

Comparison of realized volatilities reflecting overnight returns

Soojin Cho^a · Doyeon Kim^a · Dong Wan Shin^{a,1}

^aDepartment of Statistics, Ewha Womans University

(Received December 14, 2015; Revised December 29, 2015; Accepted December 29, 2015)

Abstract

This study makes an empirical comparison of various realized volatilities (RVs) in terms of overnight returns. In financial asset markets, during overnight or holidays, no or few trading data are available causing a difficulty in computing RVs for a whole span of a day. A review will be made on several RVs reflecting overnight return variations. The comparison is made for forecast accuracies of several RVs for some financial assets: the US S&P500 index, the US NASDAQ index, the KOSPI (Korean Stock Price Index), and the foreign exchange rate of the Korea won relative to the US dollar. The RV of a day is compared with the square of the next day log-return, which is a proxy for the integrated volatility of the day. The comparison is made by investigating the Mean Absolute Error (MAE) and the Root Mean Square Error (RMSE). Statistical inference of MAE and RMSE is made by applying the model confidence set (MCS) approach and the Diebold-Mariano test. For the three index data, a specific RV emerges as the best one, which addresses overnight return variations by inflating daytime RV.

Keywords: realized volatility, high frequency data, overnight return, proxy, model confidence set, Diebold-Mariano test

1. 서론

1.1. 연구의 배경 및 목적

변동성이란 일정 기간 동안에 주식, 환율 등의 금융자산 가격의 수익률이 변동하는 정도를 의미한다. 즉, 해당 수익률 변수가 평균으로부터 변동된 폭을 측정하는 것으로 변동 폭이 클수록 변수에 대한 불확실성이 큰 것이므로 리스크가 크다고 판단하게 된다. 리스크의 측도인 변동성은 시장 참여자들의 자산 위험관리, 파생상품 가격 관련 의사결정 그리고 투자 포트폴리오 구성 관리 등에 있어 매우 중요한 역할을 하고 있다. 이에 따라 우리나라의 한국거래소에서는 KOSPI200 옵션 가격을 이용하여 주식시장의 변동 위험을 파악할 수 있는 지표인 VKOSPI를 산출하여 발표하고 있다. 또한 미국의 시카고 옵션 거래소(CBOE)에서는 S&P500 지수 옵션을 기초로 산출하여 변동성 지수 VIX를 발표한다.

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (2009-0093827).

¹Corresponding author: Department of Statistics, Ewha Womans University, 52, Ewhayeodae-gil, Seodaemun-gu, Seoul 03760, Korea. E-mail: shindw@ewha.ac.kr

주식가격, 환율 등에 대한 1분 이하 단위 틸의 초고빈도 데이터가 이용 가능해짐에 따라 Anderson 등 (1998)은 Hull과 White (1987)의 적분변동성 개념에 근거하여 일중수익률의 변동성을 추정하는 방법으로 실현변동성을 제안하였다. 실현변동성은 변동성에 대한 특별한 모형의 설정 없이 변동성을 관측 변수로 간주할 수 있도록 하며, 계산이 간단하다는 장점이 있다. 이러한 실현변동성 계산의 목표는 적분변동성의 정확한 추정에 있다.

하루 실현변동성을 계산하기 위해서는 하루 24시간 전체에 걸친 데이터가 필요하다. 하지만 예를 들어 한국 주식시장의 경우, 09:00부터 15:00사이의 해당 상품별 특정 장내시간(trading time)에 발생한 값들만 기록되므로 하루의 일부분에 해당하는 데이터만 이용가능하고, 장외시간에 대한 데이터는 기록되지 않는다. 또한 환율 데이터의 경우에도, 장내시간의 경우 고빈도 데이터가 기록되어 데이터 이용이 가능하지만, 장외시간에 대해서는 간헐적으로 발생한 거래만 기록된다. Hansen과 Lunde (2005)는 장내시간 고빈도 자료 수익률과 장외시간 수익률을 이용하여 하루 전체의 변동성 추정방식에 대한 연구를 진행하였고, 크게 세 가지 방법을 사용하여 변동성 추정치를 제안하였다.

따라서 여러 가지 하루 변동성 추정치 중에 어느 것이 우수한지를 살펴볼 필요가 생기는데 문제는 적분변동성이 관측불가능하기 때문에 비교가 간단치 않다는 점이다. 이에 대해서는 제 2절과 제 4절에서 좀 더 자세히 논의될 것이다. 본 논문에서는 국내 데이터인 원/달러 환율, KOSPI, 미국 데이터인 NASDAQ, S&P500 자료를 활용하여 어떠한 방식의 추정치가 가장 정확하게 하루 전체의 변동성을 추정하는지 비교실증분석 해보고자 한다.

1.2. 논문의 구성

본 논문은 모두 5절로 구성되어 있으며 그 구성은 다음과 같다. 제 2절에서 적분변동성과 실현변동성의 이론적 배경을 살펴본 뒤, Hansen과 Lunde (2005)의 하루 전체 변동성(daily volatility)의 세 가지 추정치에 대해 소개할 것이다. 제 3절과 제 4절에서는 원/달러 환율, KOSPI의 한국 데이터와 NASDAQ, S&P500의 미국 데이터에 대하여 다양한 실현변동성들을 비교분석해보고자 한다. 마지막으로 제 5절에서는 본 연구의 분석 결과를 요약정리하며 결론을 제시하고자 한다.

2. 이론적 배경 및 review

2.1. 적분변동성과 실현변동성

시간 t 에서 자산의 효율적 로그가격 $p_t = \ln P_t$ 가 다음의 식

$$dp_t = \mu_t dt + \sigma_t dw_t$$

을 따른다고 가정하자. 여기에서 w_t 는 표준 브라운운동(standard brown motion)이고 μ_t 는 drift과정이고 σ_t 는 volatility과정이다. 시간 구간 $[a, b]$ 에서 실제 시장에서의 변동성은 다음과 같은

$$IV(a, b) = \int_a^b \sigma_t^2 dt.$$

적분 변동성(Integrated Volatility; IV)로 정의된다. 하지만 시장에서 관측되는 자료는 연속형 데이터가 아닌 이산형 데이터이므로, 위와 같은 적분 변동성을 구하는 것은 불가능하다.

