

Wild bootstrap Ljung-Box test for autocorrelation in vector autoregressive and error correction models

Myeongwoo Lee^a · Taewook Lee^{a,1}

^aDepartment of Statistics, Hankuk University of Foreign Studies

(Received December 2, 2015; Revised December 22, 2015; Accepted December 23, 2015)

Abstract

We consider the wild bootstrap Ljung-Box (LB) test for autocorrelation in residuals of fitted multivariate time series models. The asymptotic chi-square distribution under the IID assumption is traditionally used for the LB test; however, size distortion tends to occur in the usage of the LB test, due to the conditional heteroskedasticity of financial time series. In order to overcome such defects, we propose the wild bootstrap LB test for autocorrelation in residuals of fitted vector autoregressive and error correction models. The simulation study and real data analysis are conducted for finite sample performance.

Keywords: Ljung-Box test, vector autoregressive model, vector error correction model, Wild bootstrap

1. 서론

시계열 분석에서 모형 진단은 적합한 모형이 자료를 적절히 설명하고 있는지 확인하는 중요한 단계이다. 모형 진단은 주로 적합된 모형의 잔차를 기반으로 이루어지는데, 잔차의 자기상관성 존재 유무를 판별하는 대표적인 검정 방법으로 Ljung과 Box (1978)가 제안한 Ljung-Box(LB) 검정통계량이 있다. 잔차를 이용한 LB 검정통계량이 점근적 카이제곱 분포 하에서 오차가 백색잡음이라는 귀무가설을 기각하지 못하면 적합한 시계열 모형이 적절하다고 결정한다. 금융 시계열 자료는 일반적으로 조건부 이분산성의 성질을 나타내는 데, 금융시계열 자료의 평균 부분에 대한 통계적 추론을 하는 경우 조건부 이분산성의 영향을 받아 추정의 효율이 떨어지거나 검정에서 제 1종의 오류를 만족시키지 못할 수도 있음이 잘 알려져 있다 (Gonçalves와 Kilian, 2004). 따라서 시계열 모형 적합 후 얻은 잔차를 이용한 LB 검정통계량을 조건부 이분산성이 존재하는 금융 시계열 자료에 적용하는 것은 적절하지 않을 수 있는데, 이를 극복하기 위해 Liu (1988)와 Mammen (1993)은 조건부 이분산성의 유무와 관계없이 어떤 경우에서나 적용할 수 있는 와일드 붓스트랩(Wild bootstrap)을 개발하였다. 와일드 붓스트랩 기법을 이용한 최신 금융 시계열 자료 응용 사례로 다변량 시계열 자료의 자기상관성 검정 등을 다룬 Ahlgren과 Catani (2012)와 Catani 등 (2014)을 들 수 있다. Ahlgren과 Catani (2012)는 Lagrange multiplier(LM) 검정에 와일드 붓스트랩을 도입하여 오차에 조건부 이분산성이 존재하는 경우에도 LM 검정이 유효함을 입증하였다.

This work was supported by Hankuk University of Foreign Studies Research Fund of 2015.

¹Corresponding author: Department of Statistics, Hankuk University of Foreign Studies, 81, Oedae-ro, Mohyeon-myeon, Cheoin-gu, Yongin-si, Gyeonggi-do 17035, Korea. E-mail: twlee@hufs.ac.kr

본 논문에서는 LB 검정통계량에 와일드 붓스트랩 기법을 적용하는 연구를 진행하고자 한다. 구체적으로 대표적인 다변량 시계열 모형인 벡터자기회귀모형(Vector Autoregressive Model; VAR)과 벡터오차수정모형(Vector Error Correction Model; VECM)의 모형 진단을 수행하기 위해 추정된 잔차를 사용하여 와일드 붓스트랩 LB 검정통계량의 방법을 제안하고, 오차에 조건부 이분산성이 있는 경우를 가정하여 기존의 검정법과 비교한 후 그 우수성을 입증하고자 한다. 와일드 붓스트랩 표본을 얻기 위해 Gonçalves와 Kilian (2004)가 제안한 순환(Recursive-Design) 방법을 사용하였다. 끝으로 대표적인 금융시계열 자료인 KOSPI200 지수와 선물가격을 사용하여 실증분석을 진행하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 우선 2장에서 다변량 시계열 모형의 적합도 검정에 대하여 살펴본다. 다음으로 3장에서 와일드 붓스트랩 LB 검정 알고리즘을 제안한다. 4장과 5장에서는 각각 모의 실험과 실증자료 분석 결과를 설명하고 4장에서는 본 논문의 결론을 내린다.

2. 다변량 시계열 모형의 적합도 검정

본 논문에서는 다변량 시계열 모형의 적합도 검정을 위해 벡터 자기회귀 모형과 벡터 오차수정 모형을 고려한다. k 차원 다변량 시계열 자료 $\{\mathbf{X}_t\}$ 에 대하여 차수가 p 인 벡터 자기회귀 모형은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{X}_t = \mu + \sum_{i=1}^p \Pi_i \mathbf{X}_{t-i} + \epsilon_t, \quad (2.1)$$

여기서 Π_1, \dots, Π_p 는 $k \times k$ 차원의 모수 행렬, μ 는 $k \times 1$ 차원의 평균 벡터이다. 다음으로 k 차원 다변량 시계열 자료 $\{\mathbf{X}_t\}$ 에 대하여 차수가 p 인 벡터 오차수정 모형은 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta \mathbf{X}_t = \alpha \beta' \mathbf{X}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta \mathbf{X}_{t-i} + \epsilon_t, \quad (2.2)$$

여기서 $\Delta \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t-1}$, 공적분의 수가 r 인 경우 α 와 β 는 $k \times r$ 차원의 행렬, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{p-1}$ 은 $k \times k$ 차원의 모수 행렬이다. 벡터 자기회귀 모형과 벡터 오차수정 모형에 대한 자세한 내용은 Tsay (2010)을 참고하기 바란다. 다변량 LB 검정을 위해 벡터 자기회귀 모형식 (2.1)과 벡터 오차수정 모형식 (2.2)의 오차 ϵ_t 에 대하여 아래 식 (2.3)과 같은 차수 h 인 자기회귀구조를 고려한다.

$$\epsilon_t = \Psi_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \Psi_h \epsilon_{t-h} + \mathbf{e}_t. \quad (2.3)$$

