대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 26 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 26, No. 1, 47 ~ 62. Feb 2016

현실적 수학교육 이론의 재음미 : 수학적 창의성 교육의 관점에서

이 경 화*

수학적 창의성을 함양하는 것은 최근 개정된 수학과 교육과정들에서 계속 강조해온 목표 중의 하나이다. 그러나 일반 학생들을 대상으로 수학적 창의성을 함양하는 것에 관련된 연구는 아직 충분하지 않은 실정이다. 창의적인 인간의 육성을 표방하는 현실적 수학교육 이론은 일반 학생들을 대상으로 하는 수학적 창의성 교육에 시사점을 제공할 수 있음에도, 이에 대한 구체적인 논의가 이루어지지 않았다. 이 글에서는 수학적 창의성 교육의 관점에서 현실적 수학교육 이론을 재음미하여 공교육을 통한 수학적 창의성 교육의 방안을 모색하는 것에 목표를 둔다. 연구 결과는 다음과 같다. 첫째, 수학화를 통해 수학적 창조를 경험하도록 할 수 있으며, 이 때 확실성을 추구하고 확실성을 창조하도록 기회를 제공할 필요가 있다. 둘째, 학생들이 상상에 의하여 현실이라고 느끼는 맥락에서 출발해야 수학적 창조의 기회를 제공할 수 있다. 셋째, 학생들이 모델링에 의하여 현실 맥락과 결합된 수학을 창조하도록 할 수 있다. 넷째, 모델링은 주어진 모델이 왜 모델인가를 이해하는 것, 곧 주어진 모델의 의미를 창조하는 것에서 출발한다. 다섯째, 사고실험에 의하여 국소적인 교수이론을 개발하고, 이를 적용한 후 개선하는 것이 수학적 창의성 교육의 연구방법으로 적합하다. 결론적으로, 수학적 창의성의 함양을 보통의 수학수업에서 일반 학생들을 대상으로 구현하는 데에 현실적 수학교육 이론에서 제안하는 모델은 적절하고 유용한 방안이 될 수 있다.

Ⅰ. 서 론

최근의 수학과 교육과정 개정들에서는 계속하여 수학적 창의성의 함양을 중요한 목표로 제시해왔다. 예를 들어, 《2015 개정 수학과 교육과정》에서는 창의적 역량을 갖춘 융합 인재의 교육을 표방하였다. 이를 위하여 “수학의 지식과 기능을 토대로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하게 산출해내고 여러 관점에서 문제를 바라보고 해석하는 능력(교육부, 2015: 1-2)”을 기른다는 목표도 설정하였다. 이와 같이 수학과 교육과정에서 창의성에 주목하고, 이를 수학교육의 구체적인 목표로 서술하고 있다는 것은, 주로 영재 또는 우수아를 대상으로 하던 수학적 창의성 관련 논의를 일반 학생들을 위한 것으로 확장하는 연구의 필요성을 제기한다.

그 동안 학교수학에서 일반 학생들을 대상으로 하는 수학적 창의성 교육에 대한 논의가 부족하다는 지적이 이루어져 왔고(황우형ㆍ최계현ㆍ김경미ㆍ이명희, 2006; 김진호, 2003, 2004), 최근에는 이러한 지적을 고려하여 일반 학생들을 대상으로 수학적 창의성을 교육하는 방안에 대한 연구가 시도되고 있다. 예를 들어, 수학적 추론과 지식을 고려하여 과제를 개발하는 것이 수학적 창의성 교육에서 중요하다는 것을 지적하

* 서울대학교, khmath@snu.ac.kr

거나(성창근・박성선, 2012), 교사가 다양한 생각을 끌어내는 발문을 해야 수학적 창의성 교육이 가능하다는 제안을 하는 연구가 이루어졌다(한정민・박만구, 2010). 수학적 창의성의 교육을 추구하는 교사를 발굴하여 수업을 관찰하고 그 특징을 분석한 연구도 이루어졌다(김도한 외, 2010). 그러나 일반 학생들을 대상으로 하는 수학적 창의성 교육에 대한 포괄적이고 이론적인 관점에 대해서는 연구가 매우 부족한 실정이다.

1980년대부터 우리나라의 수학교육 이론과 실제에 큰 영향을 미쳐온 현실적 수학교육 이론은 '창조적인 인간의 교육'을 주요한 수학교육 목표로 제시하였다(김연식・정영옥, 1997; 우정호, 2000; 정영옥, 1997, 1999). 이 목표와 더불어 현실적 수학교육 이론에서는 '창조' 또는 '재창조'를 수학 학습의 과정과 결과의 핵심적인 요소로 택하고 있다는 점에서 수학적 창의성 교육과 밀접하게 관련되는 것으로 볼 수 있다. 그러므로 현실적 수학교육 이론을 재음미하여 일반 학생들을 대상으로 하는 수학적 창의성 교육의 원리를 도출할 가능성이 열려 있는 것으로 볼 수 있다. 그러나 그 동안 현실적 수학교육 이론에 대한 논의에서는 학생들의 구성과 산물에 기초하는 것이 수업의 원리 중 하나라는 것을 지적하고 있으면서도(김연식・정영옥, 1997; 우정호, 2000; 정영옥, 1997, 1999), 구체적으로 수학적 창의성 교육의 담론과 관련지은 사례를 찾아보기 어렵다.

일반 학생들을 대상으로 하는 수학적 창의성 교육의 문제를 다각도로 조명하고 해결하려는 시도가 이루어지고 있으나(황우형 외, 2006; 성창근・박성선, 2012; 한정민・박만구, 2010), 이러한 시도를 아우를 수 있는 이론적인 관점은 아직 정립되지 않았다. 이에 수학적 창의성 교육의 여러 시도를 포괄할 수 있는 한 가지 이론적 관점으로 현실적 수학교육 이론을 재음미하는 것은 합리적이고 유용할 수 있다. 이 논문에서는 현실적 수학교육 이론의 여러 논의 중 수학적 창의성 교육에 관련된 것을 도출하여 살펴보고, 이로부터 일반 학생들을 대상으로 하는 수학적 창의성 교육에 대한 체계적인 관점을 제시하는 데에 목표를 둔다.

Ⅱ. 본 론

현실적 수학교육 이론은 발원지인 네덜란드뿐만 아니라 미국, 중국, 우리나라 등 많은 국가에서 재해석되어 왔다. 그만큼 다양한 의미들이 추가되면서 초기의 아이디어에도 적지 않은 변화가 일어났다. 이 논문에서는 많은 연구자들에 의하여 재개념화 된 모든 측면을 살펴보기보다는 수학적 창의성 교육의 담론에 관련된 것으로 보이는 측면을 논의의 초점으로 한다. 달리 말하여, 수학적 창조의 과정, 수학적 창조의 원천, 수학적 창조의 의미, 수학적 창조의 역할, 수학적 창조의 촉진, 수학적 창의성 교육 모델, 수학적 창의성 교육을 위한 연구방법 등 수학적 창의성 교육의 담론에 관련되는 내용들을 도출하여 논의한다.[1)]

1. 수학화와 수학적 창의성 교육

수학화는 결과로서의 수학이 아니라 과정으로서의 수학을 수학 학습의 중심에 두기 위한 개념으로, 현실적 수학교육 이론의 핵심적인 정신이자 방법이다(Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers,

1) 이 논문은 수학적 창의성의 의미를 분석하는 데에 초점을 두지 않으며, 현실적 수학교육 이론에서 수학적 창의성을 명확히 정의하여 논의한 것도 아니다. 그러므로 수학적 창의성의 의미를 단일하게 정의하여 논의하기보다는 현실적 수학교육 이론에서 제시하는 논의를 수학적 창의성 교육의 담론에 관련지어 새롭게 이해하는 데에 주력하였다.

