

상상의 수학, 상상하는 수학의 교육

이 기 돈*

교육과 문화의 여러 방면에서 융합과 통섭이 중시되고 있다. 이러한 흐름에 따라 2015 개정 교육과정은 인문학적 상상력과 과학기술 창조력을 갖춘 창의융합형 인재의 양성을 표방하였다. 그러나 인문학적 상상을 비롯한 ‘상상’에 대한 수학교육적 관점의 연구가 이루어지지 않아 상상을 도입한 창의융합적 수학교육에 대한 구체적인 논의가 어려운 상황이다. 이 논문에서는 고대부터 현대에 이르는 여러 학자들의 견해를 통해 상상의 개념을 구체화하고, 이러한 의미에서의 상상이 수학의 실제에 관여하는 양상을 살펴보았다. 이를 바탕으로 상상을 동원한 수학 교수학습의 모습과 가능성 및 그 인문 사회적 의미 등을 논의하였다.

1. 서론

교육과 문화의 여러 방면에서 융합과 통섭이 중시되고 있다. 과학이나 수학뿐 아니라 예술을 포함한 다양한 영역 간의 융합을 강조하는 융합 인재교육이 부상하였고, 유수의 대학에서는 융합 과학기술대학원, 인문사회융합과학대학과 같이 융합이라는 이름을 붙인 교육연구기관을 앞 다투어 설립하고 있다. 문화에 있어서도 퓨전이라는 이름을 달고 다양한 분야 간의 소통을 통한 새로운 콘텐츠의 생산과 소비가 이루어지고 있다.

이러한 흐름에 따라 얼마 전 고시된 ‘2015 개정 교육과정’은 인문학적 상상력과 과학기술 창조력을 갖춘 창의융합형 인재의 양성을 표방하였다(교육부, 2014). 그러나 인문학적 상상을 비롯한 ‘상상’에 대한 수학교육적 관점의 연구가 이루어지지 않아 상상을 도입한 창의융합적 수학교육에 대한 구체적인 논의가 어려운 상황이다.

‘상상’은 수학이나 과학보다는 문학을 비롯한 인문학과 더 가까운 개념으로 느껴지는 것이 사실이다. 또, 이성적 추론과 상상력은 별개의 것으로 취급되어 ‘철수는 충분히 합리적이지만 상상력이 부족해(Perkins, 1985: 14)’와 같은 표현이 흔히 사용되기도 한다. 수학에 대해서도 그 정확성과 엄밀성은 강조해 왔지만 이미지를 비롯한 상상을 동원해 수학을 특징짓는 것은 터부시 되어왔다(Lakoff & Núñez, 2003). 그럼에도 한편으로는 수학에서 상상의 중요성을 강조하는 저명한 수학자들의 언급을 어렵지 않게 접할 수 있다. 예를 들면, De Morgan은 “수학적 발견의 원동력은 추론이 아닌 상상력(Graves, 1889: 219, Wikiquote에서 재인용)”이라고 하였고, Weierstrass는 “시인 기질을 갖추지 못한 수학자는 결코 완벽한 수학자가 되지 못할 것(1883.8.27.자 편지, Wikiquote에서 재인용)”이라고 하였다.

이러한 상황 속에서 수학과 상상의 관계에 대한 탐구와 수학에서 찾을 수 있는 상상

* 경인고등학교, tracer0@sen.go.kr

교수학습의 모습이나 의미 등에 대한 논의가 필요하다. 본 연구에서는 고대부터 현대에 이르는 여러 학자들의 견해를 통해 상상의 개념을 구체화하고, 그것과 연계하여 수학을 할 때 상상이 동원되는 지점들을 살펴본다. 이를 바탕으로 상상을 동원한 수학 교수학습의 모습과 가능성 및 그 인문사회적 의미 등을 논의한다. 이 연구는 수학교육 분야에서 상상에 대한 논의를 발전시키기 위한 기초연구로서의 의미를 갖는다.

II. ‘상상’에 대한 상상

1. 고대의 상상

상상에 대한 Plato의 견해는 선분의 비유를 통해 살펴볼 수 있다. 그는 사유의 대상을 가시계와 가지계로 나누었다. 또, 가시계는 사물들의 이미지(εἰκόνας)의 영역과 사물들의 영역으로 구분하고, 가지계는 가설로부터 위쪽으로 올라가지 않고 그 반대쪽으로 내려가는 방식으로 탐구하는 영역과 이미지를 사용하지 않고 이데아 자체만을 통하여 가설을 넘어서도록 탐구하는 영역으로 구분하였다. 그리고 이 네 영역에 상응하는 영혼의 능력으로, 가시계의 두 영역에는 오성(διάνοια)과 이성(νόησις)을 각각 대응시켰다(Plato, 2009; Bundy, 1922; 임재훈, 1992; 민정, 2000; 이상봉, 김재철, 2003). 이때, 네 영역과 그에 상응하는 영혼의 능력은 위에서 나열한 순서대로 순차적이어서 이성은 가장 진실된 지식에 도달할 수 있는데 반해, 상상력은 사물들을

모방한 이미지를 탐구하기 때문에 거짓된 억측에 이르기 쉽다(임재훈, 1992; 민정, 2000; 이상봉, 김재철, 2003).

Aristotle는 상상을 보다 긍정적으로 평가한다. Aristotle는 「영혼론(De anima)」에서 상상(φαντασία)을 탐구하였는데, ‘φαντασία’는 여러 문맥에서 일견 모순되는 방식으로 사용되기 때문에 주석가들의 해석이 다양하다. 예를 들면, Schofield는 영혼론의 상상을 ‘비전형적인 감각 경험을 판단하는 영혼의 뚜렷한 능력’으로, Frede는 ‘감각과 지성의 연결을 위해 필요한 것을 제공하는 것’으로 보았다(Turnbull, 1994).

Engmann(1976)에 의하면, Aristotle는 이러한 논의를 통해 다음의 두 가지 대조를 드러내고자 하였다. 즉, ‘(i) 단순 이미지’와 ‘(ii) 단순 이미지들의 조합’의 대조, 그리고 ‘(iii) 사고의 유희’와 ‘(iv) 믿음이나 주장’의 대조. 이때, (i)에 대해서는 진위를 판단할 수 없지만, (ii)는 비로소 진위를 판단할 수 있다는 점에서 대조적이다. 또, (iii)은 (ii)이기 때문에 진위를 판단할 수 있음에도 불구하고 반드시 진위를 따져야 하는 것은 아니지만, (iv)에는 반드시 그 진위의 판단이 따른다. 특히, (iii)과 (iv)의 대조는 상상에 대한 Aristotle의 다음과 같은 견해를 이해하는데 도움이 된다.

왜냐하면 전자[상상]²⁾는, 우리가 원할 때마다 [할 수 있는], 우리에게 있는 영향받음인 반면에 (왜냐하면 기억구조 속에서 형상들을 만들고 배열하듯이, 우리는 우리 눈앞에 {어떤 것을} 만들어낼 수 있기 때문이다), 의견을 형성하는 [힘]은 우리에게 있지 않다. 왜냐하면 {의견이} 거짓되거나 참된 것은 필연적이기 때문이다(영혼론, 427b17-21, 유원기, 2001).

1) εἰκασίαν은 guesswork(짐작 또는 억측)으로 번역되기도 한다. 여기에서는 Bundy(1922)를 따라 imagination(상상력)으로 번역하였다.

2) ‘전자’는 앞 문장(427b16)의 νόησις(사고)를 가리킨다. 그러나 주석가들은 νόησις가 문맥상 φαντασία(상상)을 대신하여 사용된 것으로 본다. 이러한 해석은 427b27-28과 433a9-10을 통해 확인된다(Polansky, 2007: 410-411; 유원기, 2001: 211).

이와 같이 Aristotle는 원하는 대로 이미지들을 조합하는 사고의 유희능력을 상상력의 한 측면으로 파악하였다. 이러한 창조적 상상 과정을 통해 단순 이미지가 그것들의 조합으로 바뀌고 비로소 그 조합에 대한 믿음이나 주장이 발생할 수 있다. 즉, 진위를 판별할 수 있는 믿음이나 주장이 서기 위해서는 상상력이 필수적이다.