로그가격 p_t 에 대해 T 일의 고빈도 데이터가 있다고 가정해보자. 또 $\Delta t = 1/n$ 이 1일에 대응된다고 하자. n 개의 일정한 구간으로 t 일의 로그가격

$$\left\{ p_{t-1+\frac{0}{n}}, p_{t-1+\frac{1}{n}}, \dots, p_{t-1+\frac{n}{n}} \right\}$$

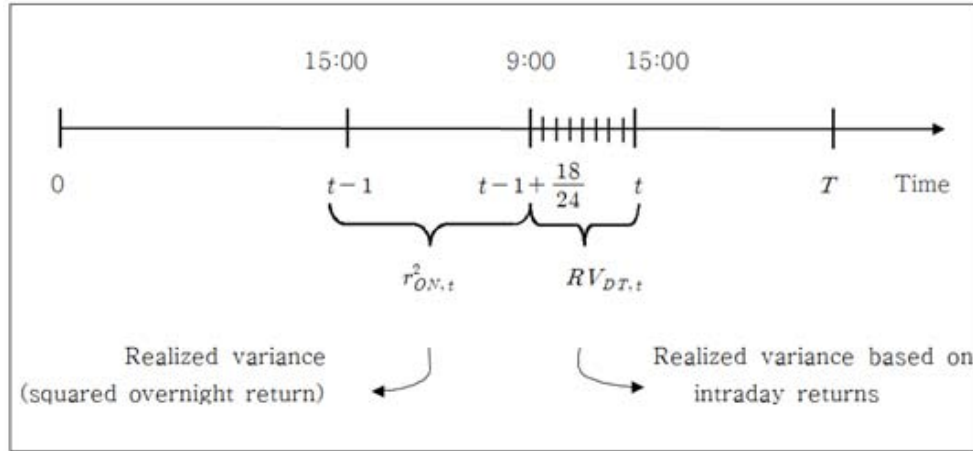


Figure 2.1. Intraday observation time points and corresponding realized volatilities.

이 관측되었다고 하자. 그러면 t 일에 관측된 일중 로그수익률은 다음

$$r_{it} = p_{t-1+\frac{i}{n}} - p_{t-1+\frac{(i-1)}{n}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

과 같이 표현되고 이를 이용하여 t 일의 적분변동성 $IV_t = IV(t-1, t)$ 을 추정할 수 있다.

Anderson 등 (1998), Barndorff-Nielsen과 Shephard (2002) 등은 IV_t 의 추정치로 t 일 중 고빈도 자료로부터 얻어진 수익률 제곱을 합하는 방식을 제안하였다. 이 추정치를 실현변동성(Realized Variance; RV_t)이라 하며, 시장미시구조잡음이 없다는 조건하에서 실현 변동성

$$RV_t = \sum_{i=1}^n r_{it}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.1}$$

은 n 이 무한히 감에 따라 적분 변동성 IV_t 의 일치추정량이 된다.

이러한 실현변동성 계산의 목적은 적분변동성의 정확한 추정이라 할 수 있다. 하지만 24시간 중에 현실적으로 이용 가능한 데이터는 주식거래 장내시간에 발생한 값들에 한정되거나, 그 외의 시간인 장외시간에 소수의 빈도로 발생한 값들이다. 따라서 우리는 장외시간 수익률의 변동을 반영하는 세 가지 방법에 따른 하루 변동성의 추정치들을 살펴보고, 이들을 비교분석 해보고자한다.

우선 Martens (2002), Koopman 등 (2005), 그리고 Hansen과 Lunde (2005)가 하루 전체의 변동성을 보다 정확하게 추정하기 위해 제안한 하루 변동성(Realized Variance for the whole day)의 세 가지 추정치들을 살펴보기로 한다. 세 가지 추정치들은 장내시간의 고빈도 수익률과 장외시간 수익률을 반영해주는 방법에 따라 차이를 보인다.

KOSPI 데이터의 경우 장내시간이 9:00부터 15:00까지이므로 이를 기준으로 설명하려 한다. 편의상 특정 t 일 전일 15:00부터 t 당일 15:00을 하루 24시간으로 본다면 장내시간인 구간 $(t-1 + 18/24, t)$ 의 경우 KOSPI 지수가 관측되나, 그 외의 시간에는 관측되지 않는다. Figure 2.1은 t 일 하루 $(t-1, t)$ 에 로그가격이 관측된 시점 수직선과 이에 대응하는 실현변동성을 나타낸다.

관측된 장내시간 수익률은 $r_{it}, i = 1, 2, \dots, n$ 이고 장외시간 수익률은

$$r_{ON,t} = p_{t-1+\frac{18}{24}} - p_{t-1}$$

이고 일일수익률은

$$r_t = r_{ON,t} + \sum_{i=1}^n r_{it}$$

이 된다. 전일 15:00부터 당일 9:00까지의 구간인 $(t-1, t-1+18/24)$ 사이에는 거래가 이루어지지 않으므로, 이때 적분변동성 $IV(t-1, t-1+18/24)$ 의 추정치는 $r_{ON,t}^2$ 이다. 장내시간을 n 등분하여 식 (2.1)과 같이 구한 실현변동성을 $RV_{DT,t}$ 라 하자. 이는 적분변동성 $IV(t-1+18/24, t)$ 의 추정치이다.

하루 변동성 $IV(t-1, t)$ 을 추정하는 간단한 방법으로는 장외시간의 적분변동성 추정치와 장내시간의 적분변동성 추정치를 단순 합해주는 방법이 있다.

$$RV_t^{sum} = r_{ON,t}^2 + RV_{DT,t}$$

이 추정치의 경우 장외시간 적분변동성 추정치 $r_{ON,t}^2$ 이 $IV_{ON,t}$ 의 잡음이 있는 추정치(noisy estimator)이기 때문에, 하루 변동성 추정치 RV_t^{sum} 역시 IV_t 의 잡음이 있는 추정치가 된다는 문제점이 있다.

두 번째 방법으로는 장내시간의 적분변동성 추정치인 $RV_{DT,t}$ 에 상수를 곱해줌으로써 하루 변동성으로 확장시키는 것을 생각해볼 수 있다. 즉, 하루 변동성의 크기조정 추정치는 $RV_t^{scale} = \hat{\delta} \cdot RV_{DT,t}$ 이다. 두 개의 크기조정 추정치

$$RV_t^{sc1} = \hat{\delta}_1 \cdot RV_{DT,t}, \quad RV_t^{sc2} = \hat{\delta}_2 \cdot RV_{DT,t}$$

가 많이 사용된다. 여기서 크기조정 상수(scaling parameter)로

$$\hat{\delta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}{\sum_{t=1}^T RV_{DT,t}}, \quad \hat{\delta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^T r_{DT,t}^2 + \sum_{t=1}^T r_{ON,t}^2}{\sum_{t=1}^T r_{DT,t}^2}$$

를 고려해볼 수 있다. Hansen과 Lunde (2005)에 의해 제안된 위 크기조정 상수 $\hat{\delta}_1$ 는 $\delta = E[IV_t]/E[RV_{DT,t}]$ 의 일치추정량이다. Martens (2002), Koopman 등 (2005)에 의해 제안된 위 크기 조정 상수 $\hat{\delta}_2$ 는 늘 1 보다 크다는 특징이 있다. $\hat{\delta}_2$ 추정에 이용된 $r_{DT,t}^2$ 는 t 일의 시가-종가 로그 수익률(open to close return)으로 다음과 같다.

$$r_{DT,t}^2 = p_t - p_{t-1+\frac{18}{24}}.$$

세 번째 방법은 $r_{ON,t}^2$ 과 $RV_{DT,t}$ 의 최적 선형결합을 이용하는 것으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$RV_t(\omega) = \omega_1 r_{ON,t}^2 + \omega_2 RV_{DT,t}, \quad \text{where } \omega = (\omega_1, \omega_2),$$

$$\min_{\omega \in \Omega} E[RV_t(\omega) - IV_t], \quad \text{where } \Omega \subset R^2.$$

