu^2_{Y_{t-1}|\Omega_{t-1}}(\tau)}.$$

나아가 GARCH$(1,1)$ 모형을 따르는 Y_t의 θ 수준에서의 조건부 ES는 식 (2.4)와 (2.5)를 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다:

$$\mathrm{ES}_{Y_t|\Omega_t}(\theta) = -\sqrt{\delta_1 + \delta_2 Y_{t-1}^2 + \delta_3 \mathrm{ES}_{Y_{t-1}|\Omega_{t-1}}(\theta)}. \tag{2.6}$$

단, $i = 1, 2$일 때 $\delta_i = (1+\tau/\{(1-2\tau)\theta\})\beta_i$이고, $\delta_3 = \gamma$이다. TGARCH$(1,1)$와 AR(1)-GARCH$(1,1)$ 모형에 대한 조건부 ES도 이와 같은 방법으로 구할 수 있다.

식 (2.6)의 모수를 바로 추정 할 수 없지만 비대칭 최소 제곱 회귀 방법을 이용하여 CARE 모형의 모수를 추정할 수 있다. 여기서 사용되는 비대칭 최소 제곱 추정량은 다음과 같다:

$$\hat{\beta}_n(\tau) = \arg\min_{\beta} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \phi_\tau(Y_t - \mu_{Y_t|\Omega_t}(\tau)).$$

Kim와 Lee (2016)은 위 추정량이 강일치성과 점근적 정규성을 가지고 있음을 규명하였다. 이러한 이론적인 결과들을 토대로 조건부 VaR와 ES의 추정치를 얻기 위한 일련의 과정은 다음과 같다. 우선, $\mu_{Y_t|\Omega_t}(\tau) = \mathrm{VaR}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)$를 만족하는 적절한 τ를 찾는다. 본 연구에서는 $\{\Sigma_{t=1}^n I(Y_t \le \hat{\mu}_{Y_t|\Omega_t}(\tau(\theta)))\}/n \approx \theta$를 만족하는 $\tau(\theta)$를 얻어서 사용하며 $\hat{\mu}_{Y_t|\Omega_t}(\tau(\theta))$를 Y_t의 θ수준에서의 조건부 VaR의 추정치로 사용한다. 또한, 식 (2.4)를 이용하여 $\mathrm{ES}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)$의 추정치를 구한다.

2.3. 준최대가능도 추정량을 이용한 방법

Francq와 Zakoïan (2004)은 GARCH(p,q)와 ARMA(P,Q)-GARCH(p,q) 모형에서의 준최대가능도 추정량이 모형 모수에 대하여 강일치성과 점근적 정규성을 가지고 있음을 보였다. 이에 근거하여 준최대가능도 추정량을 통해서 모형 모수를 추정한 후에 잔차를 구할 수 있고 잔차의 경험적 분위수를 이용하여 오차항의 분위수를 추정할 수 있다. 예를 들면, (2.1) 모형에서 잔차를 다음과 같이 구할 수 있다:

$$\hat{\eta}_t = \frac{Y_t}{\sqrt{\hat{h}_t}},$$
$$\hat{h}_t = \hat{\omega} + \hat{\alpha}Y_{t-1}^2 + \hat{\gamma}h_{t-1}.$$

단, $\hat{\omega}$, $\hat{\alpha}$와 $\hat{\gamma}$는 준최대가능도 추정치이다. 또한, 조건부 $\mathrm{VaR}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)$와 $\mathrm{ES}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)$는 다음과 같이 추정할 수 있다:

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{Y_t|\Omega_t}(\theta) = \hat{h}_t Q(\theta),$$
$$\widehat{\mathrm{ES}}_{Y_t|\Omega_t}(\theta) = \hat{h}_t \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \hat{\eta}_i I[\hat{\eta}_i \le Q(\theta)].$$

단, $Q(\theta)$는 θ 수준에서 잔차항의 경험적분위수이고 $N = \sum_{i=1}^n I[\hat{\eta}_i \le Q(\theta)]$이다.

3. 사후검정

3.1. VaR 사후검정

수준 θ에서 시계열 Y_t의 $\mathrm{VaR}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)$에 대한 사후 검정을 고려해보자. 우선, 아래와 같은 표시자 변수(Indicator variable)을 정의하자.

