대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 4, 881 ~ 901. Dec 2016

거리함수와 속력함수에서, 거리와 속력의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현의 변화과정에 대한 연구

이 동 근[*] · 안 상 진[**] · 김 숙 희[***] · 신 재 홍[****]

본 연구는 '시간, 거리, 속력'의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현을 교수실험을 통하여 세밀하게 관찰한 연구이다. 이 과정에서 학생들의 '시간, 거리, 속력'의 관계에 대한 인식의 변화가 드러났으며, 학생들은 평균속력에 대하여 거리함수에서 구간의 양 끝점을 잇는 선분의 기울기라는 관점으로 인식하는 것 외에도 속력함수에서 사각형의 높이로 인식하여 '시간, 거리, 속력'을 이해하고 있음을 보여주었다. 이 과정에서 '거리=시간×속력'의 관계를 '거리=시간×평균속력'으로 확장하는 장면을 드러내었다. 본 연구는 제한된 소수 학생을 대상으로 교수실험을 진행하였지만, 학생들의 '시간, 거리, 속력'의 관계에 대한 인식과 표현의 변화 과정에 대한 관찰을 통하여 여러 시사점을 제시하였다. 이러한 연구 결과가 추후 미적분 학습 모델 구성을 위한 다양한 연구의 시발점이 되기를 기대해본다.

Ⅰ. 서 론

미적분은 수학과목에만 국한된 학습 내용이 아니라 이미 여러 학문에서 활용된다는 점을 고려할 때, 교육과정에서 미적분 학습은 중요한 의미를 갖는다. 그러나 미적분 개념이 학생들에게 어렵고(권오남, 조현정, 1997; 박선화, 2000), 학생들이 정형화된 계산에는 익숙하지만 비정형화된 문제해결에는 어려워하는 것으로 지적되었다(황혜정, 김미향, 2016). 이러한 영향으로 우리나라에서도 7차 교육과정에서 잠시 인문사회 계열 희망학생을 대상으로 미적분 교과를 이수하지 않도록 하였으나, 2007 개정 교육과정에서는 다시 인문사회 계열 학생들도 미적분 교과를 이수하는 것으로 바뀌었다(권오남, 박재희, 조경희, 박정숙, 박지현, 2015).

그럼에도 불구하고 여전히 현행 미적분 학습에서 학생들의 학습이 지나치게 대수적인 절차에 치우치는 경향에 대한 문제점이 제기되고 있다(이현주, 류중현, 조완영, 2015; 정연준, 이경화, 2009; 최영주, 홍진곤, 2014). 이에 대하여 Johnson(2012)의 경우는 '비와 극한의 기계적인 결합'으로 접근하는 미분 학습의 문제점을 지적하고 공변 관점에서 함수의 변화를 인식하는 것이 필요함을 역설하였다.

한편 이러한 문제점들에 대하여 극한의 형식적인 이해에 대한 어려움을 원인으로 찾기도 한다(Zandieh, 2000; 이진호, 2005; 정연준, 김재홍, 2008). 극한 개념은 연속적으로 움직이는 물체의

* 문정고등학교, jakin7@hanmail.net (제1 저자)
** 문정고등학교, sjia0216@hanmail.net
*** 청담고등학교, mathpray@hanmail.net
**** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)

운동에 대한 탐구 과정에서 함수 개념과 연속 개념의 발달 과정에서 완성되었다(정연준, 김재홍, 2008). 특히 19세기 Cauchy와 Weierstrass등에 의하여 물체의 연속적인 움직임을 형식적이고 정적인 극한 개념을 이용하여 정의하고 분석하는 것이 가능해졌다(이진호, 2005). 그러나 Thompson (2008)은 학생들이 미적분 개념을 구성해가는 과정에서 형식적인 극한 개념 구성이 부자연스러움을 지적하고 있는데, 이는 함수 개념과 연속성 개념의 역사발생과정에서 Newton을 비롯한 여러 학자들에게서 발견된 문제점이기도 하다(Boyer, 1959, p. 226).

미적분 학습에 대한 논의를 위해서는 함수 개념과 연속 개념의 발달에 대한 이해가 필요한데, 함수개념의 발달은 운동현상 곧 연속적인 변화에 대한 연구를 통해 촉진되었다(김연식, 박교식, 1992). 즉, 연속적인 변화에 대한 이해와 연속성 개념이 상호 연관 되어있음을 알 수 있다. 처음에는 시간에 따른 물체의 연속적인 변화를 관찰함에 있어 기하적인 연속성을 이용하여 연속적인 변화의 양적 규칙성을 설명하였는데(김영식, 2001, p. 64), 14세기 Oxford대학 Merton칼리지의 역학자들의 속도가 변할 때 이동 거리의 증가 규칙 연구를 이어받아 Oresme은 연속적 변화를 기하적 도형과 연결했고, 등속도 운동과 등가속도 운동의 속도함수의 그래프 아래 넓이가 이동 거리와 동일하다는 것을 보였다(Boyer, 1959, p. 99). Galilei도 속도함수의 그래프에서 그래프의 높이는 순간적인 이동 거리를 나타낸다고 하였다. 또한 선분들의 합인 그래프 아래의 넓이는 순간적인 이동 거리의 합인 전체 이동 거리가 된다고 주장하면서 그래프 아래 넓이의 양적인 변화를 이용하여 물체 움직임의 변화를 설명하였다(정연준, 김재홍, 2008). 이처럼 연속 개념의 역사발생과정을 살펴보면 연속적인 시간, 거리, 속도의 관계를 속도함수의 그래프를 이용하여 변화를 파악하던 것이 발견되는데, 이러한 맥락에서 Gravemeijer와 Doorman(1999)는 역사발생관점에서 운동의 속도와 거리 관계의 모델링을 미적분의 출발점으로 간주하기도 하였다. 이때 속도와 거리의 관계를 속도함수에서의 그래프의 넓이 혹은 거리함수에서 구간(한 점)에서의 직(접)선의 기울기로 연결하여 이해가 가능하며, 이러한 의미에서 속도와 거리의 관계는 미분과 적분을 연결해주는 소재로 볼 수 있다. 특히 미분은 변화량 함수에서 변화율 함수를 유도하는 과정이고 적분은 변화율 함수에 대한 정보로 변화량 함수를 결정하는 것이 가능함을 시사해주는 개념이다(정연준, 이경화, 2009). 따라서 거리함수에서 속도함수를 유도하는 것과 속도함수에서 거리함수에 대한 결정이 가능하다는 점을 확인하는 과정은 미적분 학습에서 중요한 의미를 갖는다.

그러나 연속 개념의 역사발생과정에서 드러난 시간, 거리, 속도의 관계에 대한 발달 과정이 미적분 학습 자료를 구성할 때 중요한 근거로 활용될 수는 있지만, 선행적으로 학생들의 시간, 거리, 속도의 관계에 대한 인식이나 구성과정에 대한 연구가 필요하다. 거리함수와 속도함수에 대한 연구(신은주, 2005, 2006; 이동근, 문민정, 신재홍, 2015; 이동근, 김숙희, 안상진, 신재홍, 2016; 정연준, 이경화, 2009)에서 학생들의 시간, 거리, 속도의 관계에 대한 인식이 일부 드러나기는 하였으나, 직접적으로 시간, 거리, 속도의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현에 대한 연구는 드문 편이다. 또한 학생을 대상으로 진행한 연구 결과의 축적은 추후 학습자의 미적분 학습 모델을 구성하는데 풍부한 기초자료를 제공할 수 있기 때문에 학생들의 시간, 거리, 속도의 관계에 대한 인식과 표현에 대한 조사는 의미 있는 연구가 될 수 있다. 이때 시간, 거리, 속도의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현에 대한 연구는,

이전의 속도에 대한 양적 속성(내포량)에 대한 연구(Freudenthal, 1983; 정은실, 2003), 구성적 관점에서의 연구(Lobato, Ellis, 2010; Thompson, 1994), 공변 추론 관점에서의 연구(Byerley, Hatfield, Thompson, 2012; Johnson, 2012)들을 참고하여, '시간, 거리, 속도의 관계 속'에서 속도와 거리에 대한 학생들의 인식과 표현을 살펴본다는 점에서 이전 연구들과 구분된다.