단, \mathbf{e}_t 은 평균벡터가 $\mathbf{0}$ 이고 공분산행렬 Σ 을 가진 다변량 정규분포를 따르는 IID 확률벡터이다. 이 때 공분산행렬 Σ 는 비특이행렬(Non-singular matrix)이고 양정치행렬(Positive definite)이다. 오차에 자기상관성이 없다는 귀무가설과 그렇지 않다는 대립가설은 식 (2.3)의 $k \times k$ 모수행렬 Ψ_1, \dots, Ψ_h 를 이용하여 아래와 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} H_0 : \Psi_1 = \dots = \Psi_h = \mathbf{0}, \\ H_1 : \text{not } H_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

다변량 시계열 자료에 적합한 모형이 적절한 지 살펴보기 위해 잔차를 이용하여 통계적 검정을 실시하는 것이 일반적이다. 만약 모형이 잘 선택되고 추정이 적절하게 이루어 졌다면 잔차는 모형 오차의 성질을 만족하게 될 것이며, 이 경우 모형 잔차에 백색잡음의 성질이 나타나게 되어 적합한 모형이 적절하다는 결론을 내린다. 이와 같이 잔차의 자기상관성을 검정하는 대표적인 통계적 방법으로 LB 검정통계량을

들 수 있다. 참고로 Hosking (1980)과 Li와 McLeod (1981)는 다변량 시계열 모형의 적합도 검정을 위한 LB 검정통계량을 연구하였는데, 다변량 LB 검정통계량은 다변량 시계열 자료의 자기상관관계와 교차 상관관계를 검정하는 통계량이다. 한편 다변량 시계열 모형 (2.1)과 (2.2)의 모형 진단을 위한 LB 검정통계량은 아래 식 (2.5)와 같다.

$$Q_k(m) = T^2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{T-i} \text{tr} \left(\hat{\mathbf{C}}_i' \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \hat{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{C}}_0^{-1} \right), \quad (2.5)$$

여기서 T 는 자료의 크기, k 는 잔차의 차원, $\text{tr}(A)$ 는 행렬 A 의 대각원소의 합이다. i 는 시차를 뜻하고, $\hat{\mathbf{C}}_i$ 는 i -시차의 잔차 상관관계 행렬로서 모형 잔차를 $\{\hat{\epsilon}_t\}$ 라고 할 때 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\mathbf{C}}_i = \frac{1}{T-p} \sum_{t=p+i+1}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_{t-i}'.$$

다변량 LB 검정통계량 (2.5)는 귀무가설 (2.4) 하에서 점근적으로 카이제곱분포를 따르게 된다. 참고로 원 시계열자료의 자기상관성 유무를 검정할 경우는 카이제곱분포의 자유도가 $k^2 m$ 이지만 적합된 모형의 잔차에 대한 다변량 LB 검정에서는 추정된 모수만큼 자유도가 줄어들게 됨을 유의해야 한다. 벡터 자기회귀 모형일 때의 오차에 대한 LB 통계량의 자유도는 $k^2 m - k^2 p$ 이고, 벡터오차수정 모형의 자유도는 Brüggemann 등 (2006)에 의해 $k^2 m - (\alpha, \mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_{p-1})$ 의 추정된 모수의 갯수가 된다.

3. 와일드 붓스트랩 LB 검정 알고리즘

유한 표본에서 자료의 갯수가 적은 경우 통계량의 극한분포가 근사적으로 유효하지 않기 때문에 통계적 추론의 효율성이 저하되는 현상이 발생한다. 이를 극복하기 위해 검정통계량의 극한 분포를 대신하여 붓스트랩 표본 분포를 이용하는 방법을 고려해 볼 수 있다. 붓스트랩은 IID 자료뿐만 아니라 시계열 자료에도 응용될 수 있는 데 자기회귀 모형에서 사용되는 붓스트랩 방법을 소개하면 다음과 같다. 우선 시계열자료 $\{X_t\}$ 를 이용하여 차수가 p 인 자기회귀 모형

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

을 적합하여 모수 추정값 $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p)'$ 와 잔차 $\{\hat{\epsilon}_t\}$ 를 생성한다. 다음으로 아래 식과 같은 반복 절차를 통해 붓스트랩 시계열 자료를 생성한다.

$$X_t^* = \hat{\phi}_1 X_{t-1}^* + \dots + \hat{\phi}_p X_{t-p}^* + \epsilon_t^*, \quad (3.1)$$

여기서 $\{\epsilon_t^*\}$ 는 잔차 $\{\hat{\epsilon}_t\}$ 에서 독립적으로 복원추출된 붓스트랩 표본을 의미한다.

대부분의 금융 시계열 자료는 조건부 이분산성의 성질을 나타내는 데 IID 형태의 표본을 생성하는 기존의 붓스트랩을 이용하는 경우 통계적 추론에서 추정의 효율성이 급격히 나빠지거나 검정의 제 1종의 오류를 만족시키지 못할 수도 있음이 알려져 있다. 이를 극복하기 위해 Liu (1988)와 Mammen (1993)이 개발한 와일드 붓스트랩(Wild bootstrap) 방법을 이용할 수 있는데, 와일드 붓스트랩 기법을 이용한 최신 금융 시계열 자료 응용 사례로 다변량 시계열 자료의 자기상관성 검정 등을 다룬 Ahlgren과 Catani (2012)와 Catani 등 (2014)을 들 수 있다. 한편 Gonçalves와 Kilian (2004)이 개발한 잔차를 이용하는 순환 와일드 붓스트랩 방법은 식 (3.1)의 붓스트랩을 개선한 방법으로써 다음 식과 같은 반복 절차를 통해 와일드 붓스트랩 시계열 자료를 생성한다.

$$X_t^* = \hat{\phi}_1 X_{t-1}^* + \dots + \hat{\phi}_p X_{t-p}^* + \epsilon_t^*, \quad (3.2)$$

$$\epsilon_t^* = w_t \hat{\epsilon}_t.$$

이 때, w_t 는 평균이 0이고, 분산이 1인 IID 확률변수로서 $E|w_t|^4 < \infty$ 를 만족해야 한다. 가장 대표적인 w_t 는 Mammen (1993)이 개발한 다양한 분포 중에서 Davidson과 Flachaire (2008)에 의해 언급된 Rademacher 분포이며 다음과 같이 정의한다.

$$w_t = \begin{cases} 1, & p_1 = \frac{1}{2}, \\ -1, & p_2 = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (3.3)$$

여기서 p_1 과 p_2 는 확률변수 w_t 가 각각 1과 -1 이 관측될 확률이다. 이 외에도 Mammen (1993)이 개발한 다양한 보조 분포를 활용한 와일드 붓스트랩이 개발되어 있다. 와일드 붓스트랩의 점근적 유효성에 대한 증명은 Gonçalves와 Kilian (2004)를 참고하기 바란다.