정의 3.1

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{if } Y_t \in (-\infty, \mathrm{VaR}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)], \\ 0, & \text{if } Y_t \notin (-\infty, \mathrm{VaR}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)]. \end{cases}$$

이제, 위의 I_t를 이용한 UC(unconditional coverage) 검정에 대해 살펴보도록 하자 (Christoffersen, 1998). 이 검정은 I_t가 독립적이라는 가정하에서 귀무가설을 $E[I_t] = \theta$로 대립가설을 $E[I_t] = \pi \neq \theta$로 두고 가설 검정을 한다. 귀무가설과 대립가설하에서 각각의 가능도는 아래와 같다:

$$L(\theta; I_1, I_2, \ldots, I_n) = (1-\theta)^{n_0}\theta^{n_1},$$
$$L(\pi; I_1, I_2, \ldots, I_n) = (1-\pi)^{n_0}\pi^{n_1}.$$

단, y_t가 $(-\infty, \widehat{\mathrm{VaR}}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)]$에 포함 되지 않는 횟수를 n_0로, 포함 되는 횟수를 n_1로 둔다. 위의 가능도를 가지고 다음과 같은 검정통계량 LR_{uc}를 만들고 UC검정인 가능도비 검정을 시행할 수 있다:

$$\mathrm{LR}_{uc} = -2\log\left[\frac{L(\theta; I_1, I_2, \ldots, I_n)}{L(\hat{\pi}; I_1, I_2, \ldots, I_n)}\right] \sim \chi^2(s-1) = \chi^2(1).$$

단, $\hat{\pi} = n_1/(n_0+n_1)$은 π의 최대가능도추정치이고 $s = 2$는 I_t의 가능한 결과값 $0, 1$의 개수이다.

다음으로, I_t의 독립성과 $E[I_t] = \theta$를 모두 가정한 귀무가설에 대한 가능도비 검정인 CC(conditional coverage) 검정의 검정 통계량은 다음과 같다 (Christoffersen, 1998):

$$\mathrm{LR}_{cc} = -2\log\left[\frac{L(\theta; I_1, I_2, \ldots, I_n)}{L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \ldots, I_n)}\right] \sim \chi^2(2).$$

단,

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{n_{00}}{n_{00}+n_{01}} & \dfrac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}} \\ \dfrac{n_{10}}{n_{10}+n_{11}} & \dfrac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}}, \end{bmatrix},$$
$$L\left(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \ldots, I_n\right) = \left(\frac{n_{00}}{n_{00}+n_{01}}\right)^{n_{00}}\left(\frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}\right)^{n_{01}}\left(\frac{n_{10}}{n_{10}+n_{11}}\right)^{n_{10}}\left(\frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}}\right)^{n_{11}},$$

그리고 n_{ij}는 모든 $t = 1, \ldots, n-1$에 대하여 $I_t = i$에서 $I_{t+1} = j$로 변하는 관측 도수이다. LR_{cc}와 LR_{uc}의 값이 크면 VaR 방법론이 잘 맞지 않는다는 것을 의미한다.

3.2. ES 사후검정

McNeil과 Frey (2000)는 location-scale 시계열 모형에서 ES 추정에 대한 사후검정 방법을 제안하였다. 예를 들어, 식 (2.1)과 같은 GARCH 모형하에서 사후검정을 고려해보자. 우선, 아래와 같은 잔차를 고

려해보자:

$$\begin{aligned} R_t &= \frac{Y_t - \mathrm{ES}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)}{\sqrt{h_t}} \\ &= \eta_t - \mathrm{ES}_{\eta_t}(\theta). \end{aligned}$$

단, $\mathrm{ES}_{\eta_t}(\theta)$는 η_t의 θ 수준에서의 ES이다. 이때, $E[R_t|Y_t \leq \mathrm{VaR}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)] = 0$이 된다. 또한, $Y_t \leq \mathrm{VaR}_{Y_t|\Omega_t}(\theta)$일 때의 아래와 같은 경험적 잔차를 고려 할 수 있다:

$$r_t = \frac{y_t - \widehat{\mathrm{ES}}_{Y_t|\Omega_t(\theta)}}{\sqrt{h_t}}.$$

이러한 r_t는 평균이 0이고 독립적이며 같은 분포를 따르는 표본처럼 그 값을 가질 것이다. 따라서, r_t의 평균이 0임을 검정하기 위해서 분포가정 없이 붓스트랩을 이용하여 검정을 시행한다 (Efron와 Tibshirani, 1993). 또한, ES는 과대추정보다 과소추정 할 때 더 큰 문제의 소지가 있고 본 연구에서는 분포의 아래 꼬리 부분만 다루며 VaR과 ES를 양수화 하지 않기 때문에 대립가설은 평균은 0보다 작다로 두고 단측검정을 시행한다.