학생들의 시간, 거리, 속도의 관계에 대한 인식은 교육과정에서 초등학교 수학과목과 과학과목에서 학습하게 되는 '속력=거리/시간'과 '거리=시간×속력'의 관계에서 시작(신은주, 2005, 2006; 정연준, 이경화, 2009)될 것으로 보이며, 이때 사용된 '속력'의 개념 속에는 평균속력과 순간속력을 포함한 학생들만의 다양한 개념이 혼재되어 있을 것이므로 판단된다. 따라서 교수실험을 통하여 학생의 구성과정을 따라가다 보면 혼재되어있는 '학생들의 속력에 대한 개념'을 관찰할 수 있을 것으로 예상된다. 또한 속력 개념에 대한 변화가 관찰될 경우, 교수실험을 거치면서 학생들의 시간, 거리, 속도의 관계 인식에 대한 변화를 살펴볼 수 있을 것으로 보이며, 이는 미적분 학습에 대한 중요한 시사점을 제공할 것으로 기대된다.

한편 시간, 거리, 속도의 관계에 대한 역사발생과정에서는 속력함수에서 시작하여 거리함수로 연결되지만(Boyer, 1959, p. 128), 교육과정에서는 거리함수에서 속력함수로 연결하고 있다. 이때 미적분 학습에서 어떤 순서로 학습 내용을 구성할 것인지 결정하기에 앞서 학생들이 두 함수를 어떻게 연결하여 구성하는지에 대한 연구가 선행될 필요가 있으며, 이러한 필요에 따라 본 연구에서는 아직 미적분을 학습하지 않은 고등학교 1학년을 대상으로 동일한 상황에서 물체의 운동을 표현한 속력함수와 거리함수의 관계를 학생들이 어떻게 구성하는지 살펴볼 것이다. 이때 평균속도의 개념이 두 함수의 관계를 연결해주는 교량 역할을 할 것(Strang, 1991, p. 10)으로 보이며, 학생들의 평균속도에 대한 인식과 표현이 어떠한지 살펴보는 것은 추후 미적분 학습 모델 구성 시 평균변화율의 역할에 대한 풍부한 시사점을 제공해줄 것으로 기대된다. 특히 이동근 외(2015)의 연구에서 제시된 것과 같이 도함수의 전 단계에 해당하는 중간 단계의 새로운 함수의 구성과정이 나타나는지에 대하여 관심을 가지고 살펴볼 것이다.

본 연구에서는 아직 미적분을 학습하기 이전의 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 9차시 분량의 교수실험을 근거로 미적분 학습에 의미 있는 시사점을 제시할 수 있는 장면을 중심으로 기술할 것이다.[1)]

본 연구는 앞서 언급한 연구목적에 따라 다음과 같은 연구문제를 갖는다.

- 거리함수와 속력함수에서 거리와 속력의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현은 어떠한가?
- 속력함수에서 거리함수를 구성하는 과정에서 거리와 속력의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현의 변화는 어떠한가?

1) 미적분을 학습하기 이전의 학생들을 대상으로 실험을 진행하였으므로, 실험 과정에서 '속도'와 '속력'에 대한 구분은 하지 않았으며 가급적 '속도'와 '평균속도' 대신 학생들에게 친숙한 '속력'과 '평균속력'으로 용어를 사용하여 진행하였다. 같은 이유로 시각과 시간에 대한 구분 역시 교수실험 과정에서 학생들이 용어의 구분이 필요하다고 주장하기 전까지는 학생들에게 익숙한 '시간'으로 용어를 사용하였다. 다만 분석 과정에서, 학생들이 사용하는 용어가 교육과정에서 사용하는 용어와 동일하다하더라도 구성과정에서 학생들이 부여하는 의미는 다를 수 있으므로 학생이 해당 용어를 사용하여 표현하려고하는 과제 상황에 대한 분석을 바탕으로 학생들만의 용어를 새롭게 정의하여 분석을 진행할 수도 있다.

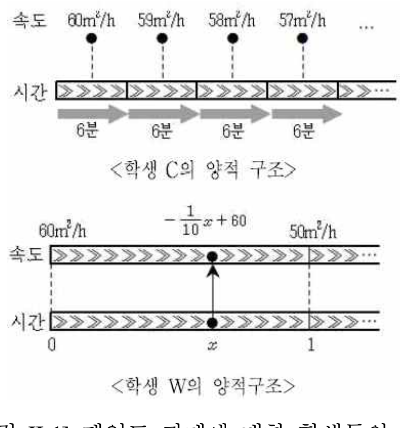
Ⅱ. 이론적 배경

1. 연속추론(Smooth reasoning)과 덩어리추론(Chunky reasoning)

Carlson, Jacobs, Coe, Larsen과 Hsu(2002)는 두 양 사이의 관계에서 변화를 인식하고 그 사이의 관계를 조정하는 정신적 활동을 공변 추론이라고 하였으며 학생들이 공변 관계의 변수를 처리하는 방법은 이산적인 변수에서 연속적인 변수로 발전해간다고 하였다. 이때 Confrey와 Smith (1995)는 대응표를 통하여 정의역의 변수가 1씩 증가해 가면서 함숫값의 변화를 이해하는 방식과 같이 두 수열의 병치로 이해하는 것으로 공변 관계를 설명한 것과 달리 Saldanha와 Thompson (1998)은 Confrey와 Smith(1995)의 주장이 연속적인 상황에서 변화를 인식하는 것으로 적절치 않다고 주장하였다. 특히 Confrey와 Smith(1995)의 방식은 이산적인 값들의 변화만 다루게 되며, 그 사이의 변화에 관심을 갖지 못하게 된다는 점을 지적하면서 연속적인 변화에 대한 학생들의 인식에 대한 연구의 필요성을 주장하였다.

Castilo(2012)는 문제해결 과정에서 학생들의 연속적인 변화에 대한 추론과정은 덩어리적인 이미지로 변화를 인식하는 것과 매끄러운 이미지로 변화를 인식하는 방식이 있다고 하였다. 덩어리적인 방식은 연속적인 시간의 변화를 초 단위로 잘라서 파악하는 것과 같이 연속적인 변화를 덩어리로 사고하는 방식으로서 덩어리의 가장자리의 값에는 주목하지만 덩어리 내부의 변화는 인식하지 못하는 방식이다. 반면 변화를 계속 진행 중인 것으로 상상하는 것을 매끄러운 방식으로 볼 수 있으며, 이것은 변수를 잘게 나누어 상상하는 것과는 구분된다. 덩어리적인 사고는 잘게 나누어 생각하더라도 여전히 덩어리적으로 사고하는 반면 매끄러운 방식은 한 순간의 변화를 설명하는 것이 가능하다. 여기서 덩어리적인 사고를 덩어리추론으로, 매끄러운 사고를 연속추론이라 하며, 두 추론 방식은 변화를 관찰하고 표현할 때 서로 다른 결과물을 산출할 수도 있다.

김채연과 신재홍(2016)은 벽면에 페인트를 칠하는 학생의 페인트를 칠하는 속도가 처음에는 $60m^2/h$이었다가 한 시간 뒤에는 $50m^2/h$로 줄었다고 했을 때 그 변화를 학생들이 어떻게 인식하고 표현하는 지에 대하여 관찰한 다음, 덩어리추론을 하는 학생과 연속추론을 하는 학생의 결과를 도식으로 나타내었다. [그림 II-1]은 두 학생의 추론 방식의 결과물을 도식으로 표현한 것으로서, 덩어리추론을 하는 C학생은 6분 간격으로 $1m^2/h$만큼씩 감소하는 것으로 표현하였으나 6분 내부의 변화는 고려하지 못한 반면, 연속추론을 하는 W학생은 x라는 순간의 페인트 칠하는 속도를 $\left(-\frac{1}{10}x+60\right)m^2/h$로 써서 그 순간의 변화를 표현하였다는 차이가 있다.