와일드 붓스트랩을 사용하는 데 중요한 가장 기본적인 성질은 와일드 붓스트랩 표본은 원 시계열 자료와 다르게 평균 부분의 자기 상관성은 사라지지만 분산 부분의 자기상관성은 원 시계열 자료와 동일하다는 점이다. 이와 같은 성질을 적절히 사용하면 조건부 이분산성이 있는 금융 시계열 자료의 평균 부분의 통계적 추론에서 발생하는 문제점을 개선할 수 있다. 다변량 시계열 자료의 LB 검정을 위한 붓스트랩 알고리즘과 와일드 붓스트랩 알고리즘을 아래 알고리즘 1과 2에 소개하고자 한다.

알고리즘 1. 붓스트랩 LB 검정

1. 시계열 자료 $\{\mathbf{X}_t\}$ 에 다변량 시계열 모형 (2.1) 또는 (2.2)를 적합한 후 추정된 잔차 $\{\hat{\epsilon}_t\}$ 를 이용하여 식 (2.5)의 LB 검정통계량 Q_{LB} 를 계산한다.
2. 추정된 잔차 $\{\hat{\epsilon}_t\}$ 로부터 복원추출로 랜덤포본 $\{\epsilon_t^*\}$ 를 생성한다.
3. 식 (3.1)의 잔차를 이용한 순환 붓스트랩 방법을 이용하여 반복적으로 $\{\mathbf{X}_t^*\}$ 를 생성한다.
4. 붓스트랩 표본 $\{\mathbf{X}_t^*\}$ 를 이용하여 식 (2.5)의 붓스트랩 LB 검정통계량 Q_{LB}^* 를 계산한다.
5. 2-4의 절차를 B 번 반복하여 총 B 개의 붓스트랩 LB 검정통계량 $\{Q_{LB}^{1*}, \dots, Q_{LB}^{B*}\}$ 를 계산한다.
6. 총 B 개의 붓스트랩 LB 검정통계량을 이용하여 다음과 같이 유의확률을 계산한다.

$$\hat{p}^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B I \{Q_{LB}^{b*} \geq Q_{LB}\}.$$

알고리즘 2. 와일드 붓스트랩 LB 검정

1. 시계열 자료 $\{\mathbf{X}_t\}$ 에 다변량 시계열 모형 (2.1) 또는 (2.2)를 적합한 후 추정된 잔차 $\{\hat{\epsilon}_t\}$ 를 이용하여 식 (2.5)의 LB 검정통계량 Q_{LB} 를 계산한다.
2. 식 (3.3)의 Rademacher 분포로부터 랜덤포본 $\{w_t\}$ 를 추출하여 와일드 붓스트랩 잔차 $\{\epsilon_t^* = w_t \hat{\epsilon}_t\}$ 를 생성한다.
3. 식 (3.2)의 잔차를 이용한 순환 와일드 붓스트랩 방법을 이용하여 반복적으로 $\{\mathbf{X}_t^*\}$ 를 생성한다.
4. 와일드 붓스트랩 표본 $\{\mathbf{X}_t^*\}$ 를 이용하여 식 (2.5)의 붓스트랩 LB 검정통계량 Q_{LB}^* 를 계산한다.
5. 2-4의 절차를 B 번 반복하여 총 B 개의 와일드 붓스트랩 LB 검정통계량 $\{Q_{LB}^{1*}, \dots, Q_{LB}^{B*}\}$ 를 계산한다.
6. 총 B 개의 와일드 붓스트랩 LB 검정통계량을 이용하여 다음과 같이 유의확률을 계산한다.

$$\hat{p}^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B I \{Q_{LB}^{b*} \geq Q_{LB}\}.$$

알고리즘 1 또는 2에서 계산된 \hat{p}^* 가 유의수준 α 보다 작다면 오차의 자기상관성이 없다는 식 (2.4)의 귀무가설은 기각된다.

4. 모의실험

이 장에서는 몬테카를로 모의실험을 통하여 조건부 이분산성이 존재하는 오차의 자기상관성에 대한 와일드 부스트랩 검정법의 유한표본 성질을 규명하고자 한다. 모의실험을 위해 2장에서 소개한 조건부 평균모형인 벡터자기회귀 모형과 벡터오차수정 모형을 이용하여 자료를 생성한다. 첫 번째 자료생성 과정으로 차수가 1, 차원이 2인 다음의 벡터 자기회귀 모형을 고려한다.

$$\mathbf{X}_t = \mu + \Pi_1 \mathbf{X}_{t-1} + \epsilon_t.$$

벡터 자기회귀 모형의 모수값으로 \mathbf{I}_2 가 2차원 단위행렬을 나타낼 때, $\mu = (0, 0)'$, $\Pi_1 = \phi_1 \mathbf{I}_2$, $\phi_1 = 0.8$ 을 설정하였다. 다음 자료생성 과정으로 차수가 1, 차원이 2인 다음의 벡터 오차수정 모형을 고려한다.

$$\Delta \mathbf{X}_t = \alpha \beta' \mathbf{X}_{t-1} + \Gamma_1 \Delta \mathbf{X}_{t-1} + \epsilon_t.$$

벡터 오차수정 모형의 모수값으로 $\alpha = (-0.2, 0.2)'$, $\beta = (1, -1)$, $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$ 를 설정하였다. 벡터 자기회귀 모형과 벡터오차수정 모형의 오차 ϵ_t 는 자기회귀모형 (2.3)에 차수 1을 가정하였다.

$$\epsilon_t = \Psi_1 \epsilon_{t-1} + \mathbf{e}_t. \quad (4.1)$$

오차 자기회귀모형의 모수값으로 $\Psi_1 = \psi_1 \mathbf{I}_2$ 을 가정하고, 제 1종의 오류를 계산하기 위해 $\psi_1 = 0.0$, 검정력을 계산하기 위해 $\psi_1 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ 를 설정하였다. 다음으로 오차 ϵ_t 의 조건부 이분산성을 위해 위 식 (4.1)의 \mathbf{e}_t 에 CCC-GARCH(1, 1) (Constant Conditional Correlation GARCH) 모형을 고려하였다.