4. 실증 자료 분석

본 장에서는 S&P500 지수와 현대 자동차 주식의 로그 수익률을 가지고 2장에서 언급한 CAViaR, CARE 방법 그리고 Gaussian QMLE를 이용하여 수준 0.01과 0.05에서 조건부 1일 후 VaR와 ES를 추정하고 사후 검정을 실시한다. 이 때, 로그 수익률은 일별 종가의 로그차분에 100을 곱하여 얻는다. 즉, t시점에서의 종가가 P_t라고 하면 t시점의 일별 로그 수익률은 다음과 같다:

$$Y_t = 100 \times \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

첫 번째 분석에 사용된 자료는 2000년 1월 3일 부터 2005년 7월 29일까지 1400개의 S&P500 지수의 로그 수익률이다. VaR와 ES를 추정하기 위해서 크기가 600인 이동식 윈도우(moving window)를 사용한다. 즉, 2000년 1월 3일 부터 2002년 05월 28일까지의 자료로 600개의 로그 수익률 얻고 이를 이용해서 모형 모수를 추정한 후 2002년 5월 29일 로그 수익률의 VaR와 ES를 추정한다. 다음으로, 2002년 5월 30일 로그 수익률의 VaR와 ES를 추정하기 위해서는 이동식 윈도우를 하루 이동하여 2000년 1월 4일부터 2002년 5월 29일까지의 자료로부터 얻은 600개의 로그 수익률을 이용한다. 이와 같은 방법으로 2005년 7월 29일까지 수준 0.01과 0.05에서 조건부 1일 후 VaR와 ES에 대한 800개의 추정치를 얻는다. 우선, VaR와 ES를 추정하기 전에 포트맨토(Portmanteau) 검정법을 통해서 분석에 사용되는 기간 동안의 S&P500 지수 자료를 GARCH$(1,1)$ 모형에 적합시키기에 무리가 없음을 확인 하였다. 나아가, Table 4.1은 GARCH$(1,1)$ 모형에서 유도된 CAViaR, CARE 방법과 QMLE를 이용하여 구한 VaR의 추정치보다 같거나 큰 실제 손실이 발생한 비율과 UC와 CC검정 그리고 ES 추정에 대한 검정의 결과를 기록하였다. Table 4.1을 조금 더 구체적으로 살펴보면, QMLE를 이용한 방법은 0.05 수준에서의 VaR 추정의 결과는 유의수준 0.05에서 UC, CC 검정 모두 채택이 되지만, 0.01 수준에서는 이 두 검정 모두 기각하게 된다. 즉, 0.01 수준에서의 VaR 추정은 QMLE 방법을 사용하기엔 무리가 있음을 알 수 있다. 반면, CAViaR 방법은 유의 수준 0.05하에서 수준 0.01, 0.05에서의 모든 검정이 채택됨을 확인 할 수 있다. 또한, CARE 방법의 경우 비록 수준 0.05에서 UC와 CC 검정이 모두 기각되지만, 0.01 수준에서는 UC와 CC 검정 둘 다 채택된다. ES 추정한 결과는 CARE 방법은 0.01, 0.05 수준 모두 유의수준 0.05하에서 채택이 되지만, QMLE를 이용한 경우에는 0.05 수준에서는 유의수준 0.05하에서 기각되

Table 4.1. Var and ES evaluation for the log returns of S&P500

	Model	0.01	0.05
VaR	CAViaR model	0.457(0.008)	0.179(0.040)
	CC	0.728	0.050
	CARE model	0.116(0.005)	0.040(0.035)
	CC	0.284	0.006
	QMLE	0.000(0.029)	0.207(0.060)
	CC	0.000	0.215
ES	CARE model	0.278	0.314
	QMLE	0.260	0.032

Note: 괄호안 숫자는 추정된 VaR보다 관측된 수익률이 작은 값을 가지는 경우의 비율을 의미하며, UC 검정의 유의수준은 함께 나열했다. CC가 나타내는 숫자는 CC 검정의 유의수준을 나타낸다. ES 추정에 대한 검정의 결과는 표의 하단에 위치한다.