[그림 II-1] 페인트 과제에 대한 학생들의 반응 결과 도식 (김채연, 신재홍, 2016, p. 262)

Castilo(2012)은 TV요금을 산정하는 문제 상황에 대하여 세 학생의 사례를 제시하는데, 첫 번

째 학생은 덩어리추론을 이산적인 그래프로 표현하고, 두 번째 학생은 덩어리추론을 연속적 그래프로 나타냈으며, 세 번째 학생은 연속추론을 연속적인 그래프로 표현했다. Castilo(2012)의 덩어리추론은 이동근 외(2015)에서도 잘 드러나는데, 실험대상 학생이 $y=x^2$과 $y=2^x$의 변화의 차이를 표현하는 과정에서 함숫값들의 차이에 해당하는 계차수열로 두 함수의 변화를 구분한 것 역시 덩어리추론으로 해석이 가능한 대목이다. 다만 이동근 외(2015)에서 학생들이 $y=x^2$의 구간에서의 평균변화율을 구간의 함숫값으로 대응시켜 $y=x^2$의 변화를 나타내는 새로운 계단 형태의 함수를 구성하는 장면이 소개되는데, 이때 구성한 계단형태의 그래프는 [그림 II-1]에서 소개된 덩어리추론의 도식과는 차이가 있다. [그림 II-1]의 경우는 6분 내부의 변화를 고려하지 못한 것을 나타내지만, 이동근 외(2015)에서 학생들이 $y=x^2$의 구간에서의 평균변화율을 구간의 함숫값으로 대응시켜 구성한 계단형태의 그래프는 구간 내부의 변화를 인식한 다음 그 변화의 대푯값으로서 평균변화율을 함수의 그래프로 표현한 것이므로 구간 내부의 변화를 인식한 것으로 보아야한다.

Thompson(2011)의 경우는 인간이 변화를 측정하기 위하여는 결과적으로 덩어리적으로 인식할 수 밖에 없음을 지적하면서, 그러한 제약 속에서도 연속적으로 변화를 인식하는 방법으로 덩어리적 방식과 매끄러운 방식을 재귀적으로 수행하는 것을 제시하였다. 즉, 덩어리적으로 사고하면서도 내부의 변화를 인식하는 것을 강조한 것으로 볼 수 있다. 변화율 관점에서는 구간에서의 변화를 인식하는 것이 중요한데, 덩어리추론의 경우 구간의 양 끝점에서의 변화만을 고려하고 그 구간 내부의 변화에 대하여는 변화를 고려하지 못하는 문제가 발생할 수 있다. 반면 한 점에서 양적 관계를 인식하여 공변 관점에서 함수의 그래프를 인식하는 연속추론의 경우에는 변화를 고려할 때도 그 순간의 변화를 고려하여 표현할 것으로 예상된다.

2. 속력 개념과 평균속력 개념

가. 속력

2009 개정 교육과정에서는 초등학교 5, 6학년군의 규칙성 영역에서 <교수 · 학습상의 유의점>으로 '속력, 인구밀도, 축척 등과 같이 타 교과 및 실생활에서 비율이 적용되는 예를 찾아보고, 그와 관련된 간단한 문제를 해결하게 한다.'로 명시하고 있으며, 여기서 속력은 속성이 다른 두 외연량의 비에 해당하는 내포량이다(정은실, 2010). 이러한 내포량에 대한 경험은 추후 학습자의 미분 개념 형성에 도움을 줄 수 있다고 하였다(Byerley, Hatfield & Thompson, 2012; 이동근, 김숙희, 안상진, 신재홍, 2016).

학습자의 속력 개념 발달에 대한 국내 연구가 많은 편은 아니지만, 속력 개념 발달 시기에 관한 연구가 일부 보고되었는데, 김형수, 권재술(1995)는 아동의 운동과 속력 개념에 관하여 Shayer가 실험에 근거하여 제시한 수준을 김현재(1978)이 보다 세분화하여 제시하였다고 평가하였다. 특히 속력 개념의 형성이 전조작기의 생성기에서 형성되어 형식적 조작기의 완성기에 걸쳐 형성된다고 하였으며, 이는 우리 나라 학제와 비교하면 초등학교 1학년에서 발달되기 시작하여 중학교 3학년까지 걸쳐서 형성되는 것에 해당한다고 하였다.

한편 Thompson(1994)과 Lobato와 Ellis(2010)는 구성적 관점에서 학생들의 속력 개념에 대한 연구를 진행하였으며, 이를 바탕으로 Thompson(2008)은 미적분 학습에서 속력 개념이 평균변화율을 구성하는 과정에 영향을 줄 수 있음을 언

급하였다.

나. 평균속력

2015 개정 교육과정에서 평균속력에 대한 도입 내용을 살펴보면, 초등학교 6학년 과학 과목 <물체의 운동>영역의 성취기준은,

> [6과07-01] 일상생활에서 물체의 운동을 관찰하여 속력을 정성적으로 비교할 수 있다.
> [6과07-02] 물체의 이동 거리와 걸린 시간을 조사하여 속력을 구할 수 있다.
> [6과07-03] 일상생활에서 속력과 관련된 안전 사항과 안전장치의 예를 찾아 발표할 수 있다.

으로 되어있는데. 이때 [6과07-02]의 '이동 거리와 시간을 조사하여 속력을 구하는 과정'에서 학생들은 '거리=시간×속력'의 관계식을 처음 접하게 되는 것으로 보인다. 이후 중학교 1학년 <II 문자와 식> 영역에서는 일차방정식의 활용에서 '거리'에 관한 문제해결에서 총 거리를 총 시간으로 나누어 속력을 구하는 문장제 문제가 제시되며, 여기서 '속력'의 의미는 평균속력이 되지만 교육과정에서 표현될 때는 이러한 구분 없이 '속력'으로 지도되고 있다. 다음으로 고등학교 교육과정에서는 미적분 학습에서 미분의 도입부에 해당하는 평균변화율에 대한 실생활 응용으로 평균속도가 도입되며, 주로 시간과 거리의 함수에서 구간에서의 변화를 표현하는 양으로 사용된다. 그러나 교육과정의 방식은 평균변화율의 대수적으로 표현에 대입하여 평균속력의 값을 구하는 것에 목표를 두고 있으며, 구간별 평균속력의 크기를 비교하는 활동에 대한 의미는 부각되지 않고 있다. 즉, 평균속력을 '변화를 인식하기 위한 도구'로 소개하기 보다는 평균속력의 값을 구하는 개념 확인 문제로 이용하고 있다.

이에 대하여 이동근, 문민정, 신재홍(2015)은 학생들이 변화의 정도를 변화의 세기(Intensity)로 인식하는 것에 어려움을 겪는다는 점을 지적하고 교육과정에서 평균변화율을 변화의 양으로 도입하는 것이 학생들에게 자연스러운지에 대한 고민이 필요하다고 하였다. 한편 평균변화율과 평균속력은 개념적으로 유사한 용어이지만, 평균변화율이라는 용어가 고등학교에서 처음 소개되는 용어인 반면 평균속력은 일상에서도 사용 빈도가 높은 용어이기 때문에 상대적으로 학생들에게 익숙한 용어로 판단된다. 이에 대하여 본 연구에서는 평균변화율 보다는 학생들에게 익숙한 평균속력을 소재로 학생들의 평균변화율에 대한 인식을 살펴볼 것이다.