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{z}_t, \quad \mathbf{h}_t = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_{t-1}^{(2)} + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}_{t-1}, \quad (4.2)$$

여기서 $\mathbf{h}_t = (h_{1t}, h_{2t})'$ 라 할 때 $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{1t}, h_{2t})$ 이며, $\mathbf{e}_{t-1}^{(2)} = (e_{1t}^2, e_{2t}^2)$, \mathbf{a}_0 의 모든 원소는 양의 상수, 그리고 \mathbf{A}_1 과 \mathbf{B}_1 은 양의 대각원소를 갖는 2×2 차원의 모수행렬이다. 다음으로 $\{\mathbf{z}_t\}$ 는 서로 독립이며 평균벡터가 $\mathbf{0} = (0, 0)'$ 이고 공분산 행렬 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ 을 갖는 정규분포이다. 본 모의실험에서는 CCC-GARCH모형의 모수값으로 다음의 값들을 고려한다.

$$\mathbf{a}_0 = (0.15, 0.15)', \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = 0.0, 0.3, 0.9. \quad (4.3)$$

$$\mathbf{a}_0 = (0.15, 0.15)', \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0.08 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0.90 & 0 \\ 0 & 0.90 \end{pmatrix}, \quad \rho = 0.0, 0.3, 0.9. \quad (4.4)$$

모수값 (4.3)의 경우 $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 의 값을 가정하여 오차 ϵ_t 가 조건부 이분산성이 존재하지 않는 경우이다. 모수값 (4.4)는 \mathbf{A}_1 과 \mathbf{B}_1 의 대각원소의 합이 0.98의 값으로 조건부 이분산성이 강한 상태를 설정하였다. $T = 100$ 과 $T = 200$ 의 크기로 시계열 자료를 생성하였으며 부스트랩의 크기는 $B = 200$, 각각의 모의실험의 반복수는 $n = 1,000$, 유의수준은 $\alpha = 0.05$ 로 설정하였다. 모든 모의실험은 통계 분석 프로그램인 R에서 ccgarch, MTS, tsDyn, portes 패키지를 사용하여 수행하였다.

우선 제 1종의 오류를 얻기 위해 식 (4.1)에 $\psi_1 = 0$ 의 값을 설정한다. 이 때 ϵ_t 는 \mathbf{e}_t 가 되며 CCC-GARCH 모형에서 조건부 이분산성이 없는 모수값 (4.3)과 조건부 이분산성이 존재하는 모수값 (4.4)에 대한 제 1종의 오류를 살펴보고자 한다. 오차의 자기상관성 검정을 위하여 점근적 카이제곱분포를 이

Table 4.1. Size for VAR models with $\psi_1 = 0$ in (4.1) and the parameter (4.3) of CCC-GARCH(1, 1)

		ρ		
		0.0	0.3	0.9
$T = 100$	Q_{LB}	0.059	0.061	0.068
	Q_{LB}^B	0.052	0.059	0.048
	Q_{LB}^{WB}	0.055	0.063	0.060
$T = 200$	Q_{LB}	0.052	0.051	0.058
	Q_{LB}^B	0.057	0.068	0.057
	Q_{LB}^{WB}	0.039	0.065	0.069

VAR = vector autoregressive model, CCC-GARCH = constant conditional correlation GARCH.

Table 4.2. Size for VAR models with $\psi_1 = 0$ in (4.1) and the parameter (4.4) of CCC-GARCH(1, 1)

		ρ		
		0.0	0.3	0.9
$T = 100$	Q_{LB}	0.110	0.106	0.161
	Q_{LB}^B	0.106	0.109	0.141
	Q_{LB}^{WB}	0.068	0.066	0.069
$T = 200$	Q_{LB}	0.120	0.136	0.175
	Q_{LB}^B	0.144	0.142	0.189
	Q_{LB}^{WB}	0.068	0.050	0.069

VAR = vector autoregressive model, CCC-GARCH = constant conditional correlation GARCH.

Table 4.3. Size for VECM models with $\psi_1 = 0$ in (4.1) and the parameter (4.3) of CCC-GARCH(1, 1)

		ρ		
		0.0	0.3	0.9
$T = 100$	Q_{LB}	0.069	0.072	0.077
	Q_{LB}^B	0.051	0.048	0.055
	Q_{LB}^{WB}	0.037	0.057	0.076
$T = 200$	Q_{LB}	0.060	0.069	0.067
	Q_{LB}^B	0.043	0.043	0.049
	Q_{LB}^{WB}	0.057	0.059	0.080

VECM = vector error correction model, CCC-GARCH = constant conditional correlation GARCH.

용하는 LB 검정통계량 (Q_{LB}), 알고리즘 1의 붓스트랩을 이용한 LB 검정통계량 (Q_{LB}^B), 그리고 알고리즘 2의 와일드 붓스트랩을 이용한 LB 검정통계량 (Q_{LB}^{WB})을 고려하여 비교분석한다. 한편 모든 모의 실험에서 $B = 100$ 과 200 인 경우에 붓스트랩과 와일드 붓스트랩의 제 1종의 오류 값의 차이가 거의 없었기 때문에 반복수가 $B = 200$ 개인 경우만 표에 정리하였음을 밝힌다. 우선 CCC-GARCH(1, 1) 모형의 모수값 (4.3)에 해당하는 경우의 벡터 자기회귀모형에 대한 제 1종의 오류를 계산한 값을 Table 4.1에 정리하였다. T 의 크기와 ρ 의 값에 상관없이 세 가지 검정방법의 모든 결과가 유의수준 0.05 근방인 값을 가지는 것을 알 수 있다. 다음으로 모수값 (4.4)의 경우에서 벡터자기회귀 모형의 제 1종의 오류를 Table 4.2에 정리하였다. Table 4.2의 조건부 이분산성이 존재하는 경우에 Q_{LB} 와 Q_{LB}^B 의 경우는 T 의 값과 ρ 가 커짐에 따라 제1종 오류가 약 0.19까지 커지는 것을 볼 수 있는 반면에 Q_{LB}^{WB} 의 경우 오류가 0.05에 상당히 근접하여 Q_{LB}^{WB} 의 유효성을 잘 입증하고 있음을 확인하였다. 마찬가지로 CCC-GARCH(1, 1) 모형의 모수값 (4.3), (4.4)경우에 대해서 벡터 오차수정 모형에 대한 제 1종의 오류를 Table 4.3-4.4에 각각 나타내었고, 벡터자기회귀모형에서의 제 1종의 오류 결과와 매우 유사함을 확인

Table 4.4. Size for VECM models with $\psi_1 = 0$ in (4.1) and the parameter (4.4) of CCC-GARCH(1, 1)

		ρ		
		0.0	0.3	0.9
$T = 100$	Q_{LB}	0.133	0.126	0.169
	Q_{LB}^B	0.096	0.110	0.120
	Q_{LB}^{WB}	0.076	0.065	0.068
$T = 200$	Q_{LB}	0.131	0.136	0.186
	Q_{LB}^B	0.122	0.111	0.157
	Q_{LB}^{WB}	0.082	0.063	0.077

VECM = vector error correction model, CCC-GARCH = constant conditional correlation GARCH.