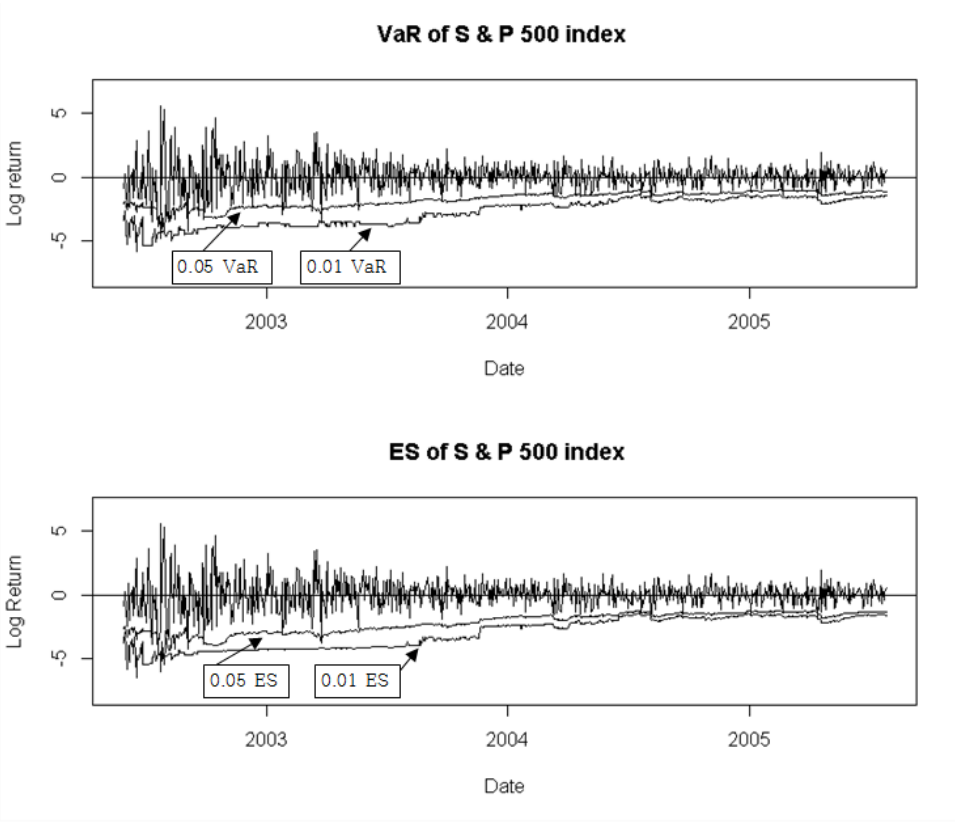

Figure 4.1. One step ahead forecasting of VaR and ES from S&P500 index data.

므로 0.05 수준에서는 그 추정의 결과를 믿기엔 무리가 있음을 알 수 있다. Figure 4.1은 CARE 방법을 이용하여, 조건부 VaR와 ES를 추정한 결과를 로그 수익률과 함께 나타내는 것이다.

두 번째 분석에서는 2004년 8월 17일 부터 2012년 5월 8일까지 2,000개의 현대 자동차 주식의 로그 수익률을 사용한다. 이 때, 이동식 윈도우의 크기는 1,000이고, 2008년 6월 19일부터 2012년 5월 8일까

Table 4.2. VaR and ES evaluation for the log returns of Hyundai Motor Car stock prices

	Model	0.01	0.05
VaR	CAViaR model	0.754(0.011)	0.566(0.054)
	CC	0.842	0.339
	GARE model	0.746(0.009)	1.000(0.050)
	CC	0.874	0.942
	QMLE	0.000(0.136)	0.000(0.223)
	CC	0.000	0.000
ES	CARE model	0.198	0.504
	QMLE	0.000	0.000

Note: 괄호안 숫자는 추정된 VaR보다 관측된 수익률이 작은 값을 가지는 경우의 비율을 의미하며, UC 검정의 유의수준은 함께 나열했다. CC가 나타내는 숫자는 CC 검정의 유의수준을 나타낸다. ES 추정에 대한 검정의 결과는 표의 하단에 위치한다.