3. 시간, 거리, 속력의 관계에 대한 인식

시간, 거리, 속력의 관계에 대한 인식에서 속력함수의 그래프 아래 넓이를 거리로 인식한 경우와 속력함수에서 거리를 그래프 아래의 넓이로 인식하는 경우가 발견된다. 우선 Oresme는 14세기 중반에 속력함수에서 그래프 아래의 넓이를 이용하여 등가속도 운동을 하는 물체의 이동거리를 계산하였는데 이는 평면 도형의 넓이를 이용하여 물리적인 양을 나타낸 것으로 볼 수 있다(Boyer, 1959, p. 94). Oresme뿐만 아니라 Toeplitz와 Medvedev도 등가속도 운동의 속도 그래프 아래 넓이와 거리의 관계에 대한 것에 관심을 보였으며, 이에 대한 이해가 미적분 학습에 중요함을 언급하였다(정연준, 이경화, 2009). 반면 Newton의 경우도 속력함수에서 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계를 파악했으나, Oresme 등과는 다른 관점에서 이해하였는데, Newton의 경우는 속도와 위치 사이의 관계를 함수의 조작을 통해서 다루는 것을 발견하였고 이를 이용하

여 넓이를 계산하는 방법을 제시하였다. 이때 Newton은 Oresme가 넓이 계산을 이용하여 거리를 구한 것과는 달리 거리 계산을 이용하여 넓이를 계산하였다(정연준, 이경화, 2009). 본 연구에서는 역사발생과정에서 속력함수에서의 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계에 대한 논의가 있었다는 점이 의미가 있으며, 이러한 역사발생과정에 대한 지식은 교수실험에서 학생들을 관찰할 때 중요한 참고자료가 될 수 있다.

한편 신은주(2006)의 연구와 정연준과 이경화(2009)의 경우 속력함수에서 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계에 대한 학생들의 이해를 연구하였는데, 이들 연구와 같이 학생들을 대상으로 속력함수에서 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계에 대한 인식을 조사하는 연구는 추후 미적분 학습 모델 설정의 근거가 될 수 있으므로, 다양한 연구 결과의 축적이라는 점에서 의미가 있다.

거리함수에서 시간, 거리, 속력의 관계는 속력함수에서의 그것과 차이점이 발견된다. 수학과 교육과정(2009 개정 교육과정)에서는 초등학교와 중학교에서 내포량으로서의 속력을 '속력=거리/시간'으로 도입한 이후, 고등학교에서는 거리함수의 그래프에서 구간의 양 끝점에 해당하는 그래프 위의 두 점을 이어서 생기는 직선의 기울기로 속력(평균속력)을 소개한다. 교육과정에서 거리함수의 구간에서 변화의 세기(Intensity)를 기울기의 크기로 설명할 때, 구간에서 그래프 위의 두 점을 잇는 직선으로 기울기의 표상을 제시하는데 이는 학생을 대상으로 확인이 필요한 부분이다. 이동근 외(2015)의 경우는 거리함수에서 구간의 양 끝점을 잇는 직선의 기울기로 인식하여 시간과 평균속도의 함수를 새로 구성하는 과정을 드러내었는데, 이 경우도 거리함수에서 속도와 기울기를 연관 지어 살펴본 것이기는 하지만 학생들이 구간에서의 변화의 세기에 해당하는 기울기의 양을 구간에서 일정한 값을 갖는 계단형 함수의 형태로 구성하였다는 특징이 있다. 즉, 학생들이 단순히 평균속력 개념을 구간에서 상수함수의 그래프에 해당하는 계단형태의 표상으로 표현한 것은 평균속력이라는 용어에서 '일정한 값'이라는 의미를 부여한 것으로 보인다. 한편 본 연구에서는 시간, 거리, 속력의 관계를 중심으로 동일한 물체의 운동을 함수로 표현한 거리함수와 속력함수의 관계성에 대한 인식과정에서 거리와 속력의 관계에 대한 인식과 표현의 변화 과정이 어떠한지에 대하여 관심을 갖고 살펴볼 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 교수 실험

교수실험의 목적은 학습자가 수학개념을 구성해가는 활동에 대한 지속가능한 모델을 확립하는 것으로서, 연구자는 학습자가 특정 수학개념을 어떻게 구성해가는 지에 대하여 추론할 수 있도록 상황을 제시하고 관찰하면서 다음 과제를 준비하는 과정을 반복하게 된다. 교수실험에서는 관습적인 관점에서의 수업이나 교육과정에 얽매일 필요는 없지만, 학습자에게 제시되는 상황 대부분은 기존 교육과정에 있는 내용인 경우가 많다. 이는 연구자의 학습자에 대한 학습모델을 설정할 때 선행 연구결과를 포함한 모든 자료가 유용한 자료로 이용될 수 있기 때문이다. 그러나 교수실험에서 중요한 것은 '과제에 대한 학생의 답'이 아니라 '과제에 대하여 해당 내용에 대한 학습 경험이 없는 학생들을 대상으로 그들이 개별적으로 접근해가는 그들만의 방식에 대하여 관찰하는 것'이다. 교수실험 과정은 고정되고 미리 예견된 계획에 의하여 진행된다기보다는 연구자가 실험 참여 학생과의 대화나 행동

방식에 의하여 단계적으로 개발되며, 매 차시 실험 종료 이후 연구자들 사이의 논의를 통하여 모두 동의하는 과정 이후 다음 실험이 진행되게 된다. 즉, 교수실험은 피 실험자의 반응과 연구자들 간의 일치된 합의 과정에 따른 다음 과제의 투입이 반복적으로 이루어지면서 진행된다 (Glasersfeld, 1995, p. 46).

교수실험 진행을 위한 초기 과제는 연구자들의 사전 협의를 통하여 구성하였으며, 이후 과제는 교수실험 진행에 대한 분석과정을 거쳐서 매 차시 이후 연구자들의 협의를 거쳐 구성되었다. 교수실험 진행은 학생들 간의 의사소통을 중심으로 진행하되 연구자들의 판단 하에 적절한 수준에서 개입하여 발문을 제시하는 방식으로 진행하였다. 또한 매 차시 종료 이후 연구자들은 이전 차시에서 보인 학생들의 사고와 행동의 의미를 공동으로 분석하고 상호 합의에 근거하여 다음 교수실험을 설계하였다. 연구자 1명(교직경력 15년차)은 교수실험 진행을 담당하였으며, 교수실험의 완성도를 높이고 진행자가 실수하는 부분에 대한 보완과 방향성을 제시하기 위하여 3명의 다른 연구자들이 관찰자로 참여하였다.[2]

본 연구에서 교수 실험은 총 9차시로 구성되었고, 참여 고등학생 세 명을 대상으로 1학년 1학기 중간고사 이후인 5월 중순부터 시작하여 9월 말경까지 약 네 달간 진행하였다. 교수실험의 흐름은 [그림 III-1][3]과 같이 진행되었으며, 본 연구에서는 교수실험에 참여한 세 명의 학생들이 전체 교수실험 중 일부 차시의 실험 자료를 분석하여 1) 거리함수와 속력함수에서 학생들의 거리와 속력의 관계에 대한 인식과 표현을 살펴보고 2) 평균속력에 대한 인식 이후 동일한 운동

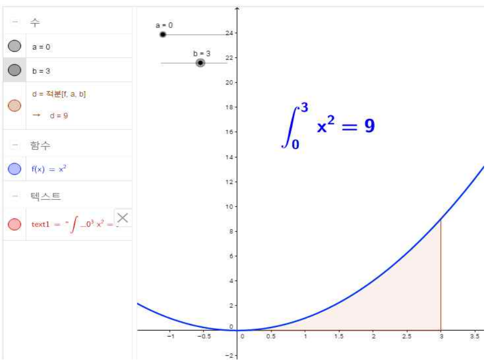
[그림 III-1] 교수실험 진행 흐름

2) 여기서 교수 실험을 진행한 수학교사는 제 1저자를 의미하며, 관찰자로 참여한 연구자는 각각 교신저자와 공동저자들을 의미한다.

3) [그림 III-1]에서 음영 부분은 학생들의 인식의 변화를 관찰한 부분이며, 음영이 없는 부분은 교수실험에서 제시한 과제이다.

에 대한 거리함수와 속력함수의 관계성에 대한 인식의 변화 과정에 대하여 살펴볼 것이다.