선형결합의 가중치(weight)인 ω 는 $\mu_0 = E(IV_t)$, $\mu_1 = E(r_{ON,t}^2)$, $\mu_2 = E(RV_{DT,t})$ 라 했을 때 $\omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2 = \mu_0$ 의 조건을 만족시켜야한다. 그리고

$$\eta_1^2 = \text{var}(r_{ON,t}^2), \quad \eta_2^2 = \text{var}(RV_{DT,t}), \quad \eta_{12} = \text{cov}(r_{ON,t}^2, RV_{DT,t})$$

라 했을 때 최적해는 다음과 같다.

$$\omega_1^* = (1 - \varphi) \frac{\mu_0}{\mu_1}, \quad \omega_2^* = \varphi \frac{\mu_0}{\mu_2}, \quad \varphi = \frac{\mu_2^2 \eta_1^2 - \mu_1 \mu_2 \eta_{12}}{\mu_2^2 \eta_1^2 + \mu_1^2 \eta_2^2 - 2\mu_1 \mu_2 \eta_{12}}.$$

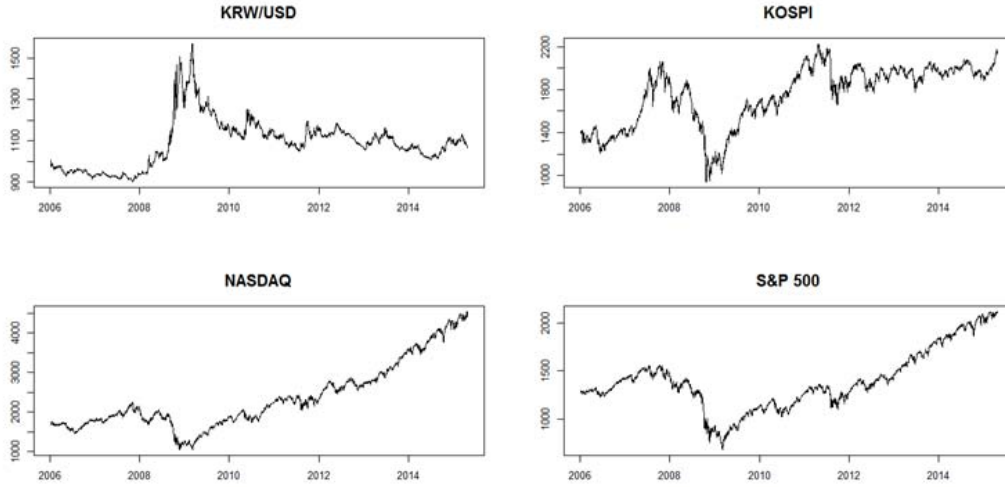


Figure 3.1. Daily prices P_t , that is, the index values.

이렇게 해서 추정된 실현변동성을 RV_t^{wgh} 라 하자.

Figure 2.1에서와 같이 t 일에 대해 얻어진 실제 데이터에 대해 위에서 언급한 RV_t^{sc1} , RV_t^{sc2} , RV_t^{sum} , RV_t^{wgh} 네 가지의 실현변동성 중에 무엇이 정확성이 높은지 검토할 필요가 있다. 네 가지 추정치 중

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |RV_t - IV_t| \quad \text{또는} \quad RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (RV_t - IV_t)^2} \quad (2.2)$$

를 최소화시키는 것이 가장 바람직하지만, 현실에서는 적분변동성인 IV_t 가 관측되지 않는다는 문제점이 있다. 본 논문에서는 Patton (2011)이 이러한 문제 하에서 제안한 여러 가지 실현변동성 추정치들을 비교하는 방법론을 이용하였다. 실제 데이터의 비교분석을 제 4절에서 자세히 살펴볼 것이다. 비교 방법으로는 MAE, RMSE 최소화를 포함하여 Hansen 등 (2011)의 MCS(Model Confidence Set) 방법과 Diebold와 Mariano (1995)의 DM 검정을 이용하고자 한다. 다음 제 3절에서는 다양한 데이터를 이용하여 각각의 실현변동성을 구하고 비교 해보려 한다.

3. 데이터

본 3절에서는 원/달러환율(KRW/USD, 2006/01/03–2015/04/30), KOSPI(2006/01/03–2015/04/30), NASDAQ(2006/01/03–2015/04/30), 그리고 S&P500(2006/01/03–2015/04/30)의 가격과 일일 로그 수익률의 기본적인 면을 서술한다. 우리나라 데이터인 KOSPI와 원/달러환율의 경우 일중 거래시간은 9:00부터 15:00까지이며, 미국 데이터인 NASDAQ과 S&P500의 경우 NYT 08:30부터 15:00까지이다.

일중 거래 데이터에 대한 로그수익률 시도표를 보면, 네 가지 데이터 모두 0을 중심으로 고르게 분포하는 듯하며, 세계 금융위기가 있었던 2008년–2009년에는 매우 큰 변동성을 확인할 수 있다. 이후 안정되는 듯 했지만 2012년 유럽 금융위기로 인해 변동성이 다시 증가하는 것을 확인할 수 있다. 2013년 이후 근래는 안정적인 변동성을 보인다.

Table 3.1은 네 가지 데이터의 종가와 일일 로그 수익률의 기초통계량을 요약한 결과다. 네 가지 데이터

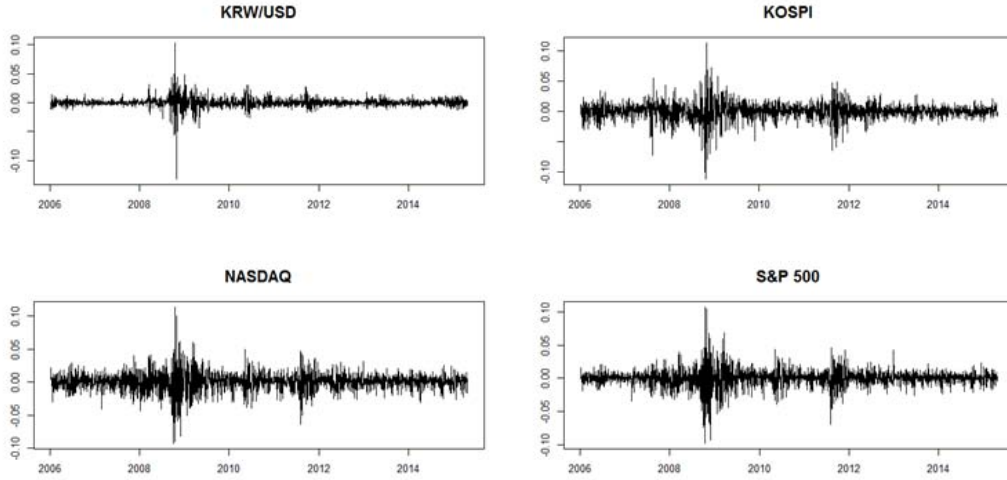


Figure 3.2. Daily log returns r_t .