2. 근대 인식론의 상상

지식의 획득을 위해 상상력이 필수적이라는 주장은 근대 인식론의 발달을 통해 더욱 깊이 논의되었다. 경험론을 끝까지 밀어붙였던 Hume은 우리의 경험이 감각으로부터 직접 주어졌다고 할 수 없는 것들을 포함한다는 것을 깨닫고, 그러한 믿음의 원천을 상상력에 돌렸다(송명국, 1996; Sutton-Smith, 1988).

우리의 이성만 물체가 우리와는 상관없이 독립하여 지속적으로 존재하고 있다는 확신을 어떠한 가정 아래서도 주지 못하고 또 줄 수도 없다. 그러한 믿음은 전적으로 상상력에 의해 생긴 것임에 틀림없다(Hume, 인성론, 엄정식, 2012에서 재인용).

Hume은 물체의 지속성뿐 아니라 인과 추론의 타당성과 자아동일성도 상상력의 산물로 보았다. 상상력이 없는 지성을 생각할 수 없을 만큼 상상력이 인간의 모든 사고활동의 토대로서 보편적 기능을 수행한다고 보았던 것이다(송명국, 1996; 엄정식, 2012). 그러나 Hume은 상상력의 기능을 신뢰하지 못하였기 때문에 그것을 통해 얻어지는 경험의 타당성에 대해 회의적이었다.

반면, Kant는 건전한 인식 경험이 가능하다는 입장에서 상상력에 인식을 가능하게 하는 필수 조건이라는 지위를 부여하였다. 구체적으로, 상

상력은 감성이 받아들인 직관에 도식을 적용함으로써 직관을 의미 있는 대상으로 종합하고 개념을 형성한다. 상상력은 직관에 초월적 도식을 적용함으로써 범주와 같은 순수지성개념 아래 대상을 포섭할 수도 있다. 이때 개념은 현상이 아니라 지성 자체의 원리에 따른 종합에 의해 얻어진다는 점에서 상상력은 생산적 기능을 수행한다(송명국, 1996).

이러한 인식론적 논의는 직접적으로 주어진 직관으로부터 인식을 가능하도록 하는 조건으로서의 상상력의 측면을 부각시킨다. 그러나 Aristotle의 견해에서 살펴 본 것처럼 상상력은 직접적인 감각인상 없이도 작동할 수 있다. 아래의 Sartre가 제시한 상상 행위의 예는 일반적 인식이 가능하기 위해서는 지금 여기에서 감각인상을 주지 않는 사물에 대해서도 그 이미지를 만들어내는 상상력이 필요함을 시사한다.

어떤 사람이 르네상스 시기의 . . . 박물관의 한 전시실에 . . . 그에게 이 예술적 시대 . . . 특징을 설명하라고 해보자. 틀림없이 그는 대답에 앞서 그곳에 있는 조각품이나 그림 중 하나에 시선을 던질 것이다. . . 이 조각들이 (그 자리에) 없었다면 반응은 동일할 것이다. 즉 다비드의 조각을 현전하게 할 텐데 이것은 사유가 상상적의 형태를 취하는 것이다(Sartre, 2010: 206).

3. Bachelard와 Durand의 상상력 이론

Aristotle 이후의 이러한 논의들에도 불구하고 상상력은 의식을 기만하여 비진리를 생산하고 허구를 통해 정서를 움직임으로써 우리를 예측시킬 수 있다는 점에서, 참된 지식을 추구했던 이성 중심의 서양 사유에서 대체로 기피의 대상이었다(서동욱, 2013). 초기에는 과학철학을 연구 하였던 Bachelard는 이성의 합리적 능력에 대한 추종에서 벗어나 상상력의 원초적이고 창조적인

역동성에 주목하고 본격적으로 상상에 대해 연구하였다(송태현, 2003). Bachelard에 의하면, ‘창조된 이미지’와 ‘지각된 이미지’는 명확히 구분되고, ‘창조적 상상력’은 지각이나 기억에만 관여하는 ‘재생적 상상력’과는 전적으로 다른 것으로서, 사고의 비약을 가능하도록 한다는 점에서 상상의 본질이다(이주하, 2008).

상상력은 . . . 실제의 이미지를 형성하는 능력이 아니다. 그것은 실재를 넘어서 실재를 노래하는 이미지를 형성하는 능력이다(Bachelard, 1979: 23, 이주하, 2008에서 재인용).

상상력은 오히려 . . . 최초의 이미지들로부터 우리를 해방시키고, 이미지들을 변화시키는 능력이다(Bachelard, 1985: 7, 이주하, 2008에서 재인용).

Bachelard는 객관적 진실의 세계인 이성계와 주관적 진실의 세계인 상상계를 도입하였다. 그는 시적 이미지와 같은 인류의 상상적 유산을 분석하여 이성의 법칙에 대응하는 상상력의 법칙을 탐구하고, 그 결과 「불의 정신분석」, 「물과 꿈」 등의 저서를 통해 사원소론을 주장하였다. 이로써 과학적 방법론이 문학적 상상력의 영역에 침투하는 것을 막고 상상력에 독자적인 자율성을 부여함으로써, 두 영역의 상호적 작용을 통해 실제에 대한 온전한 인식에 이를 수 있는 토대를 놓고자 하였다(송태현, 2003; 이주하, 2008).

Durand은 Bachelard의 제자로서 그의 상상력 이론을 비판적으로 발전시켰다. Durand에 따르면, Bachelard의 시대에는 상상계를 보호하기 위해 이원론이 전략적으로 정당화될 수 있었지만, 본래 과학과 상상계는 서로 분리되지 않은 상태로 존재했었다. 서구에서 250년 내지 300년 이전에는 ‘상상의 장’이 ‘보편화된 장’으로서 과학을 하나의 분과로 포함하고 있었다는 것이다. 예를

들어, 고대 그리스의 과학도 그리스 문화의 상상계와 분리하기 힘들고, 중세의 기독교 문명에서는 과학과 종교의 결합이 두드러졌다고 주장한다(이주하, 2008).

Bachelard가 이성계와 구분되는 몽환적인 영역을 상상계로 다루었던 것과는 달리 Durand은 상상계를 ‘정신심리 활동의 총체’와 동일시한다. Durand은 Bachelard가 나누었던 두 세계를 ‘상상계’ 개념에 통합하고, “합리적인 것과 상상적인 것 사이에 단절이 존재하지 않(Durand, 1989: 88, 이주하, 2008에서 재인용)”는다고 하면서, 이성을 상상력을 해석하는 표상의 한 특수한 양식으로 파악한다(이주하, 2008; 김무경, 2007). 이러한 Durand의 상상력 이론은 근래 들어 융합과 통섭을 중시하는 전반적인 사회문화적 현상을 훌륭히 설명한다.

요컨대, 참된 지식을 추구했던 Plato적 전통에서 상상력은 의식을 기만하고 감정을 동요시키는 주범으로서 회피의 대상이었다. 그러나 Aristotle와 근대 인식론의 논의를 통해 상상력은 인식, 신념, 지식 등이 가능하기 위해 우리가 반드시 발휘해야 하는 능력임을 알 수 있었다. 또, 주어진 현상으로부터 벗어나 비약적으로 사고할 수 있다는 점에서 ‘재생적 상상력’보다 ‘창조적 상상력’을 상상의 본질적 힘으로 파악할 수 있었다. 특히, Durand의 논의는 상상 행위의 역동적 능력이 문학적 세계뿐 아니라 이성의 세계에서 발휘될 수 있음을 시사한다.

III. 상상의 수학

1. 일상적이었던 고대 그리스 수학의 상상

Netz(2009)는 고대 그리스 수학 문헌에서 ‘imagine’ 또는 ‘conceive’로 번역되는 단어 ‘noein’

의 용례를 분석하였다.³⁾ ‘noein’은 Euclid를 비롯한 30명의 저술에서 총 304회 등장하는데, 특히 Archimedes를 비롯한 주요 저자들은 매 몇 명제마다 한 번 꼴로 사용하였다. 그 만큼 이 단어가 수학 저술에서 일상적으로 사용되었다고 할 수 있다.