이때 아직 적분을 학습한 적이 없는 학생들을 고려하여 [그림 III-2]와 같이 탐구형 소프트웨어(Geogebra)를 이용하여 $f(t)=t^2$의 구간 $[a,b]$에서의 시점과 종점에 해당하는 a,b의 값을 학생들이 각각 입력하기만 하면 해당 영역의 넓이(즉, $\int_a^b t^2 dt$의 값)을 구할 수 있도록 준비하였다. 단, 학생들에게는 $\int_a^b t^2 dt$와 같은 기호는 무시하라고 했으며, a,b의 값을 조정할 수 있는 슬라이더(slider) 기능(실제 활동에서는 a,b의 조정 범위는 각각 0에서 200까지로 확장해서 진행)과 그에 따른 값의 의미가 해당 영역의 넓이가 된다는 것만을 설명해주었다. 이러한 방식은 현 교육과정에서도 사용하는 방식으로서, 통계단원에서 적분학습 이전에 정규분포곡선의 아래 부분의 넓이가 확률이 된다는 것을 정의한 이후 구간 $[a,b]$에서의 정규분포 곡선과 x축 사이의 넓이를 적분을 통하여 구하지 않고 $x=a$와 $x=b$ 사이의 정규분포 곡선과 x축 사이의 넓이를 정규분포 표를 이용하여 구하는 것과 유사한 방식이다.



[그림 III-2] $\int_a^b t^2 dt$의 값을 계산할 수 있는 탐구형 소프트웨어의 예시 화면

2. 연구 대상자의 특성과 과제 분석

본 연구에 참여한 세 명의 학생들은 서울 소재 일반계 고등학교 1학년 학생으로서 영찬의 경우는 전국연합모의고사 수학영역에서 1등급이었고, 호윤은 2등급, 준호는 4등급[4])이었다. 세 명의 학생들은 교수실험을 진행한 연구자의 학급 학생들로서, 연구자의 판단에 평소 수업에서 학생들 중에서 자신의 의견에 대하여 잘 설명할 수 있고 지필고사 수학 영역 등급이 서로 상이한 학생들이다. 이러한 의도적인 표본선정은 질적 연구에서 연구자들이 많은 정보를 획득할 수 있다는 장점이 있다(이동근 외, 2016). 선행학습의 정도를 파악하기 위하여 사전면담을 실시하였는데, 세 명의 학생 모두 1학년 1학기 내용 중 기말고사 범위에 해당하는 고차방정식(삼차방정식, 사차방정식)과 도형의 방정식 일부에 대한 사전 학습 경험이 있었고, 실험이 진행되면서 여름방학 전후의 시기에는 고등학교 1학년 수학 I 과목과 수학 II 과목에 대한 학습이 일부 교육과정 범위 보다 앞서 이루어졌으나, 교사가 학생들에게 미분 관련 학습 용어(평균변화율, 순간변화율, 연속, 미분계수, 접선, 도함수)를 들어보았는지 확인하는 물음에 대하여 학생들은 들어본 적이 없다고 답하였다. 이러한 사전면담 과정을 근거로 미루어볼 때, 학생들이 미적분 학습 관련 지식은 없는 것으로 판단되었다. 다만 평균속력이라는 용어에 대하여는 세 학생 모두 중학교에서 들어본 경험이 있다(순간속도는 들어본 경험이 없다)고 답하였으나, 대수적으로 평균속도를 표현하지는 못하는 것을 확인하였다.

또한 실험대상 학생들은 이차 이상의 함수에 대한 학습경험은 없는 것으로 판단하였다. 일부 $y=x^3$의 그래프의 개형을 접해본 경험은 있을 수도 있지만, 두 연속적인 변수의 변화 관계를

4) 영찬, 준호, 호윤은 연구에 참여한 세 명의 학생을 지칭하는 가명이다.

파악하는 상황에서 학생 스스로 $y=x^3$를 구성하여 그래프를 그려본 경험은 없는 것으로 파악하였다. 한편 시간, 거리, 속력의 관계의 인식은 연속적인 변화에 대한 관찰에서 시작되므로 학생들이 연속적인 변화를 어떻게 인식하는 지에 대한 사전 조사가 필요하였다. 사전검사에서 학생들이 $y=x^2$의 역함수에 해당하는 $y=\sqrt{x}$의 그래프에서 함수의 변화를 서로 다르게 인식하고 표현하는 것이 다음과 같이 관찰되었다.

1) 영찬은 정의역의 원소를 x축 방향으로 증가시켜가면서 그래프 위에 점$(x,\sqrt{x})$을 찍은 다음 원점과 그 점을 이어서 해당 직선의 기울기가 감소한다는 표현을 하였다.

2) 준호도 정의역의 원소를 x축 방향으로 증가시켜가면서 그래프 위에 점$(x,\sqrt{x})$을 찍었으나 이후 이웃하는 점들끼리 선분으로 연결하여 그 선분들의 기울기가 감소한다는 표현을 사용하였다.

3) 호윤의 경우는 정의역의 임의의 원소에 대하여 점$(x,\sqrt{x})$을 그래프 위에 표현한 다음 그 점에 접하는 접선의 기울기가 감소하는 것으로 함수의 변화를 표현하였다.

Castilo(2012)에서 연속적인 변화에 대한 추론 방식으로 덩어리추론과 연속추론을 제시하였는데, 사전검사에서 $y=\sqrt{x}$의 변화를 인식하는 세 학생 중 영찬과 준호의 경우는 구간의 양 끝점을 이어서 변화를 표현하는 과정에서 내부의 변화를 고려하지 않은 것으로 보이며 이는 덩어리적으로 추론한 것으로 볼 수 있다. 반면에 호윤의 경우는 점마다의 변화를 표현하고 있으므로 연속적으로 추론한 것으로 볼 수 있다.

분석에 활용한 수업 과제에 대한 분석은 <표 III-1>과 같이 총 9차시의 교수실험 중 7개의 과제에 대하여 정리하였다.

3. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구는 전체 교수실험 중 논의와 관련된 자료를 집중적으로 분석한 것으로서, 비디오카메라 1대로 실험대상 학생 세 명에 대한 수학적 활동을 촬영하였으며, 추가적으로 학생들의 표정 변화를 관찰할 수 있는 비디오카메라 1대로 수업을 촬영하였다. 이 외에도 별도로 녹음된 오디오자료 전사과정을 통하여 분석 작업을 진행하였다.

또한 교수실험 과정에서 학생들이 작성한 활동지와 연구자들이 작성한 현장노트 및 다음 교수실험 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의일지를 수합하여 교수실험 과정 중 일어나는 교수학적 결정 과정과 변화의 양상을 살펴보고, 이러한 자료들을 기초로 교수실험 중 발생했던 수정과 재구성의 이유를 'Ⅳ. 결과분석' 부분에 함께 기술하였다.

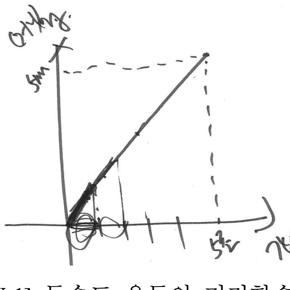
<표 III-1> 교수실험 과제

수업차시(일자)	과제번호	과제에 제시된 내용
1(2016.05.24.)	과제2	시간과 거리의 함수가 $y=\sqrt{x}$일 때 학생들의 변화에 대한 인식과 표현
6(2016.06.21.)	[그림Ⅳ-1]	등속도 운동에서 거리함수 $y=x$에 대한 거리. 시간. 속력에 대한 인식과 표현
	[그림Ⅳ-2]	속도가 변하는 운동의 거리함수에 대한 거리. 시간. 속력에 대한 인식과 표현
	[그림Ⅳ-3]	등속도 운동에서 속력함수 $y=5$에 대한 거리. 시간. 속력에 대한 인식과 표현
	[그림Ⅳ-4]	등가속도 운동에서 속력함수 $y=x$에 대한 거리. 시간. 속력에 대한 인식과 표현
	과제4	등가속도 운동의 속력함수 $y=x$에서 거리함수를 구성하는 과제
7(2016.07.19.)	과제1	속력함수 $y=x^2$에서 거리함수를 구성하는 과제