Table 3.1. Basic statistics of the daily index value P_t and daily log return r_t

		Mean	Std.	Skew.	Kurto.	Min.	Q ₁	Med.	Q ₃	Max.
Daily index value P_t	KRW/USD	1091.0	117.8	0.848	1.382	900.4	1011.4	1091.4	1142.9	1570.1
	KOSPI	1747.0	278.9	-0.709	-0.554	938.6	1549.9	1843.1	1971.0	2229.0
	NASDAQ	2357.9	829.7	0.917	-0.049	1 036.2	1773.0	2095.7	2770.9	4536.8
	S&P500	1392.8	311.6	0.468	-0.149	676.7	1202.1	1347.1	1525.2	2117.7
Daily log return r_t	KRW/USD	0.002	0.82	-0.80	46.78	-13.24	-0.33	-0.02	0.30	10.34
	KOSPI	0.020	1.38	-0.57	8.48	-11.19	-0.58	0.06	0.70	11.32
	NASDAQ	0.040	1.37	-0.14	7.08	-9.27	-0.55	0.10	0.70	11.34
	S&P500	0.020	1.31	-0.26	10.00	-9.79	-0.44	0.07	0.58	10.71

Note: Unit for the statistics (except for skewness and kurtosis) of r_t is bp (basis point), 1 bp = 0.01%.

모두 양의 평균 일일수익률을 보이며, 왜도는 모두 음의 값으로 비대칭성을 확인할 수 있다. 또한 첨도의 값이 매우 크므로, 중심으로 집중되어 있으며 최댓값, 최솟값으로부터 꼬리부분이 두터울 것임을 짐작할 수 있다.

4. 실현변동성의 비교

4.1. 데이터 실증 분석

우선 원/달러환율, KOSPI, NASDAQ 그리고 S&P500 각 데이터별로 각각의 실현변동성을 구하였다. Bandi와 Russell (2005)에 따라 본 연구에서는 표본추출 간격으로 실현변동 추정량의 조건부 평균제곱 오차를 최소화하는 방식으로 계산된 최적 간격인 5분을 사용하였다.

각 자료의 네 가지 실현변동성들의 시도표 (Figure 4.1–Figure 4.4)를 보면 약간의 차이가 있음을 확인할 수 있다.

Figure 4.1에는 원/달러환율의 네 가지 실현변동성 시도표가 나타나있다. 두 가지 크기조정 실현변동

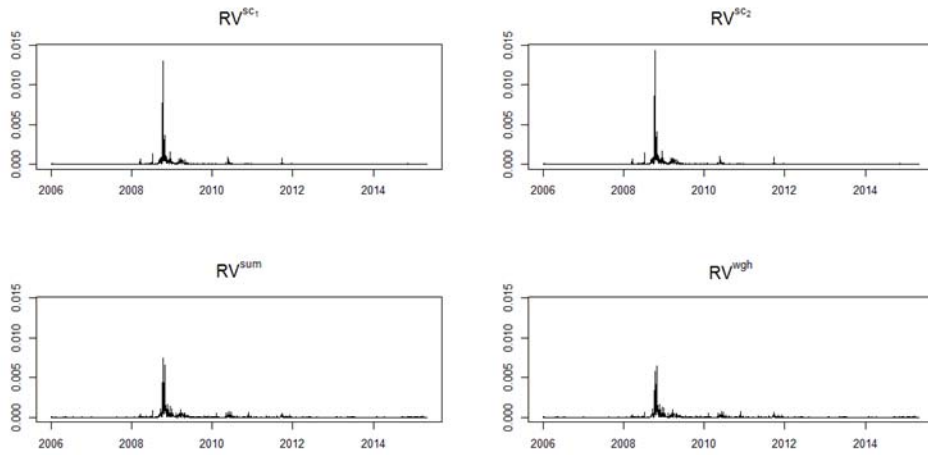


Figure 4.1. Four RVs of the KRW/USD.

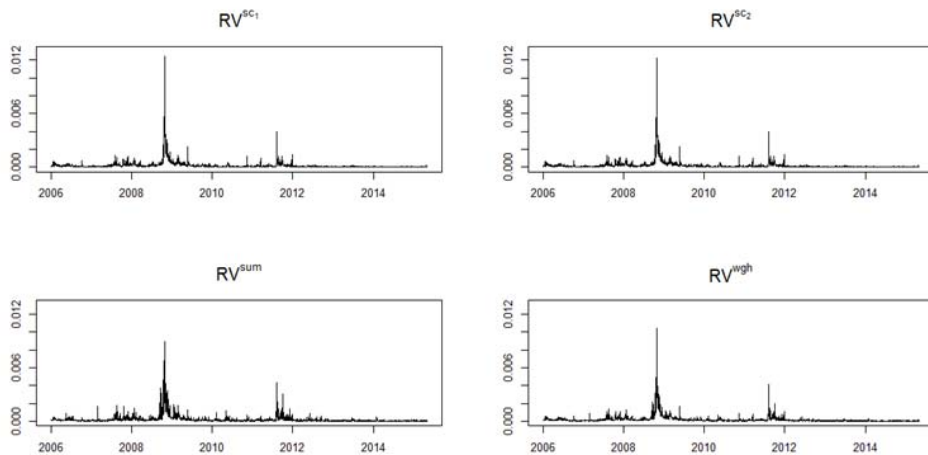


Figure 4.2. Four RVs of the KOSPI.

성(RV^{sc1} , RV^{sc2})는 1보다 큰 상수를 장내 실현변동성의 추정치에 곱해줌으로써 RV^{sum} , RV^{wgh} 보다 대체적으로 크게 추정된 경향이 있다. 특히 2008년, 2009년 미국 발 금융위기 때 큰 값을 보이는데, 이는 미국 거래시간과 한국 거래시간의 차이 때문에 미국의 큰 변동성이 한국의 장외거래에 포함됨에서 얻어진 결과이다. 그리고 RV^{sum} , RV^{wgh} 의 경우 2010년과 2012년의 변동이 크게 반영되었다. 이는 유럽 발 금융위기가 미국 발 금융위기와는 다른 영향을 주었다고 볼 수 있다.

또한 KOSPI의 네 가지 실현변동성 시도표는 Figure 4.2에 나타나있다. 네 가지 실현변동성 모두 2008년, 2009년 미국 발 금융위기, 2012년 유럽 발 금융위기 때 큰 값을 보인다. RV^{sc1} 과 RV^{sc2} 의 최댓값이 RV^{sum} , RV^{wgh} 보다 큼을 확인할 수 있다. 그리고 RV^{sum} , RV^{wgh} 의 경우 2007년 말부터 2008년의 큰 변동이 더 크게 반영되었다.