2014; 우정호, 2000; Freudenthal, 1991; 정영옥, 1997). 기본 아이디어는, 수학자들이 수학화에 의하여 수학을 창조하듯이 학습자들도 수학화에 의하여 수학을 재창조하도록 지도해야 한다는 것이다. 앞서 과정이라고 표현한 것을 더 명확하게 서술하면, '창조 과정'이고, 수학화는 수학의 창조 과정을 뜻한다. 이 생각은 다음 글에서 알 수 있는 바와 같이 전통적인 수학교육 또는 이른바 새수학 운동으로 불렸던 수학교육 개혁안에 대한 대안적 접근의 하나로 대두되었다.

> 형식적인 수학의 이면에는 수학의 인간적인 측면 다시 말하면, 인간의 활동으로서의 수학 그리고 과정으로서의 수학이 존재한다는 점이 강조되었고, 이에 부응해서 지식을 전달하는 교육에서 과정을 중시하는 교육으로의 전이가 이루어졌고, '새수학' 운동과 더불어 강화된 수학의 연역적인 제시 방법에 대한 하나의 대안으로서 인간의 본성에 합치되는 자유로운 창조 활동을 추구하는 수학화의 중요성이 강조되었다. (중략) 수학화 활동을 통해서 의미 있는 수학을 재창조함으로써 학생들은 수학에 대한 이해를 높이며, 수학은 학생 자신이 참여할 수 있는 활동이며 학생 스스로가 수학을 창조 또는 재창조할 수 있는 가능성이 있다는 것을 인식하고, 수학자가 하는 일을 스스로 자기 수준에 맞게 해봄으로써 수학의 본질을 체득하고 수학적 안목을 높이고 자신의 삶의 질을 높일 수 있을 것이다(정영옥, 1997: 44-45).

위에서 수학화가 인간의 본성에 합치된다는 말은 현실적 수학교육 이론의 중요한 전제 중 하나이다. 이는 칸트가 설명한 수학적 능력의 생득성, 곧 인간은 수학을 하는 데에 필요한 순수 직관 능력, 시공간에 대한 순수 표현 능력을 가지고 태어나기 때문에 본래 수학을 할 수 있는 존재라고 가정했던 것과 일맥상통하는 것이다(Hanna, 2002: 328). 프로이덴탈은 이와 같이 타고난 직관과 시공간에 관련된 지각에 의존하여 수학을 하는 것이 인간이면 누구나 할 수 있는 정신 활동이라는 것을 다양한 수학적 개념과 절차를 예로 들어 체계적으로 설명하였다. 가령, 두 수의 합, 예를 들어, 5와 3의 합을 구한다는 것은, 다섯 걸음 걸은 다음 이어서 마음속으로 세 걸음을 더 걸으면서, 결과적으로는 5부터 이어세기를 세 번 하는 것이며, 이 과정에는 다른 어떤 논리가 아니라 타고난 시공간적인 직관과 표현이 관여한다고 보았다(Freudenthal, 1983: 58).

무엇보다 중요한 것은, 모든 학생이 자유롭게 창조할 수 있다는 전제이다. 수학이 오직 엄밀하고 형식적인 연역이나 계산에 의해서 창조되는 것이 아니며, 인간이면 누구나 매우 이른 시기부터 자유로운 사고와 상상, 직관을 활용할 수 있기 때문에(Otte, Campos, & Abido, 2013: 413; Bert Van Oers, 2002), 수학화도 가능하고 수학화에 의한 자유로운 창조도 가능하다고 보고 있다. 이를테면, Bert Van Oers(2002)는 6세의 아동들이 양(quantity)을 고려할 수 있으며, 이를 그림에 표현할 때 자유로운 사고와 상상, 직관에 의존한다는 것을 관찰하였다. 아동들이 특정한 양과 그것을 나타내는 수의 존재성을 인식하고 활용하며, 다시 상상과 직관에 따른 인식의 확장을 시도하면서 새로운 대상과 기호를 만든다는 놀라운 증거를 이 연구에서 확인할 수 있다(pp. 39-41).

요컨대, 현실적 수학교육 이론에서는, 인간이라는 존재가 본래 타고난 능력에 기초하여 자유롭게 수학화를 실행할 수 있으며, 그 결과로 수학을 창조할 수 있고, 그렇게 하도록 수학교육이 이루어져야 한다고 보고 있다. 이는 현실적 수학교육 이론에서 궁극적으로 추구하는 목표 중 하나가 수학적 창의성 함양임을 시사한다. 여기서 수학화는 수학적 창의성의 필연적인 원천이며, 그렇기 때문에 수학화를 거치지 않고 수학을 창조하는 것은, 수학자와 학습자 모두 불가능한 일이다. 한 가지 주목할 만한 것은, 인간이 생득적

으로 그리고 자유롭게 수학화를 할 수 있다는 전제가 어떻게 전통적인 수학교육 그리고 새수학 운동의 대안적인 관점이 되는가 하는 것이다. 생득적이면서 본래 자유로운 것이 수학화라면, 별다른 노력을 기울이지 않아도 누구나 수학화를 추구할 수 있고 다양한 수학을 창조할 수 있는 것 아닌가라는 의문을 제기할 수 있기 때문이다. 현실적 수학교육 이론에서는 이와 같은 것이 인간의 본성이지만, 전통적인 수학교육 그리고 새수학 운동에 따른 수학교육에서처럼 인간의 본성을 고려하지 못하거나 간과하는 일이 언제든지 가능하고 그 때에는 수학적 창의성 함양이 불가능하다는 입장을 취하고 있는 것으로 볼 수 있다. 우리나라에서도 수학적 창의성 함양을 수학교육의 목표로 설정하였지만, 마찬가지 사태에 머무를 수 있음을 시사한다.

여전히 인간의 생득적인 수학적 능력과 그 능력의 자유로운 활용에 대한 의심을 떨치지 못한다면, 다음 글에서 말하는, 옳은 근거를 찾음으로써 확실성을 추구하는 인간의 본능과 수학화의 관계를 고려할 수 있다.

> 다른 학문과 마찬가지로 수학에서도 옳다고 생각되는 논리적인 근거를 찾으려 한다. 아니 수학은, 우리가 학문이라고 일컫는 그 어떤 것보다도 근거를 중시하는 학문이다. 학문을 하면서 어떤 것이 당연하다고 말하는 것만으로는 확실성을 충족시킬 수 없다. 확실성을 추구해야만 그것을 충족시킬 수 있다. 수학에서는 수학고유의 사고활동에 의해 확실성을 추구한다. 수학 자체가 아니라 수학고유의 사고활동으로 인하여 수학자들은 수학을, 가장 적절하고 가장 효율적으로 확실성을 추구하는 학문이 되게 한다. 다시 말하여, 수학자들은 수학적 사고활동에 의하여 모종의 신비스런 근거를 찾고, 그것에 기초하여 확실성을 창조한다. 그렇게 창조한 확실성은, 그 어떤 학문에서 창조한 확실성과도 비교할 수 없을 정도로 확실하다. 앞으로 수학적 사고활동에 대해 구체적으로 다룰 때 이 점을 분명히 염두에 두어야 한다(Freudenthal, 1991: 1-2).

위에서 현실적 수학교육 이론의 수학적 창의성 개념에 '확실성'이 매우 중요한 요소로 포함되어 있음을 알 수 있다. 확실성을 추구하는 태도가 수학화를 자극하고, 그 결과로 수학을 창조할 수 있게 된다고 보고 있다. 이 측면은 일반 창의성 담론에서는 그리 주목하지 않았으며, 일반 창의성 담론을 수정하여 수학에 적용함으로써 얻어낸 수학적 창의성 담론에도 역시 거의 반영되지 않은 것으로 보인다. 여기서 제기할 수 있는 의문은 어떻게 하면 일반 학생들이 확실성을 추구하는 태도를 가지도록 할 것인가, 그리하여 수학화를 추구하고, 결국 수학을 창조하게 할 것인가 하는 것이다. 현실적 수학교육 이론에서는 '풍부한 현실 맥락'을 그 도구로 제시하고 있으며, 이에 대하여 다음 절에서 살펴본다.