Ⅳ. 연구결과

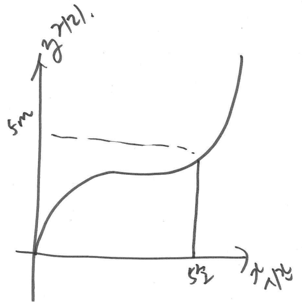
1. 거리함수와 속력함수에서의 거리와 속력에 대한 준호와 영찬의 인식과 표현

교사가 학생들에게 시간, 거리, 속력이 서로 어떠한 관계를 맺고 있는지를 물었을 때, 학생들은 ‘거, 속, 시’라는 표현을 이용하여 세 연속변수 사이의 관계를 답하였다. 학생들이 표현한 ‘거, 속, 시’는 초등학교와 중학교 과정에서 학습한 ‘거리=시간×속력’ 혹은 ‘속력=거리/시간’의 관계를 동시에 표현할 수 있는 학생들만의 표현으로 보인다. 학생들이 시간, 거리, 속력의 관계를 언급함에 따라 연구자들은 [그림 IV-1]과 같은 등속도 운동을 하는 물체의 거리함수 $y=x$ 를 제시하고 학생들이 표현한 ‘거, 속, 시’로 설명해보라고 하였다. 그러자 학생들은 시간이 1일 때 거리가 1이므로 속력은 거리/시간을 계산해서 1이고, 시간이 2일 때 거리가 2이므로 역시 속력은 1이 된다고 답하였다.



[그림 IV-1] 등속도 운동의 거리함수 $y=x$의 그래프

학생들이 등속도 운동에 대한 거리함수에서 자신들의 표현한 ‘거, 속, 시’로 과제 상황을 설명한 것을 확인한 다음 연구자들은 ‘거, 속, 시’의 관계로 설명하기 곤란할 것으로 예상되는 과제를 제시하여 학생들의 시간, 거리, 속력의 관계에 대하여 살펴보기로 하였다. 학생들에게 새롭게 제시한 거리함수는 이전 거리함수와 마찬가지로 5초에서 대응되는 거리가 5m이지만, 전체적인 그래프의 모양은 대수식으로 표현이 어려운 그래프([그림 IV-2])였다.

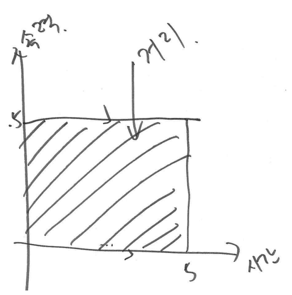


[그림 IV-2] 속도가 변하는 운동의 거리함수의 그래프

이에 대하여 준호는 ‘속력이 일정하지 않아요.’라고 답을 하면서 ‘거, 속, 시’의 관계를 적용하여 상황을 표현하기 어렵다는 의사를 표현하였고, 영찬은 ‘속력이 일정한 그래프 밖에 안 나왔어요. 만약에 속력이 바뀌는 것이 있었다면 어느 구간에서는 이 속력으로 다녔고 어느 구간에서는 이 속력으로...’라고 답을 하였다. 영찬이 답을 한 직후 교사는 ‘직선으로?’라고 물었고 영찬은 ‘네’라고 답을 하였는데, 교사가 ‘직선으로?’라고 물은 이유는 앞서 준호의 ‘속력이 일정하지 않아요.’와 같은 표현에 대하여, 학생들의 ‘속력이 일정하다는 것’에 대한 ‘표상’은 무엇인지 확인하기 위한 절차로 볼 수 있다. 즉 영찬과 준호의 반응에서 연구자들은 학생들이 단순히 그래프의 모양이 직선일 경우 속력이 일정하다고 생각하는 것은 아닌지 확인할 필요가 있다고 판단하였다. 등속도 운동과 등가속도 운동의 속력함수의 경우는 두 경우 모두 직선으로 표현되지만 등가속도 운동의 경우는 속력이 일정한 운동은 아니기 때문이다.

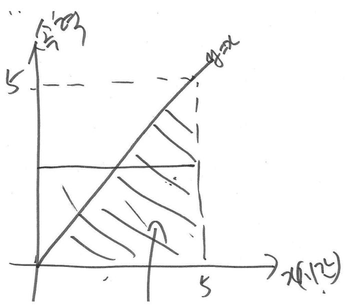
이에 따라 교사는 학생들에게 그래프의 모양이 직선으로 표현되어있는 속력함수를 학생들에

게 제시하고 학생들의 시간, 거리, 속력의 관계를 살펴보기로 하였다. 우선 [그림 IV-3]과 같이 등속도 운동을 나타내는 속력함수 $y=5$의 그래프를 학생들에게 제시한 다음, 학생들에게 '속력이 이렇게 직선이야. 직선이야. 여기(x축과) 평행해. 그러면 시간과 속력에서는 무엇을 구하는 거야?'라고 물었다. 이에 대하여 준호는 '5초 동안 간 거리'라고 답을 하였다. 연구자들은 이 과제에 대한 준호의 반응에서, 준호가 그래프 아래의 넓이가 거리라는 것을 알고 있어도 보일 수 있는 반응이고, '거, 속, 시'를 적용했을 때도 보일 수 있는 반응이라 판단하였다.



[그림 IV-3] 등속도 운동의 속력함수 $y=5$의 그래프

그러나 [그림 IV-4]와 같은 등가속도 운동에 해당하는 속력함수 $y=x$를 제시하고 동일하게 시간, 거리, 속력의 관계를 물었을 때도, 영찬과 달리 준호는 그래프 아래의 넓이를 거리로 인식하고 있었다.



[그림 IV-4] 등가속도 운동의 속력함수 $y=x$의 그래프

이 과제 상황에서 영찬은 '이건 속력이 일정하게 변한 것이에요.'라고 답을 하였다. 이는 주어진 속력함수의 그래프에서 '거, 속, 시'를 이용하여 관계를 설명하는 것이 가능하다고 표현하는 것으로 보였다. 그러나 영찬은 그래프 아래의 넓이가 거리인지 확인하는 교사의 물음에 대하여는 '잘 모르겠어요. 잠시만요.'라며 주저하는 모습을 보인 반면, 준호의 경우는 '일정하게 이 기울기만큼 일정하게 증가했을 때 간 거리가 이 삼각형이에요.'라고 답을 하였다. 이에 대하여 연구자들은 영찬의 경우는 속력이 일정하거나 일정하게 변한다는 조건에서 '거, 속, 시'의 관계로 시간, 거리, 속력의 관계를 인식하는 것으로 보았지만, 준호의 경우는 영찬과 달리 '거, 속, 시'의 관계 외에도 속력함수에서 그래프의 모양이 직선일 때 그래프 아래의 넓이가 거리라는 것을 인식하는 것으로 판단하였다.

학생들이 거리함수와 속력함수에서의 그래프가 직선 형태일 때 시간, 거리, 속력의 관계를 인식하는 것이 관찰됨에 따라 연구자들은 동일한 물체의 운동에 대하여 다르게 표현된 속력함수와 거리함수를 이용하여 실험을 진행하였다. 연구자들은 이 과정에서 학생들의 시간, 거리, 속력의 관계에 대한 인식의 변화가 발생하는지 확인할 목적으로, [그림 IV-4]와 같이 속력함수가 $y=x$일 때의 그래프에서 거리함수를 구해보라는 과제를 학생들에게 제시하였다.

2. 속력함수 $y=x$에서 거리함수의 구성 과정

가. 속력함수 $y=x$에서 거리함수의 구성 과정에서 시간, 거리, 속력의 관계에 대한 인식과 표현

수학적으로는 속력함수 $y=x$일 때 거리함수

는 $y=\frac{x^2}{2}$가 되어야하는데, 이 경우 속력함수의 그래프는 직선 형태인 반면, 거리함수의 그래프 모양은 직선이 아니다. 이러한 상황에서 연구자들은 학생들이 [그림 Ⅳ-4]와 같은 속력함수 $y=x$에서 거리함수를 어떻게 구성하는 지 살펴보고, 그 이후 직선 형태가 아닌 거리함수에 대하여 시간, 거리, 속력의 관계에 대한 인식이 어떠한지를 살펴보았다.