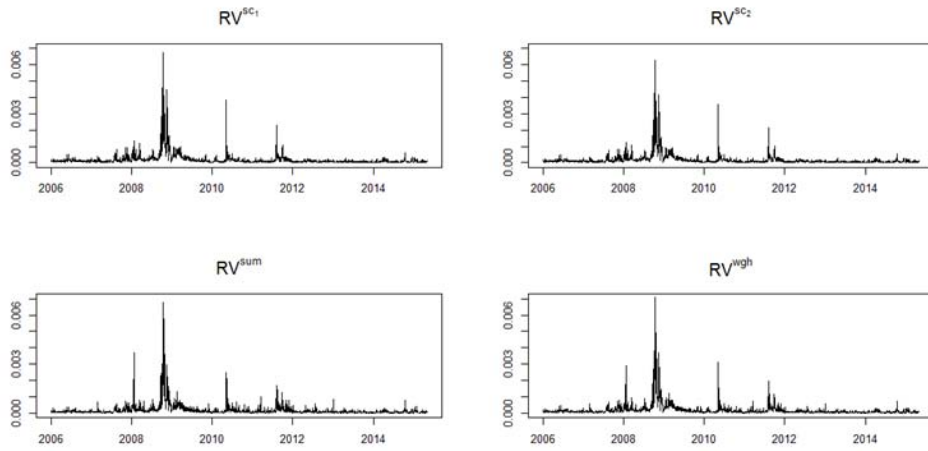


Figure 4.3. Four RVs for of the NASDAQ.

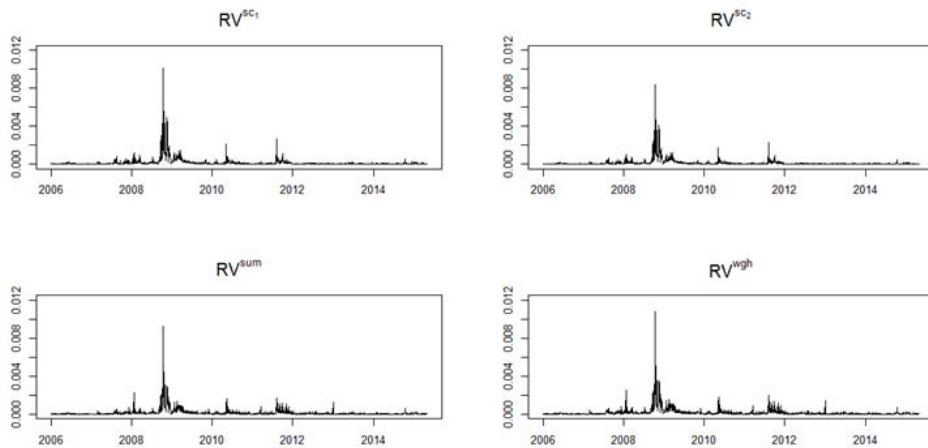


Figure 4.4. Four RVs of the S&P500.

NASDAQ의 네 가지 실현변동성 시도표를 Figure 4.3에서 살펴보자. 모든 실현변동성이 2008년, 2009년, 2010년, 2012년 금융위기 때 특히 큰 값을 보인다. 그리고 RV^{sc1} 과 RV^{sc2} 의 경우 2008년, 2010년, 2012년의 큰 변동이 더 크게 반영되었음을 확인할 수 있다. 또한 RV^{sum} , RV^{wgh} 의 경우 2010년과 2012년의 변동이 크게 반영되었음을 볼 수 있다.

Figure 4.4의 S&P500의 경우도 마찬가지로, 모든 실현변동성이 금융위기 때 값이 커지는 것을 볼 수 있다. 그리고 RV^{sum} , RV^{wgh} 의 경우 2012년의 변동이 크게 반영되었음을 볼 수 있다.

각 실현변동성들의 기초통계량이 Table 4.1에 정리되어 있다. 각 데이터별 실현변동성들의 평균과 표준 편차에는 꽤 차이가 있어 보인다. 환율데이터인 원/달러환율의 경우 RV^{sc1} 의 평균이 가장 작고, 주가 지수 데이터인 KOSPI, NASDAQ, S&P500의 경우 RV^{sc2} 의 평균이 가장 작은 것을 확인할 수 있다.

Table 4.1. Basic statistics of the RVs

	Mean $\times 10^3$				SD $\times 10^3$			
	RV^{sc1}	RV^{sc2}	RV^{sum}	RV^{wgh}	RV^{sc1}	RV^{sc2}	RV^{sum}	RV^{wgh}
KRW/USD	0.067	0.074	0.073	0.067	0.380	0.418	0.328	0.299
KOSPI	0.189	0.187	0.195	0.189	0.443	0.437	0.451	0.420
NASDAQ	0.188	0.175	0.175	0.188	0.381	0.353	0.347	0.368
S&P500	0.171	0.143	0.147	0.171	0.443	0.369	0.359	0.419

Table 4.2. MAE and RMSE of the RVs

	MAE $\times 10^5$				RMSE $\times 10^5$			
	RV^{sc1}	RV^{sc2}	RV^{sum}	RV^{wgh}	RV^{sc1}	RV^{sc2}	RV^{sum}	RV^{wgh}
KRW/USD	7.789	8.185	8.125	7.914	50.788	52.706	46.103	45.149
KOSPI	19.328	19.233	21.417	20.029	52.974	52.850	54.532	51.997
NASDAQ	19.020	18.478	19.041	19.202	48.292	47.965	48.406	47.876
S&P500	16.838	15.768	16.466	17.280	48.175	47.489	47.916	48.233

4.2. 비교요약

이제 데이터별로 네 가지의 실현변동성을 비교분석해보고자 한다. 실제 하루변동성인 IV_t 는 관측되지 않기 때문에 본 연구에서는 Patton (2011)이 제안한 방법론을 이용하였다. Patton은 실제 변동성(IV_t)을 알 수 없는 상황에서 조건적으로 불편성을 띄는 추정치(proxy)로서 다음날의 일일 로그수익률의 제곱(daily squared log return; r_{t+1}^2)을 사용하는 것을 고려하였다. 이 때, 다른 변동성 추정치들의 추정오차는 당일의 로그수익률의 제곱(r_t^2)의 오차와 상관되어있기 때문에, 이를 해결하기 위해 한 시점 다음의 일일 로그수익률의 제곱(r_{t+1}^2)을 사용한 것이다. 먼저 4.2.1절에서는 식 (2.2)의 MAE와 RMSE를 통해 비교할 것이다. 이어서 4.2.2절에서는 Hansen 등 (2011)의 MCS(Model Confidence Set) 방법을 이용한 비교를 할 것이고, 4.2.3절에서는 Diebold와 Mariano (1995)의 DM 검정으로 비교 분석 할 것이다.

4.2.1. MAE와 RMSE 비교 두 가지 검정 결과를 살펴보기에 앞서, 우선 MAE(Mean Absolute Error)와 RMSE(Root Mean Square Error) 결과를 살펴보자. Table 4.2에서 MAE, RMSE가 각각 가장 작은 추정치가 정확한 추정치라고 할 수 있다. 추정오차가 작기 때문이다. 먼저 MAE 기준으로 보면 원/달러환율을 제외한 세 가지 주가 지수에서 RV^{sc2} 가 실현변동성의 가장 정확한 추정치라는 결과를 얻을 수 있다. 또한 RMSE 기준으로는 S&P500을 제외한 세 가지 데이터에 대해서는 모두 RV^{wgh} 가 가장 좋은 추정치이고, 그 다음으로는 RV^{sc2} 가 좋은 추정치이다. 이 분석 결과를 바탕으로 다른 두 가지 검정 결과를 다음 절에서 살펴보겠다.