2. 현실 맥락과 수학적 창의성 교육

현실 맥락과 수학적 창의성 교육 사이의 관계를 알아보기 전에 먼저, 현실적 수학교육 이론이라는 명칭에서 '현실적'이라는 것이 무슨 뜻인지를 알아볼 필요가 있다. 1968년, *Educational Studies in Mathematics* 창간호의 첫 번째 논문, "모든 학생들에게[2] 유용하도록 수학을 지도해야 하는 이유가 무엇인가?(Why to teach mathematics so as to be useful?)"에서 프로이덴탈이 제시한 현실은 대체로 수학을 '적용하는 맥락'을 가리키는 개념이었다. 그는 모든 학생이 수학을 적용할 수 있어야 한다고 생각했고, 적용할 때에만 수학을 자신의 현실로 인식한다고 보았다. 여기서 사

2) 원제목에는 '모든 학생들에게'라는 표현이 없으나 본문에는 이러한 의미가 명확하게 들어 있고, 이렇게 표현해야만 원제목의 의미를 드러낼 수 있어서 포함시켰음

고의 반전이 일어난다. 기존에는 수학을 배운 후에 적용하는 것이 당연한 방향이었는데, 프로이덴탈은 이를 뒤집어서 수학을 적용하는 현실 맥락을 이용하여 수학을 배우도록 하자고 주장하였다.

현실 맥락을 이용하여 수학을 지도하자는 주장은 매우 창의적이지만 그래서 매우 난해하고 실행하기 어려운 면을 내포하고 있다. 또 오해의 여지도 있다. 대표적인 오해 중 하나는 교과서에 실생활 적용 맥락을 많이 포함시켜서 적용사례에 익숙해지도록 하면 된다고 생각하는 것이다. 프로이덴탈은 이렇게 하는 것을 '맥락이 풍부한(context-rich)' 접근이라고 명명하고, 이와 다르게 '풍부한 맥락(rich context)'을 개발하여 활용하는 것이 중요하다고 주장하였다(Freudenthal, 1991: 74). 이를 수학적 창의성 교육과 관련지어 다음과 같이 이해할 수 있다. 단지 흥미로운 맥락들을 많이 접하도록 하는 것이 수학적 창의성 교육의 방법이 될 수 없으며, 수학적 창의성 함양에 적합한, 풍부한 맥락을 개발하여 활용하는 것이 필요하다.

프로이덴탈이 말한 현실 맥락을 실세계 현상을 가리키는 것으로 오해하는 경향은 전 세계적이었던 것으로 보인다. 국제 수학교육 연구공동체에게 네덜란드의 수학교육에 대해 소개하는 글에서 Van den Heuvel-Panhuizen은 이러한 오해에 대하여 다음과 같이 해명하였다.

> '현실적 수학교육'이라는 명칭이 다소간 혼동을 준다는 것을 우리도 알고 있다. 네덜란드에서 시도한 수학교육 개혁 운동을 '현실적'이라고 불렀던 것은, 실세계와 반드시 연결해야 한다는 것보다는 학생들이 상상할 수 있는 문제상황에서 출발해야 한다는 것을 강조하기 위한 것이었다. 네덜란드어로 '상상하다'라는 동사는 'zich REALISEren'이고, 이것은 마음속에서 어떤 것을 현실적이라고 생각하는 것을 뜻하며, 이로부터 RME라는 명칭을 붙이게 되었다. 그러므로 수학을 실세계 맥락에서 출발하여 지도할 수 있으나 반드시 그렇게 하라는 뜻은 아니다. 만약 학생들에게 현실적이기만 하다면, 동화 속 환상의 세계와 수학 내의 형식적인 세계도 적절한 맥락이 될 수 있는 것이다(Van den Heuvel-Panhuizen, 2000: 4).

위의 해명에서 수학적 창의성 교육의 담론 중 핵심적이라고 할 수 있는 것을 찾을 수 있는데, 그것은 학생들의 상상력을 자극하거나 활용한다는 것이다. 학생들은 체계화된 지식을 갖추고 있지도 않거니와 연역적 사고에도 능하지 않다. 그렇기 때문에 수학적 창의성은 학생들의 상상력에 기인하고 다시 그 상상력에 영향을 미치는 것으로 해석되어 왔다(이경화, 2015). 수학적 창의성 교육과 관련지을 때 또 중요한 것은, 현실 맥락이 고정된 지식이나 사고전략이 아니라 상상력을 고려하면서 학생들의 다양한 성향이나 수준을 필수적으로 반영한다는 점이다. 이 때문에 어떤 맥락이 그 자체로 '현실 맥락'인가 아닌가를 판단하는 것이 아니라, 어떤 학생 또는 학생들에게 '현실적인가 그렇지 않은가'를 판단하게 된다. 이는 현실 맥락을 존재론적으로 논의하지 않는다는 뜻이다. 동일한 맥락이라도 어떤 학생에게는 현실이 될 수 있고 다른 학생에게는 현실이 될 수 없기 때문이다. 이와 관련하여 프로이덴탈은 다음과 같이 언급하였다.

> 실세계의 뜻은 무엇일까? 고백하건대, 여기서는 이 용어를 다소간 부주의하게 사용하려고 한다. 수학화를 말하면서 '실세계'라고 할 때는 수학 문제가 포함되어 있는 의미 있는 맥락을 뜻하는 것으로 보아야 한다. 그리고 여기서 맥락은, 당연히 다른 누구보다 학생들에게 의미가 있는 것이어야 한다. 수학은 바로 그렇게 의미 있는 맥락에서 가르쳐야 한다. 가장 추상적인 수학을 가장 구체적인 맥락에서 가르쳐야 한다(Freudenthal, 1981: 144).

어떤 맥락이 어떤 학생에게 현실적이려면, 그

학생에게 ‘의미 있고, 구체적이어야’ 한다는 것이다. 이로부터 다음과 같이 현실 맥락을 활용한 수학적 창의성 교육의 의미를 도출할 수 있다. 현실 맥락은 학생의 상상에 의하여 수학적인 의미를 인식하거나 창조하도록 충분히 구체적으로 설계해야 한다. 프로이덴탈은 이와 같은 기준을 만족시키려면 많은 변수들을 고려해야 한다고 하였다.

> 수학화 한다고 할 때, 우리는 현실 또는 현실의 부분들을 수학화 하게 된다. 그런데 여기서 수학화 하게 되는 현실은 오직 하나 존재하는 것이 아니다. 사람들 수만큼이나 많은 현실이 존재하며, 한 개인이 어떤 것을 내적으로 어떻게 이해하는가에 따라 그리고 외적으로 어떤 환경에 놓이는가에 따라 다른 현실이 존재하기도 한다. (중략) 누군가에게 어떤 것이 수학적인가, 어떤 것은 수학적이지 않은가, 어떤 것은 수학적이라고 보기에 충분한가, 어떤 것은 수학적이라고 보기에 불충분한가를 결정하려면 많은 변수를 고려해야 한다. 마찬가지로 누군가에게 어떤 것이 현실인가를 결정하려고 해도 많은 변수들을 고려해야 한다(Freudenthal, 1991: 67).