호윤과 영찬은 속력함수 $y=x$에서 거리함수가 $y=x^2$이 된다고 주장하였는데, 그 이유에 대하여 호윤은 '시간이 1일 때 속력이 1이고 시간이 2일 때 속력이 2잖아요. 그러려면 대입하면 시간이 1일 때 속력이 1이려면 거리가 1이고 시간이 2일 때 속력이 2이려면 거리가 4여야 하잖아요.'라고 답을 하였다. 호윤이 '대입하면'이라고 표현한 것은 '거, 속, 시'의 관계 중에서 '거리=시간×속력'을 뜻하는 것으로 생각되며, 속력함수를 만족하는 시간과 속력의 값을 대입하여 거리를 구한 것으로 보였다. 몇 개의 값을 대입하여 일반화한 것에 대한 문제점을 지적하기 위하여 교사가 규칙을 식으로 표현한 결과가 $y=2x$일수도 있지 않느냐고 묻자, 호윤은 시간이 3초일 때는 거리가 9가 되어야한다는 논리로 $y=x^2$이 옳다고 주장하였으며, 호윤의 주장에 대하여 준호도 '저도 그럴 것 같아요.'라고 동의를 하였다. 다음의 [대화1]은 속력함수 $y=x$에서 학생들이 거리함수를 구성하는 과정에서 교사와 학생들의 대화이다.

대화1

교사 - ([그림 Ⅳ-4]에서) 이걸로 시간과 거리의 함수를 그릴 수 있어요? 한번 해봐요.

호윤 - $y=x^2$인 것 같아요.

영찬 - 저도 그런 것 같아요.

교사 - 왜 $y=x^2$이야?

호윤 - 시간이 1일 때 속력이 1이고, 시간이 2일 때 속력이 2잖아요. 그러려면 대입하면 시간이 1일 때 속력이 1이려면 거리가 1이고, 시간이 2일 때 속력이 2이려면 거리가 4여야 하잖아요.

교사 - $y=2x$일수도 있지?

호윤 - 시간이 3일 때 속력이 3이려면 거리가 9여야 하잖아요.

준호 - 저도 그럴 것 같아요.

이상의 과정에서 속력함수 $y=x$에서 거리함수를 구성할 때, 세 명의 학생 모두 '거리=시간×속력'의 관계를 이용하여 거리함수를 $y=x^2$로 제시하였다. 여기서 학생들은 자신들이 제시한 거리함수가 직선 형태가 아니라는 것을 인식하지는 못한 것으로 보인다. 즉, 이전 학생들의 활동을 분석해보면 거리함수 $y=x^2$은 속도가 변하는 상황이므로 학생들은 해당함수에서 '거, 속, 시' 관계를 적용할 수 없다고 답하였는데, 속력함수 $y=x$에서는 '거, 속, 시'의 관계를 적용하여 거리함수 $y=x^2$을 구성하였다. 물리적으로 동일한 상황임에도 거리함수에서는 '거, 속, 시'의 관계를 적용하지 못하고 속력함수에서는 '거, 속, 시' 관계를 적용한 것에 대한 문제의식이 학생들에게서 발견되지는 않았다. 또한 학생들은 이전에 속력함수의 그래프 아래 부분의 넓이가 거리라고 답하였는데, 그러한 인식과 자신들이 제시한 거리함수 $y=x^2$의 결과가 서로 일치하는지에 대한 고민도 없는 것으로 보였다.

나. 속력함수 $y=x$에서 거리함수의 구성 과정에서 평균속력에 대한 인식과 표현

연구자들은 속력함수 $y=x$에서 학생들이 '거리=시간×속력'의 관계를 이용하여 거리함수를 구한 결과와 이전에 속력함수의 그래프 아래의 넓이를 거리로 인식했었던 것을 학생들이 연결하여 고민하도록 기회를 제공하기로 하였다. 이

를 위하여 속력함수 $y=x$의 그래프 아래의 넓이와 같은 직사각형의 높이가 얼마인지 물어보았다. 이때 속력함수의 그래프가 직선 형태이므로 구간 $[0,5]$에서 그래프 아래의 넓이는 삼각형의 넓이를 구하는 방식으로 쉽게 구할 수 있으며, 해당 구간의 길이를 직사각형의 밑변으로 할 경우 직사각형의 높이 역시 학생들이 쉽게 구할 수 있는 과제이다. 학생들도 $\frac{1}{2}\times 5\times 5=5x$의 식을 이용하여 직사각형의 높이가 2.5라고 답을 하였다.

여기서 교사는 학생들이 답한 2.5의 의미가 무엇인지를 물어보았고, 호윤이 '0초에서 5초 사이의 속력의 평균'이라고 답을 하였다. 호윤의 반응은 학생들의 '거, 속, 시' 관계에서 사용된 속력 개념에 대한 변화가 시작되는 부분이어서, 연구자들은 호윤에게 그 이유를 확인할 필요가 있다고 판단하였다. 호윤에게 '좀 더 논리적인 설명이 필요할 것 같은데?'라고 교사가 설명을 요구하자, 호윤은 '속력이 변하잖아요. 무한한 속력들을 다 더해서 그걸 나눠주면 2.5가 나올 것 같아요.'라고 자신의 견해를 밝혔다. 호윤의 답변을 들은 준호도 '구간으로 나누면 되겠네.'라고 이어서 답을 하였는데, 이는 호윤의 설명이 다른 학생에게도 설득력 있게 전달 된 것으로 보인다. 다음 [대화 2]는 호윤의 평균속력 인식 과정에서 교사와의 대화를 기술한 것이다.

[대화2]

교사 - 여기서 이 넓이와 같은 사각형의 높이가 있을 거 아니야? 그건 얼마야?

준호 - 여기서요?

교사 - 응 여기서

준호 - 2.5요

교사 - 그 2.5는 뭘 의미할까?

호윤 - 0초에서 5초사이의 속력의 평균

교사 - 속력의 평균이라고?

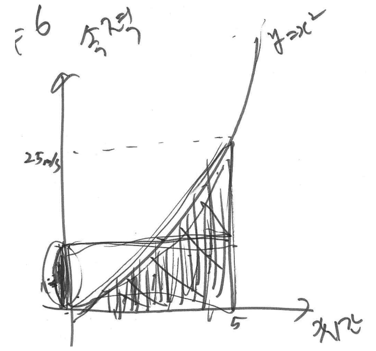
⋮

교사 - 좀 더 논리적인 설명이 필요할 것 같은데 우리에게는... 속력 곱하기 시간이 거리라고? 평균속력? 평균속력의 의미는 뭐야? 계속 그걸로 달린다는 건가?

호윤 - 속력이 변하잖아요. 무한한 속력들을 다 더해서 그걸 나눠주면 2.5가 나올 것 같아요.

준호 - 구간으로 나누면 되지 않아?

교사는 호윤이 구간 $[0,5]$에서 속력함수 $y=x$의 그래프 아래 부분의 넓이와 동일 구간의 길이를 밑변으로 가지면서 같은 넓이를 갖는 직사각형의 높이를 평균속력으로 언급함에 따라 속력함수가 [그림 IV-5]와 같이 $y=x^2$일 때도 그래프 아래의 넓이가 거리가 되는지를 물어보았다.