‘noein’의 용례는 3가지로 분류할 수 있다. 첫 번째는 지면(紙面)에 표현할 수 없는 3차원 도형을 상상하는 유형(89회)이고, 두 번째는 너무 복잡하여 그림에 다 표현하지 못한 기하적 대상을 상상하는 유형(55회)이며, 세 번째는 그림에 표현된 것과 다른 물리적 상황을 상상하는 유형(160회)이다. 예를 들어 첫 번째 유형의 사례로, 명제 ‘주어진 평면의 한 점에서 그 평면에 수직인 직선을 작도할 수 있다(Euclid 원론 명제 XI.12)’의 작도 방법을 서술할 때 “[평면보다] 높은 어떤 점 B가 상상되도록 하자”와 같이 사용되었다(Netz, 2009). 세 가지 유형은 모두 그림에 표현된 것 이상의 모습을 상상할 것을 요구한다. 이러한 ‘noein’에 의한 상상은 ‘이미지들의 조합’이나 ‘사고의 유희’보다는 ‘단순 이미지’의 재현에 가깝다.

고대 그리스 수학 문헌에서 상상은 단어 ‘noein’의 사용뿐 아니라 가능성을 나타내는 문장, 조건문 속의 미래시제, 명령법 등에 의해 표현되기도 한다(Netz, 2009).

주어진 원에 대하여 . . . 원주보다 더 긴 직선을 취하는 것이 가능하다(Archimedes의 ‘나선에 대하여’의 첫 번째 문제, Netz, 2009: 34).

만일 두 삼각형의 두 변이 각각 같다면 . . . 그것들은 밑변끼리 서로 같을 것이다(Euclid 원론 명제 I.4, Netz, 2009: 38).

다각형이 . . . 원 주위에 외접되도록 하자(Archimedes의 ‘구와 원기둥’, Netz, 2009: 40).

첫 번째 예는 원이 주어지면 ‘. . . 이 가능하다’는 표현을 통해 모든 원에 대하여 그러한 성질이 성립한다는 것을 상상하도록 하고, 두 번째 예는 일반적인 진리를 나타낼 때 사용하는 현재 시제 대신 미래 시제를 사용함으로써 결론이 가정에 의존한다는 것을 보다 생생하게 상상하도록 하며, 세 번째 예는 외접시키는 행위를 하는 주체를 감추고 명령형으로 표현함으로써 ‘원에 외접하는 다각형’을 상상하는 것이 행위의 주체와 관계없이 보편적으로 가능하다는 것을 받아들이게 한다(Netz, 2009). 첫 번째와 두 번째 예에서 촉발되는 상상은 단순 이미지들(원, 원주보다 더 긴 직선, 두 변이 같음, 밑변끼리 서로 같음 등)을 조합함으로써 ‘모든 원에 대해서 그러한 직선을 취할 수 있음’과 같은 단순 이미지들을 넘어서는 새로운 내용을 포함한다. 세 번째 예에서도 원에 외접한 다각형이라는 단순 이미지의 상상을 넘어 그것의 잠정적 존재가 보편적으로 가능하다는 추가적인 내용을 상상하도록 한다. 이와 같이 고대 그리스 수학에서는 단순 이미지의 재현뿐 아니라 그것들의 조합을 통한 ‘사고의 유희’ 수준의 상상도 어렵지 않게 찾을 수 있다.

2. 상상 속에 존재하는 수학적 대상

고대 그리스 수학에서 상상이 일상적으로 사용된 것은 무엇보다 수학적 대상 자체가 상상에 의한 것이기 때문이다(Netz, 2009). 우리가 살고 있는 공간에 부분을 갖지 않는 것(점)은 존재하지 않고 한 점으로부터 정확히 같은 거리에 있는 점들의 모임(원)은 찾을 수 없다. 그러한 것들은 논리적으로만 가능하고 현상계가 아닌 상상계에서만 존재할 수 있다.

3) noein 은 nenoēsthō, noeisthō 와 같이 시제에 따라 몇 가지 변이를 갖는다. Netz는 그리스 수학 문헌에서 이 변이들의 용례를 연구하였다.

고대 그리스인들은 상상 속 대상의 존재론적 가치를 낮추어 보지 않았다.

. . . 구가 중심을 지나지 않는 평면에 의해 잘려지도록 하자. . . (Archimedes, ‘구와 원기둥’ 명제 36, Netz, 2004: 157)⁴⁾

. . . 그것[구]이 A△에서 [대원에] 수직인 평면에 의해 잘려진다고 상상되도록 하자 (Archimedes, ‘구와 원기둥’ 명제 43, Netz, 2009: 29).

Archimedes는 ‘구와 원기둥’의 36번과 43번 명제에서 구를 평면으로 자르는 동일한 상황을 묘사하고 있다. 그런데 43번 명제는 36번 명제와 달리 구가 평면에 의해 잘리는 것이 ‘상상되도록’ 할 것을 요청하고 있다. Netz는 동일한 상황 중 어떤 경우에만 ‘상상’이라는 표현을 사용하는 것에 대하여 다음과 같이 해석한다.

그리스 수학에서 상상적인 것은 . . . 생생하도록 만들어진 것이다. . . 근본적인 특징은 관심 있는 대상의 존재론적 지위를 임시적으로 더 명시적으로 만든다는 것이다. . . 이 존재론적인 유의점은 그리스 수학 전체를 관통한다. . . 모든 것이 제한적임에도, 실재한다고 느껴진다. 왜냐하면 상상된 것, 가능한 것, 조건적인 것, 당연하게 여겨진 것 등은 즉각적으로 - 한 번 그것들이 수립되면 - 실재와 동등한 것으로 변형되기 때문이다(Netz, 2009: 41-42).

다루는 수학적 대상의 존재론적 지위를 임시적으로 더 명시적으로 만들기 위해서 ‘상상’이라는 표현을 도입하여 서술하지만, 그것이 한 번 수립되면 곧 실재와 동등하게 취급된다는 것이다. 이에 따르면 ‘구와 원기둥’의 43번 명제에서

사용한 ‘상상되도록’이라는 표현은 필수적이라고 보다는 수사적이다. 43번 명제는, 반구면보다 작은 구면의 표면적을 측정하는 42번 명제에 이어지는 명제로서, 반구면보다 큰 구면의 표면적에 대해 42번 명제와 평행한 결과를 수립한다. 43번 명제에서 평면으로 자르는 상상은 42번 명제에서 이미 구성했던 입체적 구조를 번거롭게 다시 구성하지 않고도 그것을 빠르게 소환하는 기능을 발휘한다(Netz, 2009). ‘상상’이라는 표현을 직접 사용하지 않고 ‘이미지들의 조합’으로서의 상상을 유도하는 경우에도 1절에서 논의한 대로 독특한 수사적 효과를 거둘 수 있다.

그러나 상상 가능한 어떤 대상이나 사태를 실재와 동등한 것으로 받아들이는 것에는 의문을 제기할 수 있다. 상상할 수 있다고 해서 그것이 우리 밖의 다른 대상들처럼 존재한다고 말할 수는 없기 때문이다. 유미영, 최영기(2015)는 Euclid 원론에서 수학적 대상의 존재가 실재론이 아닌 개념론의 입장에서 다루어진다고 이해하였다. 원론의 정의는 수학적 대상의 존재에 대해 아무것도 알려주지 않으며 수학적 대상이 공리와 공준을 기반으로 하는 인식의 장으로 들어 왔을 때에야 비로소 그 존재가 보장된다는 것이다. 이를 참고하면, 수학적 대상을 상상할 수 있다고 해서 그것이 인식주체나 현상계 밖에 존재한다고 확인할 수는 없지만, 개념론의 입장에서는 그것이 논리를 갖춘 사유 체계 안에서 이루어지기 때문에 실재한다고 할 수 있다. 요컨대, 그리스 수학에서 수학적 대상과 사태는 논리적으로 상상 가능한 세계 속에서 이루어지며 그 존재성이 개념론의 입장에서 보장된다.

3. 추론의 이해에서 상상

4) Netz는 <Imagination and Layered Ontology in Greek Mathematics>에서 이 명제를 ‘구와 원기둥’의 ‘명제 37’로 소개한다. 그러나 그가 번역하고 주석을 단 <The Works of Archimedes : Translation and Commentary>에서 분명히 이 명제는 37번이 아닌 36번이다.

상상은 그리스 수학뿐 아니라 현대 수학에서도 필수적이다. 우리는 하나의 명제를 이해하고 그 진위를 판단하기 위해 상상력을 발휘한다.