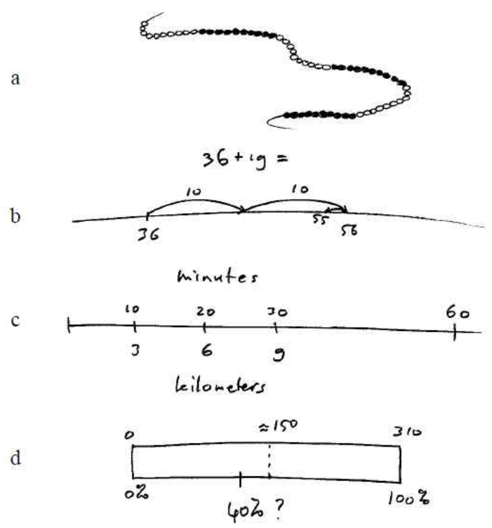
결국 수학적 창조의 원동력인 수학화를 촉진하려면 학습자에게 현실적인 맥락을 제공할 수 있어야 하는데 많은 변수를 고려해야만 이것이 가능하다는 것을 알 수 있다. 만약 많은 변수를 고려하여 학생들로 하여금 상상하게 하고 수학적인 의미를 인식하거나 창조하도록 하는 맥락을 제공할 수 있다면, 학생들은 자신에게 현실적인 맥락 또는 그 일부를 수학화 함으로써 수학을 창조할 수 있다. 여기서 주목해야 할 점이 있는데, 그것은 학습자의 현실에 ‘결합’되어 있는 수학적인 개념, 원리, 법칙, 그리고 사고방법으로서의 수학을 창조한다는 것이다. 단적으로 말하면, 학생들은 수학을 창조하는데, 현실에 결합되어 있는 형태로 창조한다. 이러한 결합이 제거된 상태에서는 수학을 창조할 수 없고, 수학적인 개념, 원리, 법칙, 그리고 사고방법을 학습하는 것은 불가능하다. 이렇게 적절한 결합이 제거된 현실 맥락은 교사나 연구자의 의도와 달리 학생에게 수학적 창조의 기회를 제공하지 않으며, 결국 수학을 학습할 기회도 제공하지 않는다. 이것이 현실적 수학교육 이론에서 수학적 창의성 교육과 관련하여 택하고 있는 매우 중요한 입장이며, 수학적 재능이 없는 일반 학생들이 수학을 학습하면서 창조적인 인간으로 성장할 수 있도록 지도하는 방법이다.

3. 모델링과 수학적 창의성

앞 절에서 일반 학생에게 현실 맥락과 결합되어 있는 형태로 수학적 개념, 원리, 법칙, 그리고 사고방법을 창조하도록 기회를 제공하는 가운데 수학을 지도하고 그러면 결국 모든 학생들이 수학적인 의미에서 창조적인 인간으로 성장한다는 입장을 확인하였다. 여기서 다시 생각해볼 문제는 학생이 현실과 결합되어 있는 수학을 어떻게 창조할 수 있는가 하는 것이다. 결론부터 말하면, 현실적 수학교육 이론에서는 모델링에 의하여 현실과 결합되어 있는 수학을 감지하고 창조한다. 프로이덴탈은 자연과학에서 사고실험에 의하여 모델을 만들고 그 모델을 매개로 하여 현상을 설명하고 연구하듯이, 수학에서도 매개가 되는 모델을 창조하여 적절한 설명과 근거를 만드는데 이 과정이 곧 수학화라고 설명하였다(Freudenthal, 1991: 32-35). 수학을 배우는 학생도 같은 방식으로 모델을 매개로 하여 현실과 수학 사이의 결합을 감지하게 되며, 이를 표현하면서 수학화를 진전시키게 된다. 결국 학생이 하는 일은 현실과 결합된 수학을, 적절한 모델을 창조하여 이해하고 표현하게 된다.

현실적 수학교육 이론에서 모델은 일상 언어, 표와 그래프, 다이어그램, 용어와 기호 등 여러

형태가 가능하다. 학생의 학습수준과 성향에 따라 그리고 어떤 의도로 모델을 사용하는가에 따라 다른 형태의 모델을 사용할 수 있다. 예를 들어, [그림 II-1]과 같이 학생들이 수직선을 형식화된 지식으로 학습하기 전에, 다양한 형태의 모델로 주어진 현실 맥락 또는 그 일부를 표현하면서 수학화를 진행할 수 있다. 현실 맥락 자체를 단순화하여 표현하는 모델도 있고, 현실 맥락에 포함되어 있는 수학적인 문제를 시각화 하여 나타내는 모델도 있으며, 서로 다른 두 양 사이의 관계를 나타내는 이중 수직선이라는 모델도 있다. 원래의 양과 백분율 사이의 관계를 나타내는 모델도 있다. 다른 모델을 창조하면서 고려하고 창조하는 수학적인 의미가 다르며, 점차 수준이 향상된다. 수준의 상승은 모델의 변형 또는 개선과 밀접하게 관련되어 있다.



[그림 II-1] 학생들이 창조하는 다양한 모델들
(Van den Heuvel-Panhuizen, 2000: 11)

위에서 살펴본 바를 요약하면, 학생이 스스로 다양한 모델을 창조하여 주어진 현실을 파악하고 점차 그 안에 숨겨져 있는 수학적인 구조를 인식하고 드러내면서 수학화와 수준의 상승을 거듭하는 가운데, 수학을 창조한다. 원시적인 모델을 창조하고 그 모델을 개선하며, 모델을 활용하여 수학적인 추론을 하는 일 모두가 학생이 수학을 배운다고 할 때 하게 되는 활동이다. 원시적인 모델의 경우 주어진 현실과의 결합이 가장 강한 상태에서 만들어진 것이며, 개선을 거듭하여 만든 모델은 현실과의 결합을 약화하는 대신 엄밀성이나 형식성, 추상성은 강화한 것이어서 수학적 구조에 밀접하게 관련된다.

학생이 현실 맥락과 결합된 수학을 감지하고 그것을 다루는 도구이자 방법으로서 모델을 창조한다면, 이미 창조된 수학이 아니라 '학생의 눈앞에서 창조되는' 수학을 배우게 된다 (Freudenthal, 1973: 100-101). Gravemijer(1999)는 현실적 수학교육 이론에서 택한 모델 개념이 다른 이론들에서 말하는 모델 개념과 어떤 점에서 다른지를 다음과 같이 설명한다. 여기에 수학적 창의성 교육 관련 담론이 등장한다.

> 현실적 수학교육 이론에서 보는 모델은 정보처리 이론 또는 Gal'perin(1969)이 제시한 문화-역사적 입장에서 보는 모델과 사뭇 다르다. 정보처리 이론이나 문화-역사적 입장에서는 가르쳐야 할 형식적인 수학을 구체화 한 교수학적 모델을 주로 이야기한다. 다시 말하면, 형식적이고 추상적인 수학을 학생들이 배울 수 있도록 '구체화' 한 것을 모델이라고 지칭한다. 이 때 학생들이 하는 일은 미리 설계하여 구체화 한 모델을 발견하는 것이다. 반면에, 현실적 수학교육 이론에서는 가르쳐야 할 수학에서 모델을 도출하지 않는다. 대신에 학생이 해결해야 할 맥락 문제에 모델이 들어 있도록 설계한다. 이렇게 하여 현실적 수학교육 이론에서는 주어진 모델이 아니라 모델을 만들어가는 활동에 초점을 둘 수 있다. 모델을 창조하는 활동의 첫 단계는 해결해야 할 문제의 맥락을 파악하는 것이다. 학생은 스스로 이해하고 있는 모델을 활용하여 문제를 해결하면서 동시에 문제를 모델화 하게 된다. 여기에는 학생이 모델을 창조하여 활용하는 가운데 자신이 알고 있는 것보다

더 형식적인 수학을 발명 또는 재발명할 수 있다는 기본가정이 들어 있다(p. 159).