Table 4.5. Power for VAR models with the parameter (4.3) of CCC-GARCH(1, 1)

		$T = 100$					$T = 200$				
		ψ_1					ψ_1				
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\rho = 0.0$	Q_{LB}	0.116	0.528	0.983	1.000	1.000	0.113	0.869	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.211	0.767	0.997	1.000	1.000	0.137	0.851	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.216	0.785	0.995	1.000	1.000	0.137	0.852	1.000	1.000	1.000
$\rho = 0.3$	Q_{LB}	0.080	0.528	0.970	1.000	1.000	0.149	0.877	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.092	0.480	0.966	1.000	1.000	0.144	0.853	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.123	0.484	0.958	0.999	1.000	0.141	0.855	1.000	1.000	1.000
$\rho = 0.9$	Q_{LB}	0.104	0.505	0.963	1.000	1.000	0.129	0.880	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.088	0.475	0.960	1.000	1.000	0.139	0.840	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.089	0.513	0.950	1.000	1.000	0.127	0.862	1.000	1.000	1.000

VAR = vector autoregressive model, CCC-GARCH = constant conditional correlation GARCH.

Table 4.6. Power for VAR models with the parameter (4.4) of CCC-GARCH(1, 1)

		$T = 100$					$T = 200$				
		ψ_1					ψ_1				
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\rho = 0.0$	Q_{LB}	0.155	0.563	0.973	0.999	1.000	0.228	0.873	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.151	0.541	0.955	0.998	1.000	0.227	0.857	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.096	0.417	0.928	0.999	1.000	0.129	0.780	1.000	1.000	1.000
$\rho = 0.3$	Q_{LB}	0.170	0.565	0.965	1.000	1.000	0.235	0.884	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.153	0.552	0.943	0.999	1.000	0.212	0.878	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.114	0.469	0.924	1.000	1.000	0.129	0.791	0.998	1.000	1.000
$\rho = 0.9$	Q_{LB}	0.215	0.609	0.968	1.000	1.000	0.276	0.905	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.189	0.543	0.956	1.000	1.000	0.288	0.869	1.000	1.000	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.111	0.439	0.914	0.997	1.000	0.122	0.700	0.994	1.000	1.000

VAR = vector autoregressive model, CCC-GARCH = constant conditional correlation GARCH.

할 수 있다.

다음으로 오차 ϵ_t 의 자기상관성에 대한 검정력을 확인하기 위해 자기회귀모형 (4.1)에 모수값 $\psi_1 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ 을 설정하여 모의실험을 진행하였다. 제 1종의 오류와 마찬가지로 오차 ϵ_t 의 조건부 이분산성을 고려하기 위해 자기회귀모형 (4.1)의 ϵ_t 에 식 (4.3)과 (4.4)의 모수 값을 갖는 CCC-GARCH(1, 1) 모형을 가정하였다. 우선 벡터자기회귀 모형의 모수가 식 (4.3)에 해당하는 경우의 검

Table 4.7. Power for VECM models with the parameter (4.3) of CCC-GARCH(1, 1)

		$T = 100$					$T=200$				
		ψ_1					ψ_1				
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\rho = 0.0$	Q_{LB}	0.079	0.190	0.538	0.908	0.992	0.082	0.394	0.908	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.057	0.149	0.452	0.847	0.991	0.070	0.421	0.880	1.000	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.054	0.178	0.475	0.866	0.994	0.089	0.416	0.906	0.998	1.000
$\rho = 0.3$	Q_{LB}	0.090	0.192	0.576	0.903	0.997	0.086	0.403	0.920	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.054	0.160	0.431	0.873	0.992	0.075	0.410	0.926	0.999	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.060	0.157	0.500	0.891	0.989	0.080	0.422	0.943	1.000	1.000
$\rho = 0.9$	Q_{LB}	0.084	0.205	0.551	0.910	0.997	0.108	0.618	0.993	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.057	0.229	0.790	0.990	0.996	0.091	0.660	0.997	1.000	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.096	0.296	0.822	0.990	0.994	0.133	0.683	0.996	1.000	1.000

VECM = vector error correction model, CCC-GARCH = constant conditional correlation GARCH.

Table 4.8. Power for VECM models with the parameter (4.4) of CCC-GARCH(1, 1)

		$T = 100$					$T = 200$				
		ψ_1					ψ_1				
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\rho = 0.0$	Q_{LB}	0.143	0.313	0.638	0.931	1.000	0.149	0.514	0.934	0.999	1.000
	Q_{LB}^B	0.079	0.216	0.534	0.885	0.994	0.152	0.526	0.923	0.999	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.072	0.179	0.515	0.874	0.991	0.083	0.374	0.877	0.997	1.000
$\rho = 0.3$	Q_{LB}	0.136	0.286	0.628	0.927	0.999	0.167	0.530	0.933	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.097	0.223	0.546	0.890	0.995	0.133	0.508	0.925	1.000	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.073	0.167	0.499	0.866	0.992	0.079	0.373	0.879	0.998	1.000
$\rho = 0.9$	Q_{LB}	0.165	0.399	0.846	0.994	1.000	0.246	0.699	0.993	1.000	1.000
	Q_{LB}^B	0.139	0.359	0.802	0.986	0.994	0.215	0.693	0.991	1.000	1.000
	Q_{LB}^{WB}	0.086	0.273	0.702	0.974	0.991	0.117	0.528	0.971	1.000	1.000

VECM = vector error correction model, CCC-GARCH = constant conditional correlation GARCH.