모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{x^2}=|x|$ 이다. - (명제1)
어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 < 0$ 이다. - (명제2)

명제1은 셀 수 없이 많은 x 의 값에 대해서 ‘ $\sqrt{x^2}=|x|$ ’이 성립함을 주장한다. 이 명제의 뜻을 이해하기 위해서는 유한한 인간으로서 결코 다 헤아릴 수 없는 무한개의 x 의 값들을 상상해야 한다. 또, 그 명제의 진위를 판단하기 위해 문자 ‘ x ’를 마치 입의의 한 실수처럼 바라보는 상상력이 필요하다. 이 과정에서 ‘실수의 제공은 음 아닌 실수이고, 음 아닌 실수의 양의 제공근은 원래 실수의 절댓값과 같다’는 실수의 일반적인 성질을 파악하여 명제의 진위를 판단한다. 명제2에 대해서도, 그 이해를 위해서는 미지의 x 의 값에 대하여 그것의 제공이 0보다 작은 상황을 상상해야 한다. 또, 그 진위를 판단하기 위해 그럴 듯한 다양한 실수들을 상상하여 그 제공이 0보다 작은지 확인하는 과정이 필요하다.

하나의 명제뿐 아니라 여러 개의 명제를 연결하여 결론을 이끌어내는 추론을 이해할 때에도 상상이 깊이 관여한다. 다음은 명제 ‘실수 a, b, c 에 대하여 $a > b, b > c$ 이면 $a > c$ 이다’에 대한 한 교과서의 증명이다.

$a > b$ 이면 $a - b > 0$ 이고, $b > c$ 이면 $b - c > 0$ 이므로
 $(a - b) + (b - c) > 0$, 즉 $a - c > 0$
따라서 $a > c$ 이다(우정호 외 24인, 2013).

이 추론의 최종 결론인 ‘ $a > c$ ’는 항상 성립하는 것이 아니라 ‘ $(a - b) + (b - c) > 0$ ’이 가정될 때 비로소 받아들여지는 것이다. 그런데 ‘ $(a - b) + (b - c) > 0$ ’ 또한 ‘ $a - b > 0$ ’과 ‘ $b - c > 0$ ’이 가정될 때 성립한다. 즉, 추론의 각 단계에서

결론은 그 단계의 가정이 참이라는 조건 하에 얻어진다. 그리고 각 단계의 가정 또한 그 이전 단계의 결론으로서 역시 항상 참이라고 할 수 없는 잠정적인 것이다. 따라서 각 단계의 결론을 이해하기 위해서는 임시로 그 단계의 가정이 마치 참인 것처럼 상상하면서 결론의 타당성을 확인하게 된다.

이러한 논의는 수학적 원리 또는 법칙에도 적용될 수 있을 것이다. 수학적 원리 또는 법칙은 공리와 공준이 참이라는 가정을 기반으로 추론된 것으로서 그 이해 또한 상상력이 필요하기 때문이다.

4. 귀류법의 기반으로서 상상

살펴 본 것처럼 증명의 이해를 위해서는 상상해야 한다. 그러나 추론의 이해 과정에서 상상해야 하는 ‘가정’은 한편으로는 그 이전 단계의 결론으로서 선행하는 가정을 인정하면 받아들여지기 때문에 상상하고 있다는 것을 의식하지 못하기 쉽다. 의식한다고 해도 추론의 가정은 그 진위가 결정되지 않은 것으로서 그것이 참이라고 상상하는 것은 참을 거짓이라고 상상하는 것에 비해 용이하다. 반면 자명해 보이는 명제를 귀류법으로 증명할 때에는 보다 의식적이고 적극적인 상상이 필요하다. ‘소수는 무한히 많다’는 명제의 전형적인 증명을 예로 들 수 있다.

소수의 개수가 r 라고 가정하자. (r 은 자연수)
- (*)
 r 개의 소수들을 p_1, p_2, \dots, p_r 라 놓자.
자연수 $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1 (> 1)$ 은 p_i 의 배수가 아니므로 소수이고 $N \neq p_i$ 이다. (단, $1 \leq i \leq r$)
이것은 (*) 에 모순이므로 소수는 무한히 많다.

Eratosthenes의 체를 사용하여 새로운 소수를 계속해서 발견하는 경험을 통해 ‘소수가 무한히

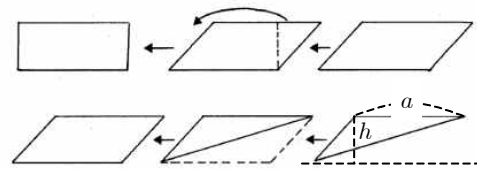
많다'는 믿음을 가질 수 있다. 위 증명은 귀류법 가정 (*)에서 실제로 믿고 있는 사실과 반대되는 사실을 가정하기 때문에 뿔 없는 말을 보며 유니콘을 상상하는 것처럼 의식적인 상상력을 발휘해야 한다. 또, 의견은 그 진위가 필연적이기 때문에 그것을 형성하는 힘이 우리에게 있지 않다는 Aristotle의 언급에 비추어 보면 위 증명의 귀류법 가정에서 드러나는 상상은 자신의 믿음을 부정해야 할 정도로 적극적인 사고의 유희라고 할 수 있다.

그러나 귀류법 증명에서 믿음을 부정하는 정도의 자유로운 상상은 계속되지 않는다. 귀류법 가정은 하나의 가정으로서 논리적인 추론을 통해 연쇄적인 결론들을 만들어 간다. 자유로운 상상이 논리적 추론이라는 틀 안에서 이루어지는 것이다. 추론은 모순에 도달함으로써 멈추는데, 이로써 원래의 믿음에 논리 수학적 확실성이 부여된다. 역설적이게도 극단적인 비합리적 상상이 원래의 믿음에 논리 수학적 확실성을 심어준다.

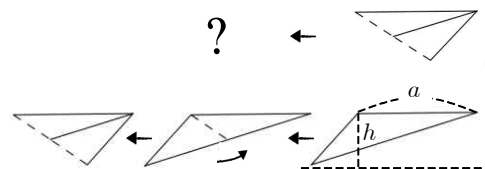
5. 문제해결 과정에서 상상

Perkins(1985)는 이성과 상상이 서로 다른 영역이라는 통념과 달리 적합한 추론(reasoning)을 위해서는 훌륭한 상상력이 필요하다고 주장하였다. 밑변과 높이가 주어진 삼각형의 넓이 공식을 얻는데 있어 합동인 삼각형을 하나 더 붙여서 평행사변형을 만들고 다시 그 평행사변형을 잘라 직사각형을 만드는 전략은 성공적으로 작동한다([그림 III-1]). 만일 합동인 삼각형을 붙이는 대신 주어진 삼각형을 이등분하여 붙이는 전략을 사용한다면 모양에는 변화가 있지만 밑변과 높이가 같은 또 다른 삼각형을 얻는데 그치기 때문에 목표에 다가가고 있다는 전망을 얻기 어렵다([그림 III-2]). 이처럼 주어진 것으로부터 추론들의 고리를 따라 원하는 목표에 이르기 위해서

는 각 추론의 가정이 함의할 수 있는 다양한 결론들 중에 그 다음 추론 고리의 가정으로 적합한 것을 발견 및 선택할 수 있어야 한다. 이때 삼각형을 추가하거나 분해하는 것은 주어진 이미지를 조합하고 변형하여 새로운 이미지를 만들어 내는 '사고의 유희'로서, 지각된 이미지를 넘어 사고의 비약을 가능하게 하는 '창조적 상상'이다. 목표에 다가가기 위해서는 삼각형을 분해하기보다는 합동인 삼각형을 추가하는 능력, 즉 더 적합한 것을 창의적으로 상상하는 능력이 필요하다.



[그림 III-1] 삼각형의 넓이 공식 획득에 성공적인 상상(Perkins, 1985)



[그림 III-2] 삼각형의 넓이 공식 획득의 전망이 없는 상상

삼각형의 넓이 공식을 발견하기 위한 추론에서 사용되는 상상은 '추론의 이해에서 상상'과는 다르다. 후자는 교과서의 예제를 학습할 때와 같이 알려진 풀이를 추론을 통해 이해하는 과정에서 필요한 상상인 반면, 전자는 아직 알려지지 않은 문제해결의 방법 및 과정을 발견하기 위해 필요한 상상이다. 요컨대, 문제해결 방법이 알려져 있지 않은 수학문제의 해결을 위해서는 그

문제가 알고리즘을 단순히 적용하는 문제가 아닌 이상, 주어진 이미지로부터 적합한 방법 및 과정을 창의적으로 상상해내어야 한다.