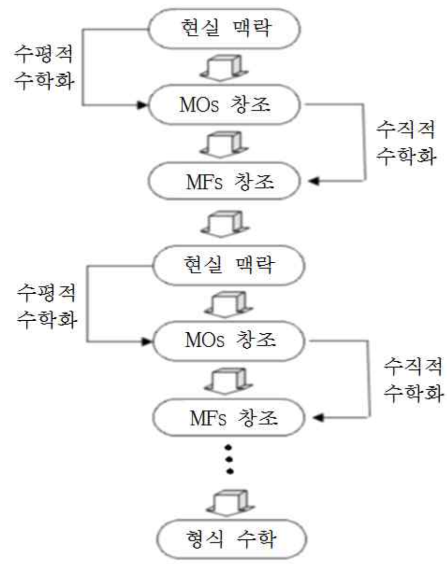
수학적 창의성 교육 담론에서는, '창의적인 문제해결 과정(김진호, 2004; 성창근·박성선, 2010)'과 '창의적인 사고에 의한 산출물 창조(한정민·박만구, 2010; 김진호, 2003; 이경화, 2015)'에 초점을 두고 있는데, 위에서 모델이 창의적인 산출물이면서 동시에 창의적인 문제해결 도구라는 것을 알 수 있다. 주목할 만한 것은, 모델이 문제를 해결하는 도구일 뿐만 아니라 문제 자체를 모델화 하는 역할도 한다는 점이다. 현실적 수학교육 이론을 수학적 창의성 교육의 관점에서 살펴볼 때, 이와 같이 다목적에서 모델을 창조하는 것이 중추적인 역할을 한다. 심지어 프로이덴탈은 학생이 스스로 모델 또는 모델의 의미와 역할을 창조할 수만 있다면, 표준적인 알고리듬을 배우지 못하더라도 충분히 가치가 있는 수학을 배운 것으로 보아야 한다고 하였다(Freudenthal, 1991: 61).

모델의 창조에 의한 수학화를 두 유형으로 구분할 수 있는데, '~의 모델(model of, 이하 MO)'과 '~을 위한 모델(model for, 이하 MF)'이 그것이다. Streefland는 출발점이 되었던 현실 맥락이 모델로 압축되었다는 의미에서 MO를 '(주어진 현실 맥락의) 사후 이미지(after-image)'로, 일반성을 갖춘 형식적인 수학의 모델이 된다는 의미에서 MF를 '(형식 수학의) 사전 이미지(pre-image)'로 표현하였다(Gravemijer, 1999: 160 재인용). 결국 수학의 학습은 모델의 창조에 의하여 가능하며, MO를 창조하고 다시 MF를 창조하는 과정을 반복하면서 수준의 상승이 이루어진다. 이와 같이 학생이 모델을 창조하면서 발휘하게 되는 그리고 함양하게 되는 수학적 창의성은 현실적 수학교육 이론의 핵심적인 요소가 된다.

4. 수학적 창의성 교육 모델

앞에서 현실적 수학교육 이론이 본래 수학적 창의성 교육을 추구하고 있음을 알아보았다. 특히, 모델이 핵심적인 창조 대상이자 창조 형식이라는 점을 알 수 있었다. 주어진 현실 맥락을 모델화 한, 사후-이미지로서의 모델 MO를 창조하고, 다시 형식적인 수학의 사전-이미지로서의 모델 MF를 창조하는 것이 학생들이 하게 되는 주된 수학화 활동이자, 수학적 창조 활동이라는 점도 파악하였다.

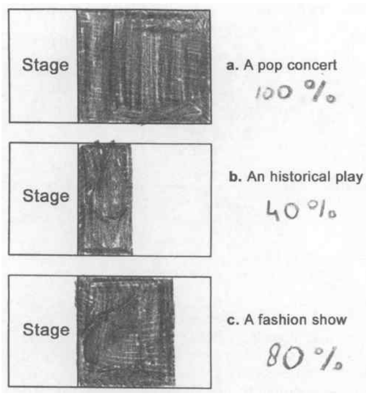
한편, MO의 창조는 수평적 수학화에, MF의 창조는 수직적 수학화에 따른 것으로 볼 수 있다. 그런데 현실 맥락에서 수평적 수학화에 의하여 창조하게 되는 MO는 단일하다기보다는 복수로 가능하여 MOs로 나타낼 수 있으며, 마찬가지로 MF도 복수로 가능하여 MFs로 나타낼 수 있다. 또, 최초 한 번만 수평적 수학화가 일어나는 것이 아니라 수평적 수학화, 수직적 수학화가 상황에 따라 다양하게 여러 차례 일어날 수 있다. 이와 같은 특징을 종합하여 현실적 수학교육 이론에서 추구하는 수학적 창의성 교육 모델을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



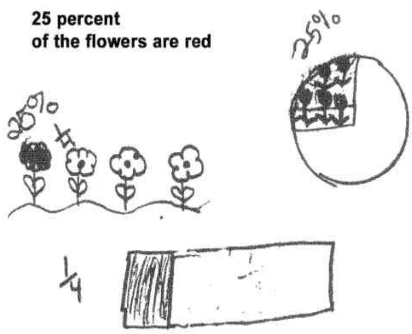
[그림 II-2] 수학적 창의성 교육 모델

[그림 II-2]에서 모델을 '창조'한다는 의미는 크게 두 가지이다. 먼저 주어진 모델의 '의미'를 창조한다. 현실적 수학교육 이론에서는, 교수학적 분석에 기초하여 연구자, 교과서 저자, 교사가 모델을 개발한다. 학생은 이렇게 개발된 모델을 다루면서 왜 그리고 어떤 의미에서 이것이 모델이 되는가를 파악하게 된다. 이 때 학생은 모델 자체가 아니라 모델의 '의미'를 창조하는 것이다. 모델 창조의 두 번째 의미는, 학생이 직접 모델을 창조하는 것이다. 앞서 말한 바와 같이 주어진 모델의 의미를 창조한 후, 자신이 창조한 모델의 의미를 공유하는 다른 모델들을 창조하는 것이다. 이를테면, [그림 II-3]은 교내에 있는 극장에서 팝 콘서트, 역사극, 패션쇼를 할 때 각각 100%, 40%, 80%의 관객이 들었다는 현실 맥락을 나타내는 모델의 하나이다. 이 모델은 학생에게 이미 주어진 것이다. 이 모델은 극장에 관객들이 앉아 있다는 현실 맥락을 시각적으로 단순화 하여 표현한 것이다. 학생은 극장에 의자가 배열되어 있고 음영부분에 관객이 앉아 있는 것을 상상할 수 있다. 이 모델은 주어진 현실 맥락과 잘 결합되어 있으며, 학생이 그 안에 담긴 의미를 창조하기 쉽게 설계되어 있다. 학생은 주어진 현실 맥락이 이 모델에 의하여 단순화, 이상화 된다는 것, 다시 말하여, 모델화 된다는 '모델의 의미'를 창조하게 된다. 이제 주어진 현실 맥락을 '모델화 한다는 것'이 어떤 뜻인지를 알게 된 학생들은 [그림 II-4]와 같이 동일한 구조와 본질을 가지는 다른 MOs를 만들 수 있게 된다. 수학적 창의성 관련 연구에서 말하는 유창성, 유연성, 독창성, 정교성이 MOs를 만드는 과정에 반영될 수 있고 평가될 수 있다. 다시 말하여, 얼마나 다양한 MOs를 만드는가, 관점의 전환에 따른 MOs를 얼마나 많이 만드는가, 얼마나 독창적인 MOs를 만드는가, 얼마나 수학적으로 정교한 MOs를 만드는가를 관찰할 수도 있고 평가할 수도 있으며 촉진할 수 있다.

동일한 방식으로 MF 그리고 MFs를 창조하는 의미를 설명할 수 있다. 학생이 MF를 창조하는 것이라기보다는 교사 또는 교과서에 의하여 주어진 MF를 다루면서, 형식 수학의 사전-이미지로서의 모델의 의미를 파악할 수 있다. 이어서 의미와 역할에 있어 동치인 MFs를 창조할 수 있으며, 수학적 창의성 담론에서 제시한 용어인 유창성, 유연성, 독창성, 정교성을 적용하여 이러한 창조 과정과 산물을 평가할 수도 있다.