정력 결과를 Table 4.5에 나타내었다. Table 4.5의 값을 살펴보면 T 의 크기와 ρ 의 값에 상관없이 유사한 검정력을 나타낼 수 있다. 다음 식 (4.3)인 경우인 Table 4.6의 값을 보면 와일드 붓스트랩의 검정력이 다른 두 통계량에 비해 $\psi_1 = 0.1, 0.3$ 에서는 다소 작는데, ψ 가 커짐에 따라 거의 동일한 검정력을 가지게 됨을 알 수 있다. 다음 벡터오차수정 모형에 대한 식 (4.3), (4.4)의 검정력에 대한 모의실험 결과를 각각 Table 4.7, Table 4.8에 나타내었는데, 벡터자기회귀 모형에서의 결과와 매우 유사함을 확인할 수 있다. 요약하자면 식 (4.3)의 조건부 이분산성이 존재하지 않는 경우에는 세 통계량의 검정력이 서로 동일한 결과를 내고 있음을 알 수 있는 반면에, 식 (4.4)의 조건부 이분산성이 강한 경우에는 Q_{LB} 와 Q_{LB}^B 의 제 1종의 오류가 크게 나와 검정력 또한 와일드 붓스트랩보다 큰 현상을 보이고 있지만 ψ 가 커짐에 따라 세 검정력이 동일시되는 모습을 볼 수 있다. 따라서 와일드 붓스트랩 LB 검정통계량 Q_{LB}^{WB} 이 분산에 조건부 이분산성의 존재유무에 상관없이 다른 두 방법에 비해 제 1종의 오류를 잘 만족하고 있을 뿐만 아니라 검정력 또한 매우 바람직한 결과를 보여주고 있음을 확인할 수 있다.

5. KOSPI200 지수와 지수선물을 이용한 실증분석

본 실증분석에서는 한국거래소(www.krx.co.kr)에서 제공하는 코스피200 현물지수(KOSPI200 in-

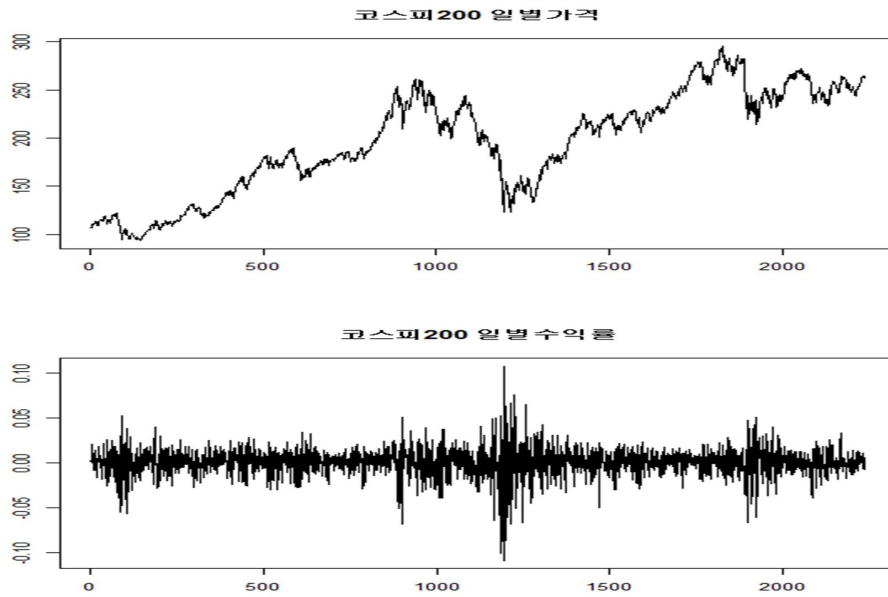


Figure 5.1. Time series plot of KOSPI200 index.

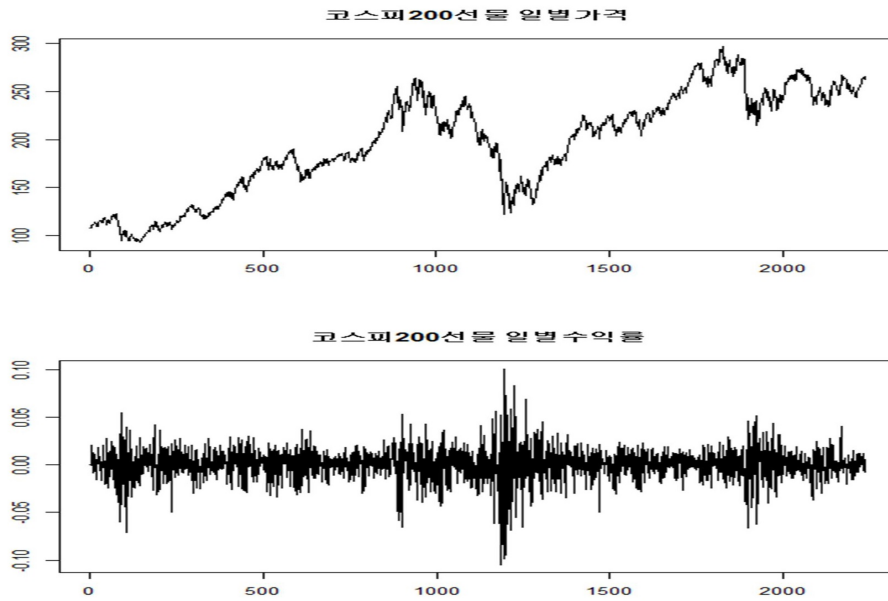


Figure 5.2. Time series plot of KOSPI200 index future.

dex)와 선물(KOSPI200 Future)의 자료 중에서 2004년 01월 02일부터 2011년 12월 29일까지 총 1991개의 시점의 자료를 사용하여 분석하였다. 매 1분 단위로 측정된 자료 중에서 장 마감시점인 15시에 측정된 자료를 이어서 일별단위 자료를 만들어 사용하였다. Kwon과 Lee (2014)는 코스피200 현물지수와 선물지수에 관한 분석을 시도하여 현물과 선물지수의 사이에 존재하는 공적분 관계 및 조건부 이