수학문제해결 과정에서 필요한 상상이 주어진 것들로부터 새롭고도 적합한 것을 상상해내는 다른 분야와 어떻게 다른가라는 질문이 제기될 수 있다. 예를 들어, 과학문제해결 과정에서 필요한 상상과는 어떻게 다른 것인가. 과학의 대상은 현상계에 존재하지만 수학의 대상은 상상계에 존재한다. 과학의 상상이 현상들 사이의 관계에 대한 상상인 반면, 수학의 상상은 상상적인 것들 사이의 관계에 대한 상상이다. 때문에 과학은 문제해결을 위해 세운 가설을 실험을 통해 검증하지만, 수학은 상상해 낸 문제해결방법을 약속된 수학적 논리에 따라 검토한다. 그러나 수학뿐 아니라 소설과 같은 문학작품도 상상계의 대상에 대한 문제를 드러내고 그 속에서 해결방법을 모색한다는 점에서 수학적 상상과의 차별이 다시 요구된다. 이에 대한 한 가지 답은, 수학은 약속된 수학적 논리를 벗어나는 상상을 할 수 없는데 반해 문학은 더 열린 가능성을 통해 문제를 해결한다는 것이다. 요컨대 수학은 상상계의 대상에 대한 문제를 제기하고 수학적 논리에 포섭되는 특정한 방면의 상상력을 통해 그것을 해결한다.

IV. 상상하는 수학의 교육

이상에서 상상의 의미를 여러 학자들의 견해를 통해 알아보고, 이와 관련하여 수학을 할 때 상상을 동원하게 되는 지점들을 살펴보았다. 수학에서 찾을 수 있는 상상에 대한 교육적 관점과 교수학습 방법의 구체화는 여러 연구자들의 협력적인 후속연구를 필요로 한다. 이 연구에서는 문제해결과 개념학습으로 나누어 상상을 동원하는 수학의 교수학습의 모습과 가능성을 살

피고, 상상하는 수학의 교육이 가지는 인문사회적 의미를 간단히 논의한다.

1. 문제해결에서 상상력 함양

문제해결 방법이 알려져 있지 않은 수학문제의 해결을 위해서는 창의적이면서도 적합한 상상이 필요하다는 Perkins의 주장은 학교수학에서 실제로 다루는 문제를 통해서도 확인된다.

(문제1) 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

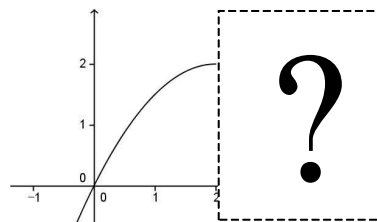
$$(가) \ x \leq 2 \text{ 일 때, } f(x) = -0.5(x-2)^2 + 2$$

(나) 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)} dt$$

$\int_0^6 f(x)dx$ 의 값을 구하시오(2016 대학수학능력시험 B형 30번 변형).

(가) 조건에서 $x \leq 2$ 일 때 함수 $f(x)$ 에 대해서는 알 수 있지만 $x > 2$ 일 때는 알 수 없기 때문에 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 IV-1]과 같이 표현할 수 있다. 그런데 $\int_0^6 f(x)dx$ 의 값을 계산하기 위해서는 $x > 2$ 일 때 함수 $f(x)$ 를 필요로 한다. 이제 $x > 2$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 대한 상상이 (문제1)을 해결하기 위한 관건이다.



[그림 IV-1] 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

새로운 것을 고안해내는 상상은 문제에서 주어진 조건과 학생이 이미 알고 있는 수학적 사실에 기반 할 수밖에 없을 것이다. (문제1)의 경우 (나) 조건에서 $x > 2$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 단조증가함수이므로 $f(x) \geq 2$ (*)이지만 동시에 $4 - 2f(x) \geq 0$ 이므로 $f(x) \leq 2$ (**)임을 발견하고, 이로부터 $x > 2$ 일 때 $f(x) = 2$ 라는 결론에 이르는 상상의 과정이 필요하다. 하지만, (나) 조건에서 함수 $f(x)$ 가 0보다 크거나 같은 피적분 함수를 적분한 함수라는 점, 제곱근 기호 안의 값이 0보다 크거나 같아야 한다는 점 등에 주목하지 못하거나 주목하더라도 (*)이나 (**)와 같은 수학적 사실을 상상하지 못하면 (문제1)의 해결에 이를 수 없다. 예를 들어, 학생들은 그 동안의 미적분 문제풀이 경험을 통해 (나) 조건으로부터 양변을 미분하는 조작($f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$)을 상상할 수 있지만, 이것은 항등식 $(x-2)^2 = (4-2\{-0.5(x-2)^2+2\})$ 로 귀결됨으로써 문제 해결에 도움이 되지 않는다. 그러므로 학교 수학 교육에서 문제의 해결을 목표로 할 때에는 창의적이면서도 문제해결에 도움이 되는 적합한 상상력 함양을 위해 노력해야 할 것이다. Polya의 수학문제해결 교육론은 그러한 가능성을 높이기 위한 방법론이라고 생각된다.

창의적 상상이 갖추어야 하는 적합성은 Vygotsky에 의해 강조된 바 이다. Vygotsky는 Freud를 따라 어린 시절의 공상을 중시하고 놀이에서 창의성의 기원을 찾았지만, Freud가 시인이거나 예술가와 아동의 창의성을 구별하지 않았던 반면, Vygotsky는 아동, 청소년, 어른의 창의성을 구분하고 발달의 과정 속에서 바라보았다. 그에 따르면 창의성은 상상력과 이성의 상호 작용에 의해 발달하는데, 특히 청소년기는 아동기의 놀이에서 시작된 상상에 이성적, 추상적, 개념적 사고가 보충되는 시기로서, 이러한 과정을 거침으로써 현실에 부합되는 어른의 성숙한 상상으

로 발전할 수 있다(Saba Ayman Nolley, 1992). Vygotsky(1932)는 “현실에 대한 진정한 이해는 상상의 어떤 요소 없이는, . . . 이 현실이 우리 의식의 활동의 요소에 주는 즉각적 . . . 인상들로부터 떠나지 않고서는 불가능하다(p.45, Saba Ayman Nolley, 1992: 78에서 재인용)”면서 현실 이해에서 상상의 역할을 강조했지만, 이때의 상상은 아동기의 부질없는 공상이 아니라 이성과의 상호작용에 의해 현실에 적합하도록 성숙된 상상이라고 할 수 있다.

창의적이면서도 문제해결에 적합한 상상을 지향하는 수학문제해결 교육은 상상의 발달 과정에 있는 청소년에게 Vygotsky가 주목한 ‘성숙한 창조적 상상력(mature creative imagination)’을 함양시키기 위한 바람직한 교육 수단이라고 할 수 있을 것이다. 그러나 학생이 수학문제해결에서 창의적이고 적합하게 상상하도록 하는 구체적인 교수학습 방안은 단순하지 않다. 다음은 2015년 8월 7일 서울의 한 고등학교 방과후학교 수업에서 다룬 정적분 계산 문제에 대한 한 학생의 반응이다.

(문제2) $\int_0^3 |x-1|dx$ 의 값을 계산하시오.

학생: $\int_0^3 |x-1|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$ 으로 계산한 결과가 정답지와 다르네요. 그러면 $\int_0^1 (1-x)dx + \int_2^3 (x-1)dx$ 으로 계산해 볼게요.

교사: 왜?

학생: 앞쪽 적분구간의 길이가 1이므로 뒤쪽 적분구간의 길이도 1이 되도록 하고 싶어서요.