4.2.2. MCS 비교 이렇게 파악된 RV^{sc1} 와 RV^{sc2} 의 상대적 우수성을 좀 더 통계적인 방법을 통해 대해 살펴보려한다. Hansen 등 (2011)에 따르면 MCS 절차(Model Confidence Set procedure)는 실제 모형을 모르는 경우 총 J 개의 후보 모형(M_1, M_2, \dots, M_J) 중 최적 모형을 가려내는 방법이다. MCS(Model Confidence Set; M^*)이란 최적모형들의 집합이다. 이 방법은 붓스트랩을 이용하여 주어진 신뢰수준 α 에서 유의하게 좋지 않은 모델(inferior model)들을 차례로 제거하고 마지막에 남겨진 모델을 가장 좋은 모델(superior model)로 선택하는 소거법(Elimination method)을 이용한다. 본 연구에서는 유의수준을 5%로 하였다. MCS 검정 결과로 얻어지는 모형 M_i 의 p -value는 모형 M_i 가

Table 4.3. *P*-value in the model confidence set analysis

	Absolute error loss				Square error loss			
	RV^{sc1}	RV^{sc2}	RV^{sum}	RV^{wgh}	RV^{sc1}	RV^{sc2}	RV^{sum}	RV^{wgh}
KRW/USD	1.000	0.203	0.532	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000
KOSPI	0.000	1.000	0.000	0.000	0.445	0.603	0.000	1.000
NASDAQ	1.000	1.000	0.997	0.085	0.886	1.000	0.678	1.000
S&P500	0.000	1.000	0.000	0.000	0.721	1.000	1.000	0.467

M^* 에 포함될 확률이다. 이 확률이 1에 가까울수록 좋은 모형이라고 할 수 있고 이를 통해 후보 모형들의 순위(rank) 또한 얻을 수 있다. 거리 측도로는 다음 두 가지의 손실함수를 사용하였다.

$$\text{Loss 1 : Loss function} = |\theta_t - RV_{it}|, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \theta_t = r_{t+1}^2,$$

$$\text{Loss 2 : Loss function} = (\theta_t - RV_{it})^2, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \theta_t = r_{t+1}^2,$$

여기에서 절대오차 손실함수(Loss 1), 제곱오차 손실함수(Loss 2)는 각각 MAE, RMSE에 대응하며 $RV_{1t} = RV^{sc1}$, $RV_{2t} = RV^{sc2}$, $RV_{3t} = RV^{sum}$, $RV_{4t} = RV^{wgh}$ 이다.

Table 4.3은 MCS 분석 결과 얻은 *p*값을 나타낸 것이다. *p*값이 1에 가까울수록 MCS에 포함될 확률이 높은 모형이라고 해석할 수 있고 이를 이용하여 순위를 매길 수 있다.

결과를 해석해보면 우선 원/달러환율의 경우 절대오차 손실함수를 기준으로 RV^{sc1} 과 RV^{wgh} 의 MCS (Model Confidence Set, Best Model Set)에 포함될 확률이 1로 공동 1위라고 할 수 있다. 그 뒤를 이어 RV^{sum} 가 좋고, RV^{sc2} 가 가장 좋지 않은 모형이다. 이러한 결과는 4.2.1절에서 확인한 MAE 비교 결과와 일치한다. 또한 제곱오차 손실함수를 기준으로 하면 압도적으로 RV^{wgh} 가 가장 실현변동성 실제 값에 가까운 모형으로 선택되어진다.

KOSPI의 경우, 절대오차 손실함수의 경우 RV^{sc2} 가 선택되어지고, 이는 MAE 최소 결과와 일치한다. 또한 제곱오차 손실함수를 기준으로 하면, RV^{wgh} , RV^{sc2} , RV^{sc1} , RV^{sum} 순으로 선택되며 RV^{sc2} , RV^{sc1} 의 *p*값이 작지 않다. 이 결과 또한 RMSE 결과와 다르지 않다.

다른 데이터에 비해서 NASDAQ은 네 가지 실현변동성 모형에서 큰 차이 없는 *p*값을 확인할 수 있다. 먼저 절대오차 손실함수 기준으로 RV^{sc1} 과 RV^{sc2} 이 모두 MCS에 포함될 확률이 1이며, RV^{sum} 과 RV^{wgh} 의 *p*값 또한 작지 않다. 또한 제곱오차 손실함수 기준으로도 RV^{sc2} 와 RV^{wgh} 이 공동 1위이며 RV^{sum} 과 RV^{sc1} 의 *p*값도 상당히 크다. 이 결과는 Table 4.2에서 각 추정치들의 MAE, RMSE의 차이가 크지 않다는 사실과도 일맥상통한다. 따라서 NASDAQ의 경우, 네 가지 추정치들의 MCS 기준에 따른 정확도가 비슷하다는 결론을 얻을 수 있다.

마지막으로 S&P500은 절대오차 손실함수를 기준으로 RV^{sc2} , 제곱오차 손실함수를 기준으로 RV^{sc2} 와 RV^{sum} 이 모두 좋은 추정치라는 것을 확인할 수 있다.

4.2.3. DM 검정에 의한 비교 네 가지의 실현변동성 비교를 위해, 단측 DM 검정(one-sided Diebold-Mariano test)도 시행해보았다. DM 검정의 귀무가설과 대립가설은 다음과 같다.

$$H_0 : \text{방법 1과 방법 2의 예측 정확성이 같다.}$$

$$H_1 : \text{방법 2의 예측 정확성이 더 좋다.}$$

DM 검정은 두 개의 추정치를 손실함수를 이용하여 비교하는 방법이다. 예를 들어 RV^{sc1} 과 RV^{sc2} 비교시, $d = l(RV_t^{sc1} - r_{t+1}^2) - l(RV_t^{sc2} - r_{t+1}^2)$ 의 평균이 0인지를 검정하는 것이다. 여기서 MAE와