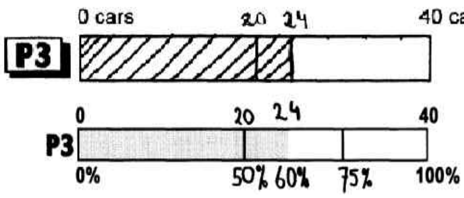
[그림 II-3] MO의 의미 창조
(Van den Heuvel-Panhuizen, 2003: 19)



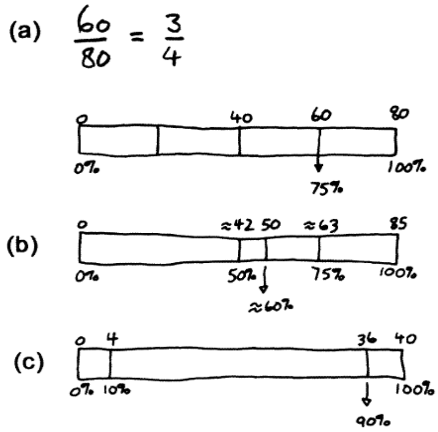
[그림 II-4] MOs의 창조
(Van den Heuvel-Panhuizen, 2003: 20)

[그림 II-5]에는 두 개의 막대모델이 있는데,

위의 막대는 MO에 그리고 아래의 막대는 MF에 해당한다. 먼저 위에 있는 막대 모델은 40대를 주차할 수 있는 공간 중 24곳에 주차가 되어 있다면, 절반인 20대보다 약간 더 많으므로 50%보다 많은 공간이 점유되어 있다는 추측을 하는 데에 도움이 된다. 일부 학생은 60%라고 추측할 수도 있지만 왜 그런지를 설명하는 데에는 어려움을 겪는다. 이 막대 모델은 [그림 II-3]과 [그림 II-4]처럼 현실 맥락인 주차 공간의 상황을 수학적으로 나타낸 것이다. 절반보다 큰 공간을 차지하고 있다는 것은 분명하지만 정확히 몇 %인지를 나타낼 수는 없다. 그러므로 아직 MO에 해당한다. 이와 비교할 때 [그림 II-5]의 아래 모델은 40대가 100%에 해당한다면, 20대는 50%에 그리고 24대는 60%에 해당한다는 것을 정확한 근거와 더불어 표현한 것이다. 결국 이 모델은 백분율이라는 것이 주어진 전체를 100%로 볼 때 특정 부분의 비율을 나타낸 것이라는 아이디어를 명확히 파악하는 기회를 제공한다. 또, 다양한 조건에 대한 일반적인 해법을 찾는 데에도 활용할 수 있는 도구가 된다. 이 경우 주어진 하나의 현실 맥락에 대한 모델에 그친 것이 아니라, 동형인 모든 현실 맥락을 다룰 수 있는 일반적인 원리이자 수학적 추론 도구로서의 MF의 의미를 창조하게 된다. 이렇게 창조한 MF의 의미는 [그림 II-6]과 같은 다른 사례로 확장할 때 중요한 역할을 한다.



[그림 II-5] MF의 의미 창조(Van den Heuvel-Panhuizen, 2003: 21)



[그림 II-6] MFs의 창조(Van den Heuvel-Panhuizen, 2003: 23)

5. 국소적 교수이론과 수학적 창의성 교육

수학과 교육과정에서는 일찍부터 수학적 창의성 교육을 표방해 왔으나, 수학수업에서는 여전히 수학적 창의성 교육이 내실 있게 구현되지 못하고 있다는 문제가 제기되어 왔다(김진호, 2003, 2004; 이경화, 2015). 현실적 수학교육 이론에서 말하는 국소적 교육이론의 개발은 이러한 문제를 해결하는 한 가지 방안이 될 수 있다. 이하에서 왜 그리고 어떤 의미에서 그러한지를 살펴본다.

국소적 교수이론은 특정한 주제를 지도하기 위하여 여러 차시의 수업에 걸쳐 다루게 되는 활동들과 그 활동들 사이의 관련성을 포함한 교수학적 논의를 가리킨다. 국소적 교수이론을 개발하기 위해서는 이른바 사고실험을 한다(Gravemeijer, 1999; 정영옥, 2005). 사고실험은 본래 유클리드 이전부터 존재했던 가장 고전적인 수학적 증명이라고 할 수 있다. 이때에는 실험적인 속성이 없었으나, 갈릴레이의 낙하실험과 같이 상상에 의하여 실험적인 속성을 고려하는 개념적인 연구를 가리키는 용어가 되었다(Brendel, 2004). 여기서 개념적인 연구는, 프로이덴탈의 표현에 의하면, 상상에 의존하는 연구이다. 상상에 의존하

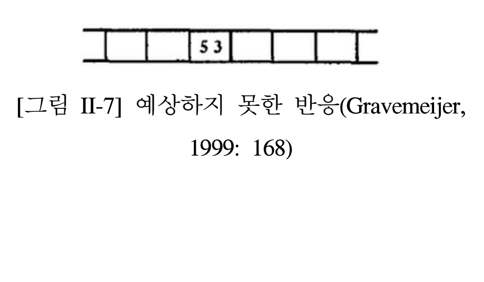
기 때문에 실행했을 때 여러 문제에 부딪힐 수 있으며, 실행 후 성찰에 의하여 다시 이론을 수정하고 보완하는 일련의 순환을 반복하는 것이 필요하다.

프로이덴탈은 가장 널리 회자되는 고대 수학 수업 장면인 소크라테스와 노예사동 사이의 대화를 예시로 하여 사고실험의 의미를 언급하였다. 프로이덴탈이 주목한 것은, 소크라테스가 '산파로서의 교사'로서가 아니라 학생 대신 문제를 제시하고 학생 대신 수학을 다시 발견하는, 지적 대리인으로서의 교사였다는 점이었다. 이렇게 대리인이 되지 않으려면 교사는 사고실험을 해야 한다(Freudenthal, 1991: 95). 사고실험의 결과를 일차적인 국소적 교수이론으로 나타낼 수 있고, 실제로 적용 후 성찰하여 이를 개선할 수 있다(Prediger, Gravemeijer, & Confrey, 2015; Gravemeijer, 1999).

사고실험에 의한 일차적인 국소적 교수이론은 사전 교수설계라고 할 수 있으며 이른바 가설학습경로와 유사한 점이 있다. 그러나 다음 글에서 알 수 있듯이 가설학습경로와는 다른 점이 있으며, 이를 고려하여 둘 사이를 연결할 수 있다.

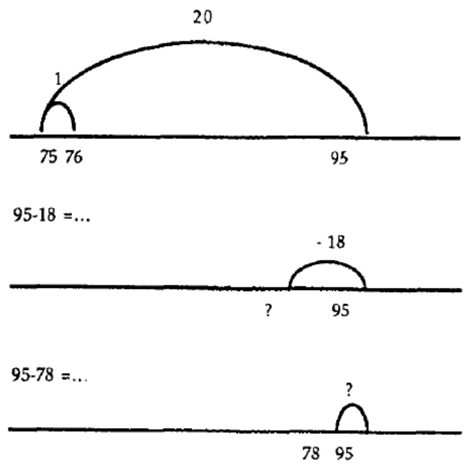
> 사전 교수설계는 교수활동들과 안내자료를 개발하는 것으로 이루어진다. 안내자료에는 교수활동 순서, 그 교수활동에 학생들이 참여할 때 할 법한 사고활동으로 이루어지는 학습경로를 제시한다. 이것을 가리켜 국소적인 교수이론이라 한다. 이와 같은 일종의 가설적인 교수이론을 Simon(1995)이 제시한 가설학습경로와 비교해보자. 가설학습경로에는 '학습목표, 학습활동, 학생들이 하게 되는 사고와 학습'이 포함된다. 이 둘 사이에는 다음 두 가지 차이점이 존재한다. (a) 가설학습경로는 교수활동 일부를 다루는 반면에, 국소적인 교수이론은 전체 교수계열을 포괄한다. (b) 가설학습경로는 특정 교사가 자신이 특정한 시점에 하게 되는 수업을 위한 것인데 반하여, 국소적인 교수이론은 더 일반적인 수업을 고려 대상으로 한다. 국소적 교수이론은 일종의 틀이며, 이것에 비추어 자신의 수업에 실제로 적용할 수 있는 가설학습경로를 구체화하는 방식으로 두 입장을 연결할 수 있다고 생각한다(Gravemeijer, 1999: 157).