(문제2)처럼 비교적 간단한 계산문제도 학생의 수준에 따라서는 창의적이고 적합한 상상이 필요하다. 위 학생은 첫 시도에서 적분구간을 적합

하게 나누는 상상을 발휘하였으나 그 계산 과정에서 실수가 있었다. 계산실수를 알아차리지 못한 학생은 적합한 상상을 버리고 앞쪽 적분구간의 길이가 1이라는 것에 근거하여 뒤쪽 적분구간의 길이도 1이 되어야 한다고 상상하였다. 이와 같이 교사가 문제해결 방안을 구체적으로 지시하지 않고 학생의 창의적 상상에 맡겼을 때 학생은 엉뚱한 이미지에 주목하여 문제해결에 적합하지 않은 이미지를 상상할 수 있다. 언젠고 두 번째 상상을 할 수 있는 위 학생에게 단순히 첫 번째 시도가 옳지만 계산실수가 있었다고 말해주는 것만으로는 유사한 문제를 만났을 때 창의적이고 적합하게 그 해결방법을 상상하도록 하는 데 있어 충분하지 않을 것이다. 수학기초교육에서 창의성과 적합성의 조화를 위한 방안은 지속적인 후속논의를 필요로 한다.

2. 개념 중심의 교수학습에서 상상하기

Plotnitsky(2009)는 다양체(manifold) 개념을 중심으로 Riemann의 수학적 사고 및 상상의 풍요로움과 그 사고의 개념적(conceptual)인 특징에 대해 논의하였다. Riemann의 수학 작업은 수학의 주요 영역에 영향을 미쳤고 공간성에 대한 수학적, 물리학적, 철학적 이해를 변화시켰는데, 그 밑바탕에는 그의 수학이 개념적이라는 특징이 있었다는 것이다. 이때 ‘개념적’인 수학이란 개념과 그 성질, 그리고 구조에 주목하는 수학이다. Plotnitsky에 따르면 Riemann은 그 이전에 유행한 공식이나 계산 중심의 사고와는 다른, 또 그 이후에 등장한 집합론에 기반한 수학과는 다른 수학을 전개하였다. 예를 들어, 반지름이 r 인 구 S 를 공식과 집합을 사용하여 $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ 과 같이 정의할

수 있지만, 그보다는 다양체라는 개념으로 바라보는 것이 Riemann의 방식이다. 즉, 구의 각 점들은 R^2 과 위상동형인(homeomorphic) 근방(neighborhood)을 갖는다는 사실에 주목한다. 이것은 구를 이루는 낱알의 점들이 아니라 구를 이루는 국소적(local) 공간과 그들 사이의 관계에 관심을 갖는다는 것을 의미한다.

Riemann의 다양체 개념은 수학적, 철학적, 신학적 사고가 융합되어 형성된 것으로서⁵⁾, 공간에 대한 Bergson의 생각 및 Einstein의 상대성 이론 등 철학과 물리학에 중대한 영향을 미쳤다. 이것은 Riemann의 개념적 사고가 그의 훌륭한 수학 및 철학적 상상력과 조화되었기 때문에 가능한 일이었다(Plotnitsky, 2009). 요컨대, Riemann은 수학적 대상의 단순 이미지를 공식과 집합에 의해 형식적으로 정의하는데 그치지 않고 다양체와 같은 대상의 보다 본질적인 성질을 사고의 유희 수준의 상상을 통해 찾았으며, 이것이 철학과 물리학에 영감을 주었다.

학교수학에서도 이러한 관점을 반영한 개념 중심의 교수학습이 가능하다고 생각된다. 예를 들어, 교과서에서 두 사건 A 와 B 는 ‘ $P(B|A) = P(B)$ 또는 $P(A|B) = P(A)$ ’를 만족할 때 서로 독립이라고 정의하고, 그 필요충분조건으로 ‘ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ($P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$)’을 제시한다. 이 부분에서 주로 다루는 문제는 집합으로 표현되는 두 사건의 독립성 여부를 필요충분조건을 활용하여 판단하는 것이다. 한 교과서의 예제에서는 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 하나를 뽑을 때, 그 수가 홀수인 사건과 5의 배수인 사건이 서로 독립임을 계산에 의해 필요충분조건을 확인함으로써 판단한다(이강섭 외 14인, 2013). 이 예제는 홀수인 사건과 5의 배수인 사건이 서로 독립이라는 의

5) Kant가 이미 ‘Mannigfaltig(manifold)’라는 용어를 사용했고, 신학에서 ‘삼위일체(Dreifaltigkeit)’는 세 가지가 하나로 falt(fold) 된다는 의미이다.

미를 ‘계산의 확인’ 이상으로 확장하지 못한다.

(문제3) 어느 남녀공학 고등학교의 학생 중 여학생의 $\frac{p}{100}$ 와 남학생의 $\frac{q}{100}$ 가 안경을 쓴 학생이라고 한다. 전체 학생 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 뽑힌 학생이 여학생일 사건을 A , 안경을 쓴 학생일 사건을 B 라 하자. 사건 A 와 B 가 서로 독립일 때, $p=kq$ 이다. 상수 k 의 값을 구하시오.

(문제3)도 전체 학생 중 여학생의 비율을 임의로 설정한 후에는 위 예제와 마찬가지로 독립에 대한 정의나 필요충분조건의 식을 이용하여 해결할 수 있다. 그 결과 ‘ $p=q$ ’를 얻는다. 즉, 전체 학생 중 여학생의 비율에 관계없이, 여학생일 사건과 안경을 쓴 학생일 사건이 서로 독립이라는 것은 여학생 중에 안경을 쓴 학생의 비율과 남학생(여학생이 아닌 학생) 중에 안경을 쓴 학생의 비율이 서로 같다는 것을 의미한다. 이러한 의미는 독립의 정의나 필요충분조건의 수식 자체를 적용하는 것을 목표로 하는 문제를 통해서 획득되기 어렵다.

이와 같이 수식으로 규정된 정의 자체를 학습하고 그것을 단순히 적용하는 것을 넘어, 그 개념의 보다 풍부한 의미를 교수학습 할 수 있을 것으로 생각된다. 이때, 교과서에 제시된 정의나 필요충분조건을 두 사건이 독립이라는 개념의 단순 이미지라고 하면, (문제3)은 ‘여학생 수의 임의성’, ‘여학생과 남학생 중 안경 쓴 학생의 두 가지 비율’, ‘두 비율의 결과적 동일성’ 등 여러 가지 이미지들이 조합되어 수식적 정의가 보여주지 못했던 새로운 의미를 상상하게 한다.

(문제3)과 같은 문제를 활용하여 개념 중심의 교수학습을 할 때에는 그 방법에 신중을 기할 필요가 있다. (문제3)의 출제의도는 k 의 값이 1이라는 것을 발견하는 데 있지 않고 그것을 통해 두 사건의 독립이라는 정의가 갖는 또 다른

의미를 상상하도록 하는 데 있다. 그러므로 학생들이 독립의 수식적 정의라는 단순 이미지에서 벗어나 여러 가지 이미지들을 조합하는 사고의 유희를 통해 새로운 의미를 상상할 수 있는 기회가 동반되어야 한다. 이를 위해서는 사고의 유희를 통해 얻어져야 할 이미지를 교사 자신이 학생들에게 직접적으로 전달함으로써 자칫 단순 이미지로 비치게 되는 교수학습 방법은 지양되어야 할 것이다.

3. 상상하는 수학 교수학습의 인문사회적 의미

III장에서 살펴 본 수학에서의 상상은 실제로 그렇다기보다는 그렇다고 가정할 수 있다는 의미에서 가설적인(hypothetical) 것이었다. Sextus Empiricus의 언급처럼 가설적인 것은 수학자들의 피난처가 될 수 있다. 예를 들어, 원에 접하는 직선을 작도할 수 있다는 명제에 대해 누군가 실제로 그렇게 그리는 것이 가능한지 묻는다면, 수학자는 실제로 그렇다는 것이 아니라 적절한 가정 하에 그런 직선을 상상할 수 있다고 대응하면서 비판을 피할 수 있다(Netz, 2009). 그러나 Netz는 수학의 가설적인 상상이 고대 그리스의 사회 분위기와 관련되어 있음을 더 강조한다.

... 그리스인이라면 ... 철저한 사고실험에 참여하는 것에 [익숙했다]. ... 모두를 위한 자유를 가진 곳으로의 재구성은 철저한 토론의 문명에서 발생했다. ... 그런 이유에서, ... 보기에 불가능한 것이 회피되지 않았다. ... 구가 평면에 의해 잘리는 것을 기꺼이 고려했었고 ... 그러한 상상력의 비행 속에서 수학의 기원이 발견될 수 있다고 나는 주장한다(Netz, 2009: 49-50).