Table 4.4. *P*-value for the Diebold-Mariano test

	m_1	Absolute error loss				Square error loss			
		m_2				m_2			
		RV^{sc1}	RV^{sc2}	RV^{sum}	RV^{wgh}	RV^{sc1}	RV^{sc2}	RV^{sum}	RV^{wgh}
KRW/USD	RV^{sc1}	-	1.000	0.801	0.606	-	0.936	0.170	0.153
	RV^{sc2}	0.000	-	0.447	0.301	0.064	-	0.127	0.119
	RV^{sum}	0.199	0.553	-	0.018	0.830	0.873	-	0.083
	RV^{wgh}	0.394	0.699	0.982	-	0.847	0.881	0.917	-
KOSPI	RV^{sc1}	-	0.000	1.000	0.993	-	0.029	0.710	0.267
	RV^{sc2}	1.000	-	1.000	0.998	0.971	-	0.724	0.295
	RV^{sum}	0.000	0.000	-	0.000	0.290	0.276	-	0.031
	RV^{wgh}	0.007	0.002	1.000	-	0.733	0.705	0.969	-
NASDAQ	RV^{sc1}	-	0.000	0.526	0.824	-	0.222	0.528	0.338
	RV^{sc2}	1.000	-	0.971	1.000	0.778	-	0.614	0.464
	RV^{sum}	0.474	0.029	-	0.882	0.472	0.386	-	0.230
	RV^{wgh}	0.176	0.000	0.118	-	0.662	0.536	0.770	-
S&P500	RV^{sc1}	-	0.000	0.114	0.945	-	0.212	0.430	0.519
	RV^{sc2}	1.000	-	0.998	1.000	0.788	-	0.682	0.767
	RV^{sum}	0.886	0.002	-	1.000	0.570	0.318	-	0.704
	RV^{wgh}	0.055	0.000	0.000	-	0.481	0.233	0.296	-

Note: Each *p*-value is for the alternative hypothesis that the corresponding upper statistic is better than the corresponding left statistic.

RMSE에 대해 각각 손실함수는 $\ell(e) = |e|$ 또는 e^2 이다. 이때 d 의 계열 상관을 감안하여 계산한 표준오차를 사용한다. Table 4.4에 각 데이터별로 네 가지 실현변동성의 DM 검정 결과의 *p*값을 나타내었다. 신뢰수준 5% 하에서 유의미한 값들은 진하게 표시를 하였고, 통계적으로 방법 2의 예측 정확성(forecast accuracy)이 더 좋다고 해석할 수 있다.

전체적으로 보면 절대오차 손실함수의 경우 원/달러를 제외한 세 주가 지수 데이터에 있어서 RV^{sc2} 가 다른 세 가지 추정치보다 정확성이 더 좋다는 결과를 보인다.

원/달러의 경우 DM 검정 결과, 절대오차 손실함수 기준으로 RV^{sc1} 이 RV^{sc2} 보다 유의수준 5% 하에서 유의미하게 정확하다는 결과를 얻을 수 있다.

KOSPI의 경우 절대오차 손실함수로부터 RV^{sc2} 가 가장 좋고, RV^{sc1} 가 그 다음으로 좋다는 결과를 얻을 수 있다. Table 4.2에서 RV^{sc1} 과 RV^{sc2} 의 MAE가 19.328, 19.233로 큰 차이가 없음에도 불구하고 MCS 분석 결과 (Table 4.3)에서 절대오차 손실함수의 RV^{sc1} 의 *p*값이 0이다. RV^{sc1} 보다 RV^{sc2} 가 실현변동성을 추정하는데 더 좋은 추정치라는 의미이고, 이 결과가 통계적으로 유의하다는 사실을 위 DM 검정으로부터 확인할 수 있다. 또한 RV^{sum} 는 통계적으로 유의하게 가장 안 좋은 방법이다. 그리고 KOSPI는 제곱오차 손실함수 기준에서 RV^{sc2} 이 RV^{sc1} 보다 통계적으로 유의하게 좋고 RV^{wgh} 이 RV^{sum} 보다 좋다는 결과를 얻었다.

다음으로 NASDAQ의 결과를 보자. 절대오차 손실함수 기준으로 RV^{sc2} 가 다른 모형들에 비해 좋다는 사실을 알 수 있다. 제곱오차 손실함수 기준으로는 아무런 통계적인 유의성이 보이지 않았지만 RV^{sc2} 를 방법 2로 두고 다른 모형과 비교한 결과의 *p*값들이 크지 않다.

S&P500도 NASDAQ과 마찬가지로의 결과에 더불어 절대오차 손실함수 기준에서 RV^{wgh} 가 가장 안 좋은 하위 모형이라는 결과를 확인 가능하다.

Table 4.5. MAE and RMSE of the RVs based on 1 and 10 minute sampling

		MAE $\times 10^5$				RMSE $\times 10^5$			
		RV^{sc1}	RV^{sc2}	RV^{sum}	RV^{wgh}	RV^{sc1}	RV^{sc2}	RV^{sum}	RV^{wgh}
1 minute sampling	KRW/USD	7.503	9.353	8.673	7.530	46.118	50.007	45.988	44.608
	KOSPI	20.347	18.649	20.952	20.407	55.214	55.053	56.901	54.643
	NASDAQ	18.608	17.984	19.088	19.011	47.228	46.880	49.236	47.831
	S&P500	16.582	14.882	15.318	18.666	47.648	47.410	48.012	52.208
10 minute sampling	KRW/USD	7.874	8.115	8.094	8.303	58.253	60.073	47.646	45.560
	KOSPI	19.341	19.187	21.146	20.185	53.277	53.074	53.641	51.938
	NASDAQ	18.905	18.317	19.015	19.585	48.015	47.525	48.596	48.743
	S&P500	16.877	15.725	16.662	17.366	49.354	48.259	49.174	49.352

4.2.4. 종합적인 평가 4.2절에서 설명한 세 가지 비교 결과를 논의하려한다. 4.2.1절의 MAE, RMSE 결과와 4.2.2절의 MCS test 결과, 그리고 4.2.3절의 DM test 결과를 모두 종합하여 살펴보면 환율과 주식 데이터간의 차이를 확인할 수 있다.

원/달러환율은 MAE 기준으로 RV^{sc1} , RMSE 기준으로 RV^{wgh} 가 최적모형으로 선택되었다. MCS 분석에서 절대오차 손실함수에서 RV^{sc1} , RV^{wgh} 이 모두 좋은 모형이라는 결과가 나왔으므로 종합하여 RV^{wgh} 가 실현변동성의 최적 추정치라고 할 수 있겠다.

또한 세 가지 주식 데이터의 결과를 종합하여 살펴보자. 먼저 절대오차 손실함수 기준을 확인해보자. 세 가지 자산 모두 RV^{sc2} 의 MAE가 최소이고, MCS 분석 결과 RV^{sc2} 가 1위라는 결과를 얻었다. DM검정도 이러한 사실을 뒷받침해준다. 따라서 RV^{sc2} 가 확실히 좋은 모형이라는 사실을 세 가지 분석 결과를 통해 확인할 수 있었다. 이어서 제곱오차 손실함수 기준을 확인해보면 S&P500은 RV^{sc2} 의 RMSE가 가장 작고 MSC 분석 결과 RV^{sc2} 가 1위 모형이다. KOSPI와 NASDAQ은 RV^{wgh} 가 첫 번째, RV^{sc2} 가 두 번째로 RMSE가 작다. 하지만 MCS 분석결과, NASDAQ은 RV^{sc2} 을 공동 1위로 뽑았고, KOSPI는 RV^{sc2} 가 2위이지만 p 값이 0.678으로 작지 않았기 때문에 나쁜 모형이라고 할 수 없다. 이를 바탕으로 주식 데이터의 실현변동성에 대한 최적 추정치를 구하는 방법으로는 두 번째 크기조정 방법이 가장 좋다고 할 수 있겠다.