사고실험의 결과로 얻은 국소적인 교수이론에 포함되는 내용은, 제공해야 할 현실 맥락들, 우선적으로 제공해야 할 MO, MF, 학생들이 창조할 것으로 기대되는 MOs, MFs 등이다. 이를 적용한 후 성찰하여 국소적 교수이론을 개선하는 것은 다양한 형태와 내용으로 가능하다. 예를 들어, Gravemeijer는 구슬들을 줄에 꿰어 자연수의 덧셈과 뺄셈 활동을 하고 그 결과를 표현하는 것이 자연수의 덧셈과 뺄셈에 대한 좋은 모델이 된다고 생각하였다. 그런데 사고실험 단계에서는 미처 예상하지 못했던 반응이 나타났다. [그림 II-7]과 같이 계산 결과인 53을 나타낼 때, 해당 구슬의 중앙을 지나는 선을 그어 나타낼 것인지 아니면 해당 구슬의 오른쪽 끝을 지나는 선을 그어 나타낼 것인지에 대한 학생들의 의견이 분분했던 것이다. 마찬가지로 [그림 II-7]의 아래와 같이 측정 상황으로 덧셈과 뺄셈을 모델화 한 경우에도 계산 결과를 어떤 방식으로 나타낼 것인가에 대한 혼란이 있었다. 이와 같은 실행 결과를 고려하여 해당 활동을 전체 교수활동에 포함시킬 것인지 또는 어떤 점을 보완하여 포함시킬 것인지를 논의하여 국소적 교수이론을 개선할 수 있다(Gravemeijer, 1999: 167-169).



[그림 II-7] 예상하지 못한 반응(Gravemeijer, 1999: 168)

[그림 II-7]에 이어서 제공할 MF로 널리 알려진 것이 바로 '빈 수직선(empty number line)'이다. 이것에 대해 어떤 사고실험을 거쳤고 교수실행 후 성찰에 의하여 국소적 교수이론을 어떻게 개선하였는가를 논의한 연구가 상당수 보고되어 왔다(Bobis & Bobis, 2005; Bobis, 2007; Gravemijer, 1993a, 1993b, 1999; Klein, Beishuizen, & Treffers, 1998, 2002; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, 2008). 빈 수직선의 경우, 학습자가 제시된 현실 맥락을 어떻게 이해하고 해석하여 문제를 해결하는가에 따라 다양한 해법, 다양한 절차, 다양한 표현을 창조할 수 있다는 것을 잘 보여주는 대표적인 사례이다. 예를 들어, 다음 그림과 같이 다양한 방식으로 빈 수직선을 활용하여 맥락을 표현하고 문제를 해결할 수 있다.



[그림 II-8] 빈 수직선의 다양한 활용(Gravemeijer, 1999: 162)

사고실험에 의하여 국소적 교수이론을 만들고 실행 후 개선하는 일은, 수학적 창의성 교육을 계획하고 실행하는 과정으로 매우 적합하다. 수학적 창의성 교육에서는 학생들의 창조를 허용하고 촉진해야 하는데, 그러기 위해서는 프로이덴탈이 지적한 바와 같이 대리인이 아니라 산파로서의 교사로 행동할 수 있어야 한다. 위대한 지성을 대표하는 소크라테스도 대리인으로서 수업을 이끌었다는 점을 고려하면 학생에게 기회를 주어 창조하도록 하는 수업을 계획하는 것이 얼마나 어려운가를 짐작할 수 있다. 그러므로 현실적 수학교육 이론에서 시도했던 연구과정을 도입하여, 창의성 함양에 적절한 현실 맥락, 창조기회를 함의하는 적절한 출발점으로서의 MO와 MF, 학생들이 MOs와 MFs를 창조하도록 하는 환경을 연구할 필요가 있다. 이로부터 수학적 창의성 함양을 위한 국소적인 교수이론을 정립하는 것이 필요하다.

수학적 창의성 교육은 학교수학의 각 주제를 벗어나서 논의하는 가운데 추구할 수 없다. 학생들이 창조할 만한 MOs와 MFs를 사전에 충분히 알고 앞뒤로 적절한 기회를 제공해야 한다. 그렇기 때문에 국소적 교수이론이 매우 정교하게 개발되어야 한다. 그렇게 할 때에만 수학적 창의성 교육이 공허한 주장에서 구체적인 개혁안으로 바뀔 것이다. 또, 국소적 교수이론으로서의 수학적 창의성 교육이론이 개발되면 보통의 수학수업에서 수학적 창의성이 어떤 방식으로 발현되고 함양되는가를 파악할 수 있다. 가령, 백분율을 지도하기 위한 사고실험과 교수실행을 반복했던 Van den Heuvel-Panhuizen(2003)이 제시한 다음 글에서와 같이 일상적인 수업에서 학생들이 어떻게 수학적인 창의성을 발휘하고 개발하게 되는지를 표현할 수 있다.

> occupation meter라는 모델 덕분에 학생들은 유연한 방식으로 문제를 해결할 수 있었다. 학생들마다 수에 대하여 알고 있는 지식이 다양했음에도 불구하고, 이 모델을 사용하여 모두 다양하고 유연하게 문제를 해결할 수 있었다. 다른 장점은 이 모델 덕분에 학생들이 모종의 표준에 비추어 수 사이의 관련성을 나타낼 수 있었다는 것이다. 더욱이, 수학 학습 수준이 낮은 학생들까지도, 수 사이의 관계, 관계의 성질, 그

리고 연산의 성질과 같은, 매우 높은 학습 수준에서나 가능한 내용들을 쉽고도 유연하게 활용할 수 있게 되었다(pp. 22-23).

일상적인 수학수업과 직접적으로 관련을 맺지 않으면서 교육과정 문서에는 일찍부터 존재해 온 수학교육의 목표 중 하나가 수학적 창의성이었다. 국소적 교수이론의 형태로 구체적이고 체계적인 관점을 정립함으로써만 고질적으로 반복되어 온 이 문제를 해결할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 요약 및 결론

지금까지 현실적 수학교육 이론을 수학적 창의성 교육의 관점에서 재음미하였다. 그 결과를 다음과 같은 다섯 가지 특징으로 요약할 수 있다. 첫째, 수학화를 통해 수학적 창조를 경험하도록 할 수 있으며, 이 때 확실성을 추구하고 확실성을 창조하도록 기회를 제공할 필요가 있다. 둘째, 학생들이 상상에 의하여 현실이라고 느끼는 맥락에서 출발해야 수학적 창조의 기회를 제공할 수 있다. 셋째, 학생들이 모델링에 의하여 현실 맥락과 결합된 수학을 창조하도록 할 수 있다. 넷째, 모델링은 주어진 MO와 MF가 왜 모델이 되는가를 이해하는 것, 곧 주어진 모델의 의미를 창조하는 것에서 출발한다. 이어서 자신이 창조한 모델의 의미를 공유하는 MOs와 MFs를 창조하며, 이 때 유연성, 유창성, 독창성을 발휘하게 된다. 다섯째, 사고실험에 의하여 국소적인 교수이론을 개발하고, 이를 적용한 후 개선하는 것이 수학적 창의성 교육의 연구방법으로 적합하다.