고대 그리스 수학의 가설적인 성질은 그리스인들이 철저한 사고실험에 익숙했기 때문에 가

능했던 것인데, 이런 분위기 속에서 모두의 자유가 보장되는 민주주의 사회도 형성될 수 있었다. 즉, 고대 그리스 수학이 극단적인 사고까지를 관용하는 민주주의 문화에서 발생한 것으로 해석했다. 이러한 Netz의 해석은 수학교육적으로 생각해 볼 만 한 시사점을 제공한다고 생각된다. 수학적 상상이 극단적인 사고를 관용하는 민주주의 문화에서 가능하다면, 역으로 자유로운 수학적 사고의 유희가 민주주의 문화의 형성에 일조할 가능성이 있기 때문이다. 이런 경우 수학교수학습은 창의적이고 성숙한 사고의 유희를 통해 관용적으로 소통하고 합리적으로 판단하는 사회 형성에 이바지할 수 있다고 생각된다.

Popper도 「열린사회와 그 적들」에서 이와 유사한 관점으로 상상력의 중요성을 강조했다.

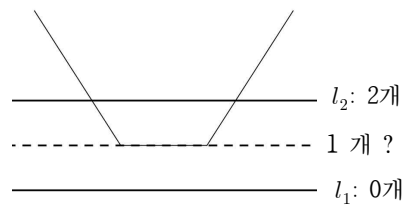
합리주의는 비판적이며 비합리주의는 독단주의로 흐르지 않을 수 없다. . . 비판은 항상 어느 정도의 상상력을 요구하며 독단주의는 그것을 억압한다. . . 적어도 상상력은 . . . 아주 중요한 역할을 맡고 있다. ‘내가 틀리고 당신이 옳을지 모른다’는 합리주의자의 기본태도는 . . . 상상력의 가동이 무엇보다도 절실히 요청된다 (Popper, 1997: 330-331, 임광국, 2011에서 재인용).

독단주의를 배격하고 비판적 합리주의를 구현하기 위해서는 상상력의 동원이 절실히 필요하다는 것이다. 비판적 합리주의를 근간으로 하는 Popper의 열린사회는 Netz가 주목한 고대 그리스의 민주주의 사회와 다르지 않은 것으로 보인다. Popper의 논의는 다양한 사고를 관용하는 합리적인 민주주의 사회의 구현을 위해 상상력의 적극적인 동원이 필요함을 시사한다. 특히, 이때의 상상력은 단순히 적극적이고 창의적일 뿐만 아니라 비판적 합리를 갖추어야 한다는 점에서, 상상하는 수학의 교수학습을 통한 ‘성숙한 창조적 상상’의 함양이 민주주의 사회 구현을 위해 고려할 수 있는 한 가지 교육적 방안이라고 생각

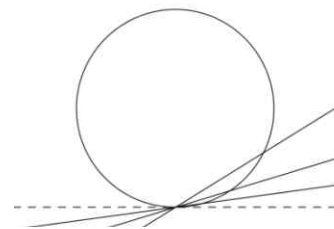
된다.

한편, 상상하는 수학의 교수학습은 단순 이미지의 차원을 넘어 세계에 대한 이해를 추구한다는 의미에서 인문학적 성격을 가진다. 예를 들어, 원에 접하는 직선에 대해 개념적으로 접근하면 한 점에서 만난다는 단순 이미지 이상의 의미를 상상할 수 있다. 접선의 존재에 대해 다음과 같은 질문들을 제기할 수 있다.

직선을 원 밖으로부터 원에 접근시키면 정말로 정확히 한 점에서 만나는 순간이 존재할까? 원과 두 점에서 만나는 직선(할선)은 작도할 수 있으니 접선을 할선의 극한으로 정의하면 좋지 않을까?



[그림 IV-2] 교점의 개수가 1 개 ?



[그림 IV-3] 접선: 할선의 극한

원과 만나지 않는 직선 l_1 을 원과 두 점에서 만나는 직선 l_2 의 위치까지 연속적으로 이동시킨다고 상상하자. [그림 IV-2]를 참고하면 원과의 교점의 개수가 l_1 일 때 0 개에서 l_2 일 때 2 개가 되었다는 것만으로는 그 사이에 원과의 교점의 개수가 1개가 되는 순간이 존재한다고 주장할

수 없다. 접선의 존재를 보장할 수 있는 다른 방법은 [그림 IV-3]과 같이 접선을 할선의 극한으로 정의하는 것이다. 이때에도 계속해서 다음과 같은 질문들을 제기할 수 있다.

할선의 극한은 가정적인 직선인데 그렇다면 접선은 실제로 존재한다기보다는 상상적인 것이 아닌가?

상상적인 직선인 접선을 존재한다고 간주하는 이유는 무엇인가?

개념론의 입장에서 존재한다고 하더라도, 왜 논리적으로 상상가능하다는 것에 ‘존재한다’는 개념을 부여했을까?

할선의 극한이라는 정의는 접선의 존재를 보장하지만 극한의 진행 과정에서 실제로 그릴 수 있는 것은 극한 직선에 이르기 전 단계의 할선들이므로 이 정의가 접선의 작도 방법을 직접 지시하지는 못한다. 하지만 그런 정의에 따라 접선의 존재를 가정할 수는 있다. 그렇다면 상상적인 직선인 접선에 ‘존재한다’는 속성을 부여할 수 있는지에 대한 추가적인 질문이 제기될 수 있다.⁶⁾ 이어서 개념론의 타당성에 대한 철학적인 질문에까지 이른다.

이와 같이 사고의 유희를 통해 이미지들을 조합시켜 나가면 한 점에서 만난다는 단순 이미지를 넘어서는 새로운 의미들을 찾을 수 있다. 이때 수학 내적인 의미는 물론 존재에 대한 철학적 질문과 같이 수학 외적인 의미에까지 이를 수 있다. 즉, 개념 중심으로 상상하는 수학 교수학습은 단순 이미지를 넘어 세계에 대한 보다 풍요로운 이해의 기회를 제공할 수 있다. 다만, 이 경우에도 사고의 유희에 의해 생산한 이미지들의 조합이 창조적 상상이 갖추어야 하는 적합성을 벗어나지는 않아야 할 것이다.

V. 결론

상상은 단순 이미지를 구성하는 것에서부터 사고의 유희를 통해 이미지들을 조합하는 것까지, 그리고 감각이나 기억의 재생에서부터 대상을 새롭게 창조하거나 바라보는 것까지, 문학적이고 몽환적인 통찰로부터 이성적인 세계의 창조력까지를 포괄하는 능력이다. 특히, “현실에 대한 진정한 이해는 . . . 현실이 . . . 주는 즉각적 . . . 인상들로부터 떠나지 않고서는 불가능하다”는 Vygotsky의 언급이나 “상상력은 . . . 실재를 넘어서 실재를 노래하는 이미지를 형성하는 능력”이라는 Bachelard의 언급은 창조적 상상력의 본질을 잘 드러낸다. 인식, 신념, 지식의 형성을 목표로 하는 모든 교육에서 상상력은 필수적인 요소라고 할 수 있다.

수학의 대상이 상상계에 존재하기 때문에 고대 그리스 수학에서 상상은 일상적으로 사용되었다. 또, 수학적 추론의 이해, 귀류법의 사용, 문제해결 과정 등에서도 상상은 반드시 필요한 요소이다. 그러므로 수학과는 다른 어느 교과보다도 더 근본적으로 상상의 동원이 필요하다. 이 연구에서는 문제해결과 개념학습으로 나누어 상상을 동원하는 수학의 교수학습의 모습과 가능성을 살펴보았다.