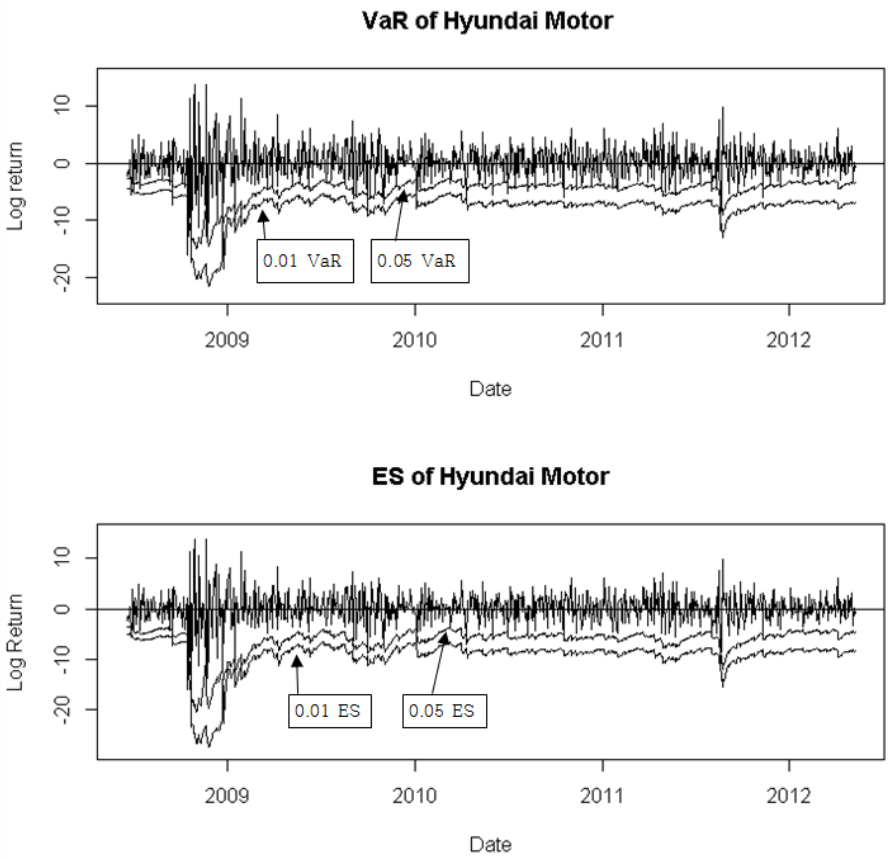

Figure 4.2. One step ahead forecasting of VaR and ES from Hyundai Motors data.

지 1,000개의 로그 수익률에 대하여 0.01과 0.05 수준에서 조건부 1일 후 VaR를 추정한다. 사실, 이 자료가 GARCH$(1,1)$ 모형의 적합한지를 포트만트 검정을 통하여 확인한 결과 부적합하다는 결론을 얻을

수 있었다. 그럼에도 불구하고 Table 4.2는 CAViaR와 CARE 방법이 시행된 모든 수준에서 상당히 좋은 VaR와 ES에 대한 예측력을 가지고 있음을 보여준다. 그 이유는 VaR와 ES의 에 대한 추정은 주어진 자료가 특정 모형에 대하여 전체적으로 적합한지가 중요하기보다는 꼬리 부분의 분포를 정확히 묘사하는 것이 가장 중요하기 때문인 것으로 보여진다. 즉, 전체적인 자료를 GARCH$(1,1)$ 모형에 적합하기엔 무리가 있지만, 꼬리 부분에 대한 움직임을 설명하기엔 GARCH$(1,1)$ 모형이 상당히 적합할 수 있기 때문이다. 따라서, GARCH$(1,1)$ 모형에서 유도된 CAViaR와 CARE 방법을 통해서 직접적으로 주어진 수준에 해당하는 VaR와 ES에 대한 추정한 결과가 우수하였다고 고려된다. Figure 4.2는 CARE 방법을 이용하여, 조건부 VaR와 ES를 추정한 결과를 로그 수익률과 함께 나타내는 것이다.