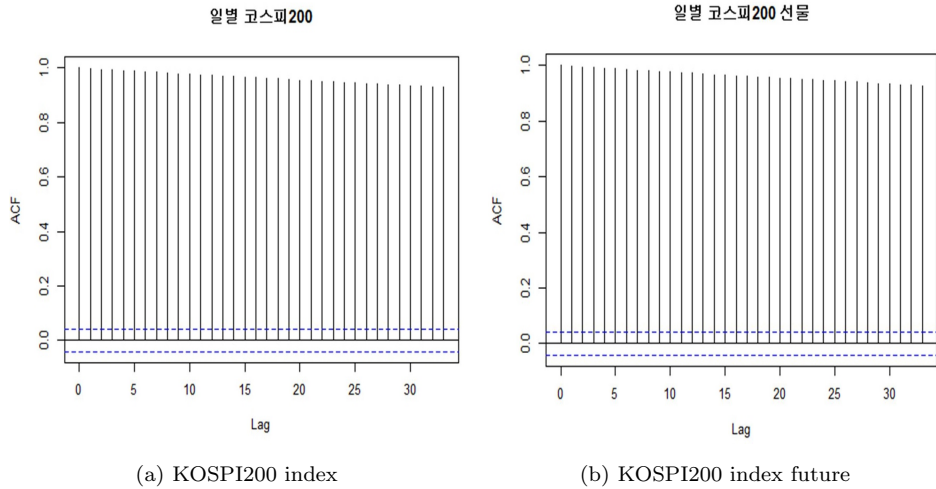


Figure 5.3. Sample ACF of time series of (a) KOSPI200 index and (b) KOSPI200 index future.

분산성 등을 다변량 시계열 모형을 이용하여 분석하였다. 여기에서는 코스피200 현물지수와 선물에 로그를 취한 후 벡터오차수정 모형을 적합한 후 적합된 모형이 적절한 지에 대한 실증분석을 진행하였다.

우선 코스피200 현물지수와 선물의 시계열도를 그려본 결과 Figure 5.1과 5.2와 같이 두 가격이 거의 동일하게 움직이는 것을 쉽게 확인 할 수 있었으며, Figure 5.3에서 자기상관함수가 서서히 감소하는 비정상 시계열의 특징을 나타내고 있음을 확인할 수 있다. 만약 두 시계열이 비정상이고 공적분 벡터가 존재한다면 벡터오차수정모형의 적합이 가능하기 때문에 비정상 시계열임을 확인하는 단위근 검정을 실시하였다. 코스피200 현물과 선물의 단위근 검정의 결과에 의하면 귀무가설 " H_0 : 단위근이 존재한다"에 대한 유의확률이 각각 0.8703, 0.8547로 귀무가설을 기각할 수 없으므로 단위근이 존재하는 비정상 시계열이라는 결론을 내린다. 다음으로 코스피200 현물과 선물 가격 간에 공적분 벡터가 존재한다면 장기균형관계를 설명할 수 있는 벡터오차수정모형의 적합이 가능하므로 공적분 벡터의 유무를 알 수 있는 Johansen이 제시한 트레이스 통계량으로 공적분 검정을 실시하였다. 그 결과 귀무가설 " H_0 : 공적분 갯수가 0개이다."에 대한 통계량이 109.02로서 1% 임계값 23.52보다 큰 값을 가져 대립가설을 채택하게 된다. 따라서 코스피200 현물과 선물가격은 공적분 벡터의 갯수가 한 개인 벡터오차수정 모형 적합이 가능함을 확인하였다. 일별 KOSPI200 로그변환 현물과 선물의 모형 적합을 위해 차수의 선택이 필요한데, 일반적으로 AIC, BIC통계량을 기준으로 가장 작은 값을 가지는 차수가 가장 최적의 모형이 되는데, 차수가 3인 경우에 AIC, BIC 두 값 모두 가장 작은 값을 가져 차수를 3으로 설정하여 벡터오차수정모형 적합을 실시하였다. 다음 절차는 벡터오차수정모형 적합후의 추정된 잔차에 LB 검정을 실시하여 모형의 타당성을 확인하는 것이다. 우선 모의실험에서 자료에 조건부 이분산의 성질이 강하게 존재하는 경우 기존의 LB 검정은 유효하지 않다라는 결과를 확인하였기 때문에 잔차에 조건부 이분산이 존재하는 지를 확인하고자 한다. 조건부 이분산성이 존재하는 지 확인하기 위해 제공한 잔차 $\{\hat{\epsilon}_t^2\}$ 를 이용하여 식 (2.5)의 LB 검정을 실시하였다. 여기서 자료수가 총 1991개이고 $\log(1991) = 7.58$ 이므로 반올림하여 LB 검정의 차수를 8로 선택하였다. 그 결과 유의확률이 0.0000으로 " H_0 : 잔차에는 조건부 이분산성이 없다"라는 귀무가설을 기각하게 되어 강한 조건부 이분산성이 존재함을 확인하였다. 조건부 이분산성에 검정에 대한 자세한 내용은 Tsay (2010, 2014)를 참고하기 바란다.

다음으로 적합된 벡터오차수정모형이 타당한 지 확인하기 위하여 점근적 카이제곱 분포(Q_{LB}), 붓스트

Table 5.1. LB tests for serial correlation in residuals of the fitted VECM models

	Q_{LB}	Q_{LB}^B	Q_{LB}^{WB}
P-value	0.0007	0.0300	0.7700

LB = Ljung-Box, VECM = vector error correction model.

랩(Q_{LB}^B) 및 와일드 붓스트랩 검정통계량(Q_{LB}^{WB})의 결과를 살펴보고자 한다. 우선 LB 검정의 자유도는 모형에서 추정된 모수만큼 줄어들게 되는 것을 2장에서 설명하였고, 이에 따라 벡터 오차수정 모형의 자유도는 $k^2m - (\alpha, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{p-1})$ 의 추정된 모수의 갯수로 설정이 된다. LB 검정의 차수는 $m = 8$, 적합한 벡터오차수정모형의 차원은 $k = 2$, 추정된 모수의 갯수는 모두 10개이므로 점근적 카이제곱분포의 자유도는 22로 정해진다. 잔차의 자기상관성 검정의 결과를 나타낸 Table 5.1의 결과에 의하면 자유도가 22인 점근적 카이제곱분포를 이용한 Q_{LB} 는 유의확률이 0.0007이므로 잔차에 자기상관성이 존재하여 적합한 모형이 자료를 잘 설명하지 못한다는 결론을 내리게 된다. 다음 붓스트랩 LB (Q_{LB}^B) 검정의 결과는 유의수준 5%하에서 유의확률이 0.03으로 대립가설을 채택하여 Q_{LB} 와 같은 결과를 가진다. 반면에 와일드 붓스트랩 LB (Q_{LB}^{WB}) 검정의 유의확률은 0.77의 값을 얻었다. Q_{LB} 와 Q_{LB}^B 와는 달리 와일드 붓스트랩 LB Q_{LB}^{WB} 검정법은 적합한 차수 3의 벡터오차수정모형이 적절한 모형임을 나타내고 있다. 자료에 조건부 이분산성이 강한 경우 와일드 붓스트랩 LB 검정법이 다른 두 검정법에 비해 적절하다는 모의실험 결과에 의하면 벡터오차수정모형 적합이 적절하다는 결론이 타당해 보인다.