귀류법이나 문제해결 과정에서 동원되는 창의적 상상은 역설적이게도 수학적 논리라는 적합성에 포섭되어야 한다는 제한점이 있었다. 창의적인 자유로운 상상과 엄격한 수학적 논리의 적합성의 조화는 특히 문제해결교육을 통한 상상력 함양에 있어 난점으로 지적되었다. 이러한 난점은 2015 개정 교육과정이 표방하고 있는 인문학적 상상력과 과학기술 창조력을 갖춘 창의융

6) 사실 접선의 존재는 원 위의 한 점에서 반지름에 수직인 직선을 작도함으로써 보장된다(Euclid 원론 명제 III.16). 여기에서는 한 점에서 만난다는 단순 이미지로부터 출발하여 사고의 유희를 통해 얻어질 수 있는 이미지들의 조합들을 추적한 것이다.

합형 인재의 양성에도 적용된다고 생각된다. 2015 개정 교육과정의 취지에 맞추어 상상을 동원하는 창의융합적 수학교육을 도입할 때에는 이러한 문제의 해결에 주목해야 할 것이다.

상상하는 수학의 교육이 ‘성숙한 창조적 상상’의 함양을 통해 다양한 사고를 관용하는 합리적인 민주주의 사회의 구현을 지원할 수 있다는 점에 대하여 논의하였다. 이때 ‘합리’는 수학적 적합성을 전제로 하는 ‘성숙함’을 통해, 다양한 사고의 ‘관용’은 새로운 것을 생산하는 ‘창조적 상상’의 교류를 통해 준비될 수 있다. 그리고 ‘창조적 상상’은 알려지지 않은 문제해결의 방법 및 과정을 발견하는 학습과, 사고의 유희를 통해 단순 이미지를 넘어서서 새로운 의미들을 발견하는 개념 중심의 학습 등에 의해 함양될 수 있다. 특히 상상을 동원한 개념 중심의 교수학습은 세계에 대한 보다 풍요로운 이해를 통해 인문교육적인 성격을 가질 수 있는데, 극단적인 사고를 허용함으로써 ‘관용’을 지향한다는 측면에서는 이러한 개념 중심의 교수학습을 보다 활성화시킬 필요가 있다고 생각한다. 즉, 인문교육의 입장에서 상상하는 개념 중심의 수학 교수학습의 활성화가 고려될 수 있다.

이 연구는 수학교육 분야에서 상상에 대한 논의를 발전시키기 위한 기초연구로서 수행되었다. 그러나 수학 및 수학교육에서의 상상이 포괄적으로 다루어졌기 때문에 상상의 개념을 개별화하여 더 정교하게 논의하는 것도 필요하다고 생각된다. 또, 상상력 함양을 위한 문제해결교육에서 창의성과 적합성의 조화 방법, 상상을 동원하는 개념 중심 교수학습의 콘텐츠 개발, 상상하는 수학의 교육에 대한 사례연구 등의 후속연구도 이어지기를 기대한다.

참고문헌

- 교육부(2014). **2015 문이과 통합형 교육과정의 총론 주요사항 발표**. 2014.9.24.자 보도자료.
- 김무경(2007). 상상력과 사회, 질베르 뒤랑의 ‘심층사회학’을 중심으로. **한국사회학**, 41(2), 304-338
- 민정(2000). **국면보기를 통한 상상력 조명**. 이화여자대학교 석사학위 논문.
- 서동욱(2013). 인식의 획득에서 상상력의 역할: 사르트르와 들뢰즈의 경우. **철학연구**, 100, 219-239.
- 송명국(1996). 지각과 상상력-휴과 칸트를 중심으로. **철학연구**, 24, 67-93.
- 송태현(2003). 가스통 바슐라르: 과학철학에서 상상력철학으로. **한국프랑스학논집**, 42, 183-202.
- 엄정식(2012). 상상에 관하여. **철학과 현실**, 215-233.
- 우정호 외 24인(2013). **수학Ⅱ**. 서울: 두산동아.
- 유미영, 최영기(2015). 「유클리드 원론」 I 권 정리 22의 Diorism 을 통해서 본 존재성. **수학교육학연구**, 25(3), 367-379.
- 유원기(2001). **아리스토텔레스 영혼에 관하여**. 서울: 궁리출판.
- 이강섭 외 14인(2013). **확률과 통계**. 서울: 미래엔교과서.
- 이상봉, 김재철(2003). 서양 고대 철학에서의 판타시아 개념. **철학논총**, 33, 265-293.
- 이주하(2008). 바슐라르와 뒤랑의 상상력 재발견과 그 교육적 함의. **교육철학**, 34, 351-390.
- 임광국(2011). **‘과학적 상상력’에 관한 교육철학적 고찰 - 칼 포퍼의 비판적 합리주의를 중심으로 -**. 동국대학교 석사학위 논문.
- 임재훈(1992). 플라톤 철학의 수학교육학적 연구. **수학교육학연구**, 2(1), 93-118.
- 홍성욱(2009). 특별기고: 상상력의 과학, 과학의 상상력. **독일어문화권연구**, 18(단일호), 249-288.
- Bachelard, G.(1979). *L'Eau et les rêves, Essai sur*

- l'imagination de la matière*. Paris : José Corti.
- Bachelard, G.(1985). *L'Air et les songes, Essai sur l'imagination du mouvement*. Paris : José Corti.
- Bundy, M. W.(1922). Plato's View of the Imagination. *Studies in Philology*, 19(4), 362-403.
- Durand, G.(1989). *Imagination symbolique*. Paris : Quadrige/PUF.
- Engmann, J.(1976). Imagination and truth in Aristotle. *Journal of the History of Philosophy*, 14(3), 259-265.
- Graves, R. P.(1889). *The Life of Sir William Rowan Hamilton* (Vol. 3).
- Lakoff, G., & Núñez, R.(2003). *Where mathematics comes from*. Santa Fe Institute.
- Netz, R.(2004). *The Works of Archimedes: Translation and Commentary*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Netz, R.(2009). Imagination and Layered Ontology in Greek Mathematics. *Configurations*, 17, 19-50.
- Perkins, D. N.(1985). Reasoning as imagination. *Interchange*, 16(1), 14-26.
- Plato(2009). *국가론(후)*. (이병길 역), 서울: 박영사.
- Plotnitsky, A.(2009). Bernhard Riemann's Conceptual Mathematics and the Idea of Space. *Configurations*, 17, 105-130.
- Polansky, R.(2007). *Aristotle's De anima*. Cambridge University Press.
- Popper, K.(1997). *열린사회와 그 적들 2*. (이명현 역), 서울: 민음사.
- Saba Ayman Nolley(1992). Vygotsky's perspective on the development of imagination and creativity. *Creativity Research Journal*, 5(1), 77-85.
- Sartre, J. P.(2010). *사르트르의 상상계*. (윤정임 역), 서울: 기파랑. (불어 원작은 1940년 출판하고 1986년 개정됨).
- Sutton-Smith, B.(1988). In search of the imagination. In Kieran Egan & Dan Nadaner (Eds.), *Imagination and education*, (pp. 3-29). New York: Teachers College Press.
- Turnbull, K.(1994). Aristotle on Imagination. *Ancient Philosophy*, 14(2), 319-334.
- Vygotsky, L. S.(1987). The development of imagination in childhood. In R. W. Rieber & A. S. Carton (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky* (Vol. 2). (N. Minick, Trans.). New York: Plenum. (Original work published 1932)
- Weierstrass, K.(1883). Letter to Sofia Kovalevskaya, August 27, 1883, as shared by Gösta Mittag-Leffler at the 2nd International Congress for Mathematicians in Paris. *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Gauthier-Villars (Paris), 1902, (p.149).

Mathematics of Imagination, and Education of Imagining Mathematics

Lee, Gi Don (Kyeongin High School)

Fusion and consilience have been important in many aspects of our education and culture. In this flow 2015 revised National Curriculum aimed to cultivate students of abilities of imagining liberally and inventing scientifically and technically. However imagination including imagination in humanities has not been researched in mathematics education part until nowadays, so mathematics education using imagination of raising students with ingenious and harmonizing abilities is hard to discuss concretely. In this paper I studied the opinions of various scholars from ancient times to today, and discussed where imagination reveals itself in mathematics practices. With above results I discussed some possible shape of teaching and learning of mathematics using imagination. And finally we discussed that meanings in the humanities and social aspects.

* Key Words : imagination(상상), creativity(창의성), problem solving(문제해결), conceptual mathematics(개념적 수학), liberal education(인문교육)

논문접수 : 2016. 1. 10

논문수정 : 2016. 2. 9

심사완료 : 2016. 2. 9