4.3. 샘플링 간격에 따른 민감도 분석

위의 결과들은 샘플링 간격이 5분일 때의 실현변동성을 계산한 것이다. 샘플링 간격이 달라지면 이 결과가 유지되는지 확인하기 위해 1분 간격 샘플링과 10분 간격 샘플링으로 실현변동성을 구하고 MAE, RMSE 분석을 하였다.

Table 4.5는 Table 4.2의 5분 간격 샘플링 결과와 비교할 수 있다. MAE, RMSE의 최솟값을 각각 진하게 표시하였다. 1분 간격 결과와 10분 간격 결과가 일치하는 것을 확인 가능하다. 또한 5분 간격 결과와도 크게 다르지 않은데, NASDAQ의 MCS 결과, 제곱오차 손실함수의 경우 RV^{sc2} 가 공동 1위인 것을 감안하면 전체적으로 동일한 결과라고 할 수 있다. 따라서 실현변동성 최적 추정치 선택은 샘플링에 따라 민감하게 반응하지 않는다고 할 수 있겠다.

5. 결론 및 논의

주식, 환율 등의 금융 시장에서 거래시간인 장내시간에는 고빈도 데이터가 이용가능하나 장외시간에는 데이터가 존재하지 않거나 간헐적인 데이터만 존재한다. 따라서 장내시간의 고빈도 수익률과 장외시간

의 수익률을 반영하여 하루 변동성을 추정하는 방식은 장외시간의 적분변동성 추정치와 장내시간의 적분변동성 추정치를 단순합하는 방식, 장내시간의 적분변동성 추정치에 상수를 곱해 크기 조정하는 방식, 장외시간의 적분변동성 추정치와 장내시간의 적분변동성 추정치의 선형결합을 하는 방식이 존재한다.

본 연구에서는 미국 금융시장의 대표적인 시계열인 NASDAQ과 S&P500지수와 우리나라의 KOSPI지수와 원/달러환율의 일별 데이터를 사용하여 네 가지의 하루 변동성 추정치들을 비교하는 분석을 시행하였다. 이들의 예측 정확도를 비교하기 위한 방법으로는 MCS(Model Confidence Set) Approach와 DM(Diebold-Mariano) Test를 사용하였다.

종합적으로 비교한 결과, 환율은 장외시간 적분 변동성 추정치와 장내시간 적분 변동성 추정치의 선형결합으로 구한 추정치, 주식은 장내시간 적분변동성 추정치에 상수를 곱해줌으로써 하루 변동성으로 확장한 크기조정 추정치의 예측 정확도가 높게 나타났다.

환율과 주식에 대한 최적 추정치가 다르게 구해진 이유 중 하나는 원/달러환율의 장외거래가 있기 때문이다. 원/달러환율은 국내 거래시간 이외에도 해외에서 거래되는 장외거래가 활발히 이루어진다. 예를 들어 미국의 거래시간은 한국의 00:00부터 06:00까지이다. 이러한 장외거래 때문에 장외시간 추정치인 $r_{ON,t}^2$ 가 더욱 잡음이 있다. 이것 대신 Yun과 Shin (2015)에서와 같이 장외시간에 이루어진 거래 데이터를 좀더 적극적으로 활용하여 장외시간 실현변동성을 추정하여 일일 실현변동성을 추정하는 것을 향후 연구에서 고려할 수도 있겠다.

References

- Anderson, T. G., Bollerslev, T., and Das, A. (1998). Testing for market microstructure effects in intraday volatility: a reassessment of the Tokyo FX experiment (No. w6666). National bureau of economic research.
- Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2005). Realized covariation, realized beta and microstructure noise. Unpublished paper, Graduate School of Business, University of Chicago.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002). Estimating quadratic variation using realized variance, *Journal of Applied Econometrics*, **17**, 457–477.
- Diebold, F. X. and Mariano, R. S. (1995). Comparing predictive accuracy, *Journal of Business & Economic Statistics*, **13**, 253–264.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005). A realized variance for the whole day based on intermittent high-frequency data, *Journal of Financial Econometrics*, **3**, 525–554.
- Hansen, P. R., Lunde, A., and Nason, J. M. (2011). The model confidence set, *Econometrica*, **79**, 453–497.
- Hull, J. and White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *The Journal of Finance*, **42**, 281–300.
- Koopman, S. J., Jungbacker, B., and Hol, E. (2005). Forecasting daily variability of the S&P100 stock index using historical, realised and implied volatility measurements, *Journal of Empirical Finance*, **12**, 445–475.
- Martens, M. (2002). Measuring and forecasting S&P500 index-futures volatility using high-frequency data, *Journal of Futures Markets*, **22**, 497–518.
- Patton, A. J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies, *Journal of Econometrics*, **160**, 246–256.
- Yun, S. and Shin, D. W. (2015). Forecasting the realized variance of the log-return of Korean won US dollar exchange rate addressing jumps both in stock-trading time and in overnight, *Journal of the Korean Statistical Society*, **44**, 390–402.

장외시간 수익률을 반영한 실현변동성 추정치들의 비교

조수진^a · 김도연^a · 신동완^{a,1}

^a이화여자대학교 통계학과

(2015년 12월 14일 접수, 2015년 12월 29일 수정, 2015년 12월 29일 채택)

요약

본 논문은 장외거래 수익률을 이용하여 추정한 여러 실현변동성들을 실증적으로 비교분석한다. 실제 금융 자산 시장에서는 장외시간이나 휴일에 거래가 적거나 드물게 나타나기 때문에 하루 전체의 실현변동성을 정확히 계산하는데 문제가 발생한다. 이를 해결하기 위해 제안되어진 장외거래 수익률을 여러 가지 방법으로 반영한 다양한 실현변동성의 추정치들에 대한 검토가 이루어진다. 실제 데이터의 실현변동성 추정치들의 예측정확성을 비교하기 위해 미국의 NASDAQ 지수와 S&P500 지수와 우리나라의 KOSPI 지수와 원/달러환율이 분석된다. 적분변동성의 불편추정치인 다음날의 로그수익률의 제곱을 기준으로 일일 실현 변동성의 추정치들은 비교되어지며 비교를 위해 절대평균오차(MAE)와 제곱평균오차근(RMSE)이 이용된다. 또한 통계적 추론을 위하여 Model Confidence Set(MCS) 방법과 Diebold-Mariano 검정법을 사용한다. 세 가지 주가지수 데이터에 대해 동일한 최적 방법이 선택되어지는데, 장외시간 수익률을 이용하여 장내시간 실현변동성의 크기 조정을 한 방법이다.

주요용어: 실현변동성, 고빈도 자료, 장외수익률, 프록시, model confidence set approach, Diebold-Mariano 검정

이 논문은 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. NRF-2009-0093827).

¹교신저자: (03760) 서울특별시 서대문구 이화여대길 52, 이화여자대학교 통계학과.

E-mail: shindw@ewha.ac.kr