6. 결론

본 논문에서는 벡터 자기회귀모형과 벡터 오차수정모형 오차의 자기상관성 검정을 위해 와일드 붓스트랩 LB 검정통계량을 연구하였다. 구체적으로 와일드 붓스트랩 LB 검정통계량을 제안하고 제 1종의 오류와 검정력에 대해 점근적 카이제곱 분포와 붓스트랩 분포를 이용하는 기존의 LB 검정통계량과 비교 분석하였다. 그 결과 오차에 조건부 이분산성이 존재하는 경우에 기존의 LB 검정법에서는 제 1종의 오류가 왜곡되는 현상이 나타나지만, 와일드 붓스트랩은 제 1종의 오류가 적절히 유지되는 것을 확인할 수 있었다. 다음으로 검정력에 관하여 조건부 이분산이 존재하는 경우에 와일드 붓스트랩 LB 검정법이 검정력이 다른 두 검정방법에 비해 낮은 모습을 보이고 있지만 이는 다른 두 검정법의 제 1종의 오류가 왜곡됨에 따른 현상이며, 자료의 자기상관성이 커짐에 따라 그 차이는 거의 없게 되어 와일드 붓스트랩 LB 검정법의 우수함을 보여주고 있다. 끝으로 조건부 이분산성이 강하게 존재하는 코스피200 현물과 선물 자료에 벡터오차수정모형을 적합한 후 오차의 자기상관성을 검정하였는데, 와일드 붓스트랩 LB 검정법에서만 오차에 자기상관성이 없다는 결론이 도출되었다. 기존의 두 검정법이 조건부 이분산성이 있는 경우에 제 1종의 오류가 왜곡된다는 모의실험 결과를 고려해 볼 때, 와일드 붓스트랩 LB 검정법의 결과가 더 타당하다고 볼 수 있다. 이 모든 결과를 미루어 볼 때 본 연구에서 제안하는 와일드 붓스트랩 LB 통계량이 다변량 금융시계열의 자기상관성 검정과 관련된 실증분석에서 매우 효과적이라는 결론을 얻을 수 있다.

References

- Ahlgren, N. and Catani, P. (2012). Wild bootstrap tests for autocorrelation in vector autoregressive models, *Working Papers 562*, Available from: https://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/36634/562_978-952-232-178-7.pdf?sequence=1
- Brüggemann, R., Lütkepohl, H., and Saikkonen, P. (2006). Residual autocorrelation testing for vector error correction models, *Journal of Econometrics*, **134**, 579–604.

- Catani, P., Terasvirta, T., and Yin, M. (2014). A lagrange multiplier test for testing the adequacy of the constant conditional correlation GARCH Model. *CREATES Research Paper 2014-3*, Available from: ftp://ftp.econ.au.dk/creates/rp/14/rp14_03.pdf
- Davidson, R. and Flachaire, E. (2008). The wild bootstrap, *Journal of Econometrics*, **146**, 162–169.
- Gonçalves, S. and Kilian, L. (2004). Bootstrap autoregressions with conditional heteroskedasticity of unknown form, *Journal of Econometrics*, **123**, 89–120.
- Hosking, J. R. M. (1980). The multivariate portmanteau statistic, *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 602–608.
- Kwon, D. and Lee, T. (2014). Hedging effectiveness of KOSPI200 index futures through VECM-CC-GARCH model, *Journal of the Korean Data Information Science Society*, **25**, 1449–1466.
- Li, W. K. and McLeod, A. I. (1981). Distribution of the residual autocorrelation in multivariate ARMA time series models, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **43**, 231–239.
- Liu, R. (1988). Bootstrap procedures under some non-i.i.d. models, *Annals of Statistics*, **16**, 1696–1708.
- Ljung, G. M. and Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models, *Biometrika*, **65**, 297–303.
- Mammen, E. (1993). Bootstrap and wild bootstrap for high dimensional linear models, *Annals of Statistics*, **21**, 255–285.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, 2nd ed, John Wiley & Sons, New Jersey.
- Tsay, R. S. (2014). *Multivariate Time Series with R and Financial Applications*, John Wiley & Sons, New Jersey.

벡터자기회귀모형과 오차수정모형의 자기상관성을 위한 와일드 붓스트랩 Ljung-Box 검정

이명우^a · 이태욱^{a,1}

^a한국외국어대학교 통계학과

(2015년 12월 2일 접수, 2015년 12월 22일 수정, 2015년 12월 23일 채택)

요약

본 논문에서는 다변량 시계열 모형 진단을 위해 잔차의 자기상관성 유무를 확인하기 위한 와일드 붓스트랩(wild bootstrap) Ljung-Box(LB) 검정통계량을 연구하였다. 일반적으로 LB 검정은 오차가 서로 독립이며 동일한 분포를 따른다는 IID 가정 하에 유도되는 점근적 카이제곱 분포를 이용한다. 한편 금융시계열 자료는 분산에 조건부 이분산성이 존재하기 때문에 오차의 IID 가정을 만족시키지 못하며 이에 따라 점근적 분포를 이용한 LB 검정은 제 1종의 오류를 만족시키지 못하게 된다. 이를 극복하기 위해 와일드 붓스트랩을 이용한 LB 검정법을 제안하고 그 성질을 연구하고자 한다. 벡터자기회귀 모형과 벡터오차수정 모형 등의 다양한 다변량 시계열 모형을 이용하여 모의실험을 실시하는 한편, 코스피 200지수와 지수선물 자료를 이용한 실증분석을 통해 와일드 붓스트랩을 이용한 LB 검정법이 조건부 이분산성의 부정적인 영향을 효과적으로 제거할 수 있음을 입증하였다.

주요용어: 벡터오차수정 모형, 벡터자기회귀 모형, 와일드 붓스트랩, Ljung-Box 검정통계량

이 논문은 2015학년도 한국외국어대학교 교내 학술연구비의 지원에 의하여 이루어진 것임.

¹교신저자: (17035) 경기도 용인시 처인구 모현면 외대로 81, 한국외국어대학교 통계학과.

E-mail: twlee@hufs.ac.kr