일반적으로 QMLE 방법론과 CAViaR (또는 CARE) 방법론의 우열성을 가리가는 쉽지 않다고 할 수 있다. 만일 자료를 적합시키는 모형이 대부분의 자료는 물론 꼬리부분의 자료도 잘 설명해주고, 이와 동시에 모형의 오차항의 분포가 정규분포와 유사하다면 QMLE 방법론이 좀 더 좋은 결과를 도출할 것이라고 생각된다. 그러나 이러한 조건이 성립되지 않는다면 로버스트한 성질을 가지고 있는 CAViaR 방법이 더 우수한 결과를 도출할 것이라고 예상할 수 있다. 본 연구에서의 결과는 이와 같은 현상을 잘 설명해주고 있으며, QMLE 방법론을 보완하는 방법으로써 보다 더 다양한 분포를 포함하는 오차항의 분포족을 이용할 것을 암시하고 있다. 추후에 이에 대한 연구를 계속과제로서 추진할 계획이다.

References

Christoffersen, P. (1998). Evaluating interval forecasts, *International Economic Review*, **39**, 841–862.

Efron, B. and Tibshirani, R. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall, New York.

Francq, C. and Zakoïan, J.-M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes, *Bernoulli*, **10**, 605–637.

Engle, R. F. and Manganelli, S. (2004). CAViaR: conditional autoregressive value at risk by regression quantiles, *Journal of Business & Economic Statistics*, **22**, 367–381.

Koenker, R. and Bassett, G. (1978). Regression Quantiles, *Econometrica*, **46**, 33-50.

Lee, S. and Noh, J. (2013). Forecasting value-at-risk by encompassing CAViaR models via information criteria, *Journal of the Korean Data and Information Science Society*, **24**, 1531–1541.

Kim, M. and Lee, S. (2016). Nonlinear expectile regression with application to value-at-risk and expected shortfall estimation, *Computational Statistics & Data Analysis*, **94**, 1–19.

Manganelli, S. and Engle, R. F. (2004). *A Comparison of Value-at-Risk Models in Finance*, In G. Szegö(ed.), Risk Measures for the 21st Century, Chichester, Wiley, UK.

McNeil, A. J. and Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach, *Journal of Empirical Finance*, **7**, 271–300.

Newey, W. K. and Powell, J. L. (1987). Asymmetric least squares estimation and testing, *Econometrica*, **55**, 819–847.

Taylor, J. W. (2008). Estimating value at risk and expected shortfall using expectiles, *Journal of Financial Econometrics*, **6**, 231–252.

조건부 Value-at-Risk와 Expected Shortfall 추정을 위한 준모수적 방법들의 비교 연구

김민조[a] · 이상열[a,1]

[a]서울대학교 통계학과

(2015년 12월 15일 접수, 2015년 12월 23일 수정, 2015년 12월 23일 채택)

요 약

바젤 위원회는 시장위험의 측정 도구로 Value-at-Risk(VaR)와 expected shortfall(ES)을 사용할 것을 제안하였다. 여러 문헌에서 VaR와 ES의 다양한 추정 방법들이 연구 되었다. 본 연구에서는 준모수적인 방법인 conditional autoregressive value at risk(CAViaR), conditional autoregressive expectile(CARE) 방법들, 그리고 Gaussian 준최대가능도 추정량(QMLE)를 이용한 방법을 사후 검정을 통해서 비교하고자 한다. 각 방법의 타당성을 확인하기 위해서, VaR에 대한 사후 검정은 unconditional coverage(UC)와 conditional coverage(CC) 검정을 사용하고 ES에 대한 검정은 붓스트랩 방법을 사용한다. S&P500 지수와 현대 자동차 주식가격 지수에 대하여 실증 자료 분석이 수행되었다.

주요용어: Value-at-Risk, expected shortfall, CAViaR 방법, CARE 방법, 준최대가능도, 사후검정

이 논문은 2015년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No.2015R1A2A2A010003894).

[1]교신저자: (08826) 서울시 관악구 관악로 1, 서울대학교 통계학과. E-mail: jpgrslee@gmail.com