이상의 특징들을 기초로 다음과 같은 결론을 도출할 수 있다. 먼저 단편적이거나 일회적인 문제해결 경험의 추가로는 수학적 창의성 교육이 이루어지기 어렵다는 문제(김진호, 2003)를 해결하는 방안으로 활용할 수 있다. 이 논문에서 제안한 수학적 창의성 교육 모델을 실제 수업의 설계에 적용하여 다각도로 수학적 창의성 발현의 기회를 제공하는 것이 가능하다. 그 효과를 분석하여 모델의 적절성과 유용성을 검증하는 후속연구도 이루어질 필요가 있다. 다음으로 현실적 수학교육 이론에서 제안한 수학적 창의성 교육의 여러 측면은, 일반 학생들을 대상으로 하는 수학적 창의성 교육 관련 논의에서 생략되거나 간과되었던 부분을 보완할 수 있다. 예를 들어, 황우형 외(2006)에서는 일반 학생들이 예비 수학적 창의성 단계, 이해 단계, 개념 확장 단계를 거치면서 수학을 학습한다고 주장하였다. 그리고 이해 단계에서 개념 확장 단계로 나아갈 때 수학적 창의성이 발현되며, 다른 단계에서도 수학적 창의성이 발현될 수 있다고 보았다. 그러나 수학적 창의성의 구체적인 발현 양상이나 과정에 대해서는 논의가 이루어지지 않았다. 이 글에서 시도한, 수학화 활동에 따른 수학적 창의성의 발현, 현실 맥락의 모델화, MOs와 MFs의 창조에 관련된 논의는 황우형 외(2006)에서 생략한 부분을 보완하는 데에 도움이 된다.

본 연구는 일반 학생들을 대상으로 하는 수학적 창의성 교육에 대한 논의가 체계성과 포괄성이라는 이론적인 성격을 갖출 필요가 있다는 문제의식에서 출발하였다. 수학적 창의성 교육은 수학과 교육과정 개정을 거치면서 점차 더 강조하는 목표임에도 불구하고, 체계적이고 포괄적인 관점의 부재로 실행의 적절성과 타당성을 검증하기 어려운 면이 있다. 본 연구에서 제안한 현실적 수학교육 이론에 입각한 수학적 창의성 교육의 관점은, 관련 연구자들이 다각도로 시도한 결과를 반영하고 있다는 점에서 상당 부분 체계성과 포괄성을 갖추고 있는 것으로 생각한다. 그러나 우리나라의 교사와 학생들을 대상으로 한 연구를 반영한 것은 아니므로, 우리나라의 수학

교수-학습 환경에서 수학적 창의성 교육을 실행하기 위한 설계와 실행결과에 대한 분석에 이 관점이 얼마나 적절하며 유용한지 그리고 어떤 점에서 수정과 보완이 필요한지를 검증하는 후속연구가 이루어질 필요가 있다.

참고문헌

교육부(2015). **2015 개정 수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2015-74호 [별책8].

김도한・황혜정・김창일・정영옥・박만구・ 고호경・김선희・한혜숙・한세호・김현아・장미라・정은선(2010). **창의 중심의 수학 수업 내실화 및 평가 방안 연구**. 서울: 한국과학창의재단.

김연식・정영옥(1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. **수학교육학연구, 7**(2), 1-23.

김진호(2003). 학교수준에서의 수학적 창의성에 대한 논의. **교육과학연구, 34**(2), 149-165.

김진호(2004). 수학적 창의성에 대한 일 논의-창의적인 사람, 창의적인 산물, 창의적인 과정이란 관점으로부터. **수학교육논문집, 18**(3), 45-56.

성창근・박성선(2012). 수학적 창의성 계발을 위한 과제와 수업 방향 탐색. **한국초등수학교육학회지, 16**(2), 253-267.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교 출판부.

이경화(2015). **수학적 창의성**. 서울: 경문사.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

정영옥(1999). 현실적 수학교육에 대한 고찰. **수학교육학연구, 9**(1), 81-109.

정영옥(2005). 교과과정 개발을 위한 기초로서의 개발연구에 대한 고찰. **수학교육학연구, 15**(3), 353-374.

한정민・박만구(2010). 수학적 창의성 관점에서 본 교사의 발문 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(3), 865-884.

황우형・최계현・김경미・이명희(2006). 수학교육과 수학적 창의성. **수학교육논문집, 20**(4), 561-574.

Bobis, J., & Bobis, E. (2005). The empty number line: Making children’s thinking visible. In Coupland, M., Anderson, J., & Spencer, T. (Eds.). *Proceedings of the twentieth biennial conference of the Australian association of mathematics teachers*, 66-72.

Bobis, J. (2007). The Empty Number Line: A Useful Tool or Just Another Procedure?. *Teaching Children Mathematics, 13*(8), 410-413.

Brendel, E. (2004). Intuition pumps and the proper use of thought experiments. *Dialectica, 58*(1), 89-108.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational studies in mathematics, 1*(1), 3-8.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational studies in mathematics, 12*(2), 133-150.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1993a). Modelling two-digit addition and subtraction with an empty number line. *Teaching and learning mathematics in contexts*, 51-61.

Gravemeijer, K. (1993b). The empty number line as an alternative means of representation for addition and subtraction. Innovation in mathematics education by modelling and applications, 141-159.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical thinking and learning, 1*(2), 155-177.

Hanna, R. (2002). Mathematics for humans: Kant's philosophy of arithmetic revisited. *European Journal of Philosophy, 10*(3), 328-352.

Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 443-464.

Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (2002). The empty number line in Dutch second grade. *Lessons learned from research*, 41-44.

Otte, M. F., Campos, T. M., & Abido, A. S. (2013). Plato, Pascal, and the dynamics of personal knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 397-415.

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM, 47*(6), 877-891.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute CD-rom for ICME9, 1-32.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Learning from "didactikids": An impetus for revisiting the empty number line. *Mathematics Education Research Journal, 20*(3), 6-31.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In Lerman, S. (Ed.). *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521-525). Springer Netherlands.

Van Oers, B. (2002). The mathematization of young children's language. In Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education (pp. 29-58). Springer Netherlands.

Reanalysis of Realistic Mathematics Education Perspective in Relation to Cultivation of Mathematical Creativity

Lee, Kyeong-Hwa (Seoul National University)

Cultivating mathematical creativity is one of the aims in the recently revised mathematics curricular. However, there have been lack of researches on how to nurture mathematical creativity for ordinary students. Perspective of Realistic Mathematics Education(RME), which pursues education of creative person as the ultimate goal of mathematics education, could be useful for developing principles and methods for cultivating mathematical creativity. This study reanalyzes RME from the points of view in mathematical creativity education. Major findings are followed. First, students should have opportunities for mathematical creation through mathematization, while seeking and creating certainty. Second, it is vital to begin with realistic contexts to guarantee mathematical creation by students, in which students can imagine or think. Third, students can create mathematics in realistic contexts by modelling. Fourth, students create the meaning of 'model of(MO)', which models the given context, the meaning of 'model for(MF)', which models formal mathematics. Then, students create MOs and MFs that are equivalent to the intial MO and MF given by textbook or teacher. Flexibility, fluency, and novelty could be employed to evaluate the MOs and the MFs created by students. Fifth, cultivation of mathematical creativity can be supported from development of local instructional theories by thought experiment, its application, and reflection. In conclusion, to employ the education model of cultivating mathematical creativity by RME drawn in this study could be reasonable when design mathematics lessons as well as mathematics curriculum to include mathematical creativity as one of goals.

* Key Words : Realistic mathematics education(현실적 수학교육), mathematical creativity(수학적 창의성), mathematization(수학화), realistic context(현실 맥락), modeling(모델링)

논문접수 : 2015. 12. 30
논문수정 : 2016. 2. 9
심사완료 : 2016. 2. 9