[그림 IV-5] 속력함수 $y=x^2$의 그래프와 평균속력에 대한 인식

이에 대하여 준호와 호윤은 '거리로 생각한다.'고 답을 하였고, 영찬의 경우도 '저는 평균으로 하는 것이 옳다면 거리라고 생각해요.'라고 부분적 동의를 하였다. 즉, 학생들은 속력함수 $y=x$에서 거리함수를 구성하는 과정에서 평균속력에 대한 인식을 하였고 이후 속력함수에서 속력의 변화가 직선 형태가 아니어도 속력함수의 그래프 아래 부분이 거리라는 것을 인식하는 것으로 변화가 있었다. 이는 학생들의 '거, 속, 시'의 관계에서 속력에 대한 개념이 '속력함수의 구간 $[0,5]$에서 그래프 아래 부분의 넓이와 동일

한 직사각형의 높이'라는 평균속력 개념으로 바뀌면서 이전과 달리 '속력이 변하는 운동의 속력함수에서도 그래프 아래의 부분을 거리'로 인식하는 것으로 변하는 과정을 보여준다는 점에서 의미가 있다.

3. 속력함수 $y=x^2$에서 거리함수의 구성 과정에서 시간, 거리, 속력의 관계에 대한 인식과 표현

연구자들은 학생들이 [그림 IV-5]와 같이 속력이 일정하지 않은 경우에도 속력함수의 그래프에서 그래프 아래의 넓이를 거리로 인식하는 것을 확인하고 나서, 이를 근거로 이전에 학생들이 빈번하게 사용하는 '거, 속, 시'의 관계와 결과를 비교하는 과정을 제시하여 학생들의 반응을 살펴보기로 하였다. 이에 교사는 학생들에게 속력함수 $y=x^2$에서 거리함수를 구성하도록 과제를 제시하였고, 이 과정에서 학생들이 구간에서 $y=x^2$의 그래프 아래 부분의 넓이를 알아야 할 필요가 제기되었다. 연구자들은 학생들의 요구에 따라 탐구형 소프트웨어를 제공하여 $y=x^2$의 그래프 아래 넓이를 학생들이 확인할 수 있도록 하였다. 즉, 학생들은 $y=x^2$의 그래프 아래 부분의 넓이를 구하는 방법은 모르지만 그 값을 구할 수는 있는 상태였다.

학생들은 두 가지 방법으로 속력함수 $y=x^2$에서의 거리를 구하였는데, 1) 탐구형 소프트웨어를 이용하여 그래프 아래의 넓이를 직접 구하는 방법과 2) '거리=시간×속력'의 관계를 이용하여 구하는 방법으로 구하였다. 호윤의 '거리=시간×속력'의 관계를 이용하여 구간 $[0,k]$에서 거리를 구하는 방법을 살펴보면, 시간이 k이고 속력함수 $y=x^2$에서 속력이 k^2이 되므로 거리는 k^3이 된다는 방식이었다. 이는 이전에 학생들이 속력함수 $y=x$에서 거리함수를 $y=x^2$라고 구성하는 과정에서 이용된 방법과 동일한 방식으로 볼 수 있다.

교사는 속력함수 $y=x^2$에서 2초일 때$(x=2)$의 거리를 학생들에게 확인하였는데, 학생들은 탐구형 소프트웨어를 이용하여 구한 결과는 $2.67\left(=\frac{8}{3}\right)$이었고, '거리=시간×속력'의 관계를 이용하여 얻은 결과는 8로 나와서 서로 상이한 결과가 나온 다는 것을 확인하였다. 동일한 값이 아니라 서로 다른 값이 나온 것에 대하여 학생들은 당황해하면서, 학생들은 교사에게 여러 가지 질문을 하였다. 이 과정에서 준호의 경우는 탐구형 소프트웨어의 원리가 무엇인지 질문을 하였다면, 호윤의 경우는 탐구형 소프트웨어의 결과가 옳은 것 같다는 전제 하에 '거리=시간×속력'의 문제점이 무엇인지 고민하는 차이를 보였다.

학생들이 고민을 하는 과정에서 준호는 교사에게 $y=x^2$에서 함숫값의 의미가 평균속력인지를 물어보았는데, 이에 대하여 교사는 학생들의 활동 과정을 상기시키면서 '우리가 알고 있는 평균속력은 속력함수에서 그래프 아래의 넓이를 알 때 구할 수 있는 값이지.'라고 답을 하였다. 즉, 2초 까지의 평균속력은 만약 속력함수의 그래프 아래의 넓이가 2.67이라면 그 값을 2로 나누어준 1.335가 된다는 것을 상기시켜주었다. 교사와 준호의 대화 도중에 영찬이도 대화에 참여하면서 '평균속력은 4보다 작아야하니까 2초일 때의 함숫값 4는 속력'이라고 의견을 제시하였다. 영찬의 표현은 속력의 의미가 무엇인지 밝힌 것은 아니지만 함숫값 4가 평균속력은 아니라는 것을 인식한 것으로 보인다.

반면 호윤의 경우는 영찬이의 답변 이후 '2초일 때의 속력이 4에요.'라고 답을 하였다. 교사가 '딱 2초일 때의 속력?'이라고 묻자 호윤은 '네'라고 하

였고, 이어서 '거리=시간×속력'의 관계에서 거리를 구하는 방식의 문제점을 지적하였다. 호윤은 '속력이 4고 시간이 2초라는 건 2초 동안 속력이 4로 쭉 같다는 거잖아요. 2초일 때만 속력이 4가 아니라... 그래서 틀린 것 같아요..'라고 말하였다. 여기서 호윤이 '2초일 때의 속력이 4'라고 한 점은 사전검사에서 함수의 변화를 한 점에서의 기울기로 인식하였던 점을 고려할 때 순간속력을 인식한 것으로 보이며, '2초 동안 속력이 4로 쭉 같다'[5]는 표현은 평균속력을 언급한 것으로 판단된다. 즉, 호윤은 '거리=시간×속력'의 관계를 이용하여 속력함수에서 거리함수를 구성한 결과가 속력함수에서 그래프 아래의 넓이와 다른 이유에 대하여, '거리=시간×속력'의 관계에서 속력을 평균속력으로 보았기 때문에 문제가 발생한 것이라고 지적하였다. 결과적으로 호윤의 시간, 거리, 속력의 관계에 대한 인식은 1) 처음에는 '거, 속, 시'의 관계로 인식하던 것에서 2) 직선으로 그래프의 형태가 나타나는 속력함수에서 그래프 아래의 넓이를 거리로 인식하는 과정을 거쳐서 3) 평균속력의 개념([그림 IV-5]에서와 같이 속력함수의 그래프 아래 부분의 넓이와 동일한 직사각형의 높이)을 인식한 이후 직선이 아닌 형태의 일반적인 속력함수에서도 그래프 아래의 넓이를 거리로 인식하게 되었으며 4) 평균속력에 대한 인식은 '거, 속, 시'의 관계에서 거리함수를 구성하는 방법의 문제점을 인식하는데 영향을 준 것으로 보인다.

V. 결론 및 제언

1. 거리함수와 속력함수에서 거리와 속력의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현

거리, 시간, 속력의 관계에 대하여 학생들은 교수실험 초기에는 자신들만의 표현인 '거, 속, 시'라는 관계에 의존하여 파악하는 모습을 보였다. 학생들의 표현에 해당하는 '거, 속, 시' 관계는 '거리=시간×속력'과 '속력=거리/시간' 중에서 어느 한쪽으로만 치우쳐져 있는 개념이라기보다는, 과제 상황에 따라 '거리=시간×속력'의 의미와 '속력=거리/시간'의 의미로 적절히 변환이 가능한 표현으로 보였다. 동시에 학생들은 거리함수와 속력함수에서 직선 형태로 구성되어있는 경우에 자신들의 '거, 속, 시' 관계로 설명할 수 있다는 반응을 보였는데, 그 이유에 대하여는 이전에 중학교에서 경험한 과제 상황이 일정한 속력 혹은 속력의 변화가 일정한 경우만을 다루었기 때문이라고 답하였다.

한편 학생들은 속력함수에서 그래프의 형태가 직선 형태로 나타나는 경우 그래프 아래의 넓이를 거리로 인식하는 것이 관찰되었으나, 이러한 인식이 이전 자신들이 가지고 있던 '거, 속, 시'의 관계와 연결 지어 어떠한 문제가 발생하는지에 대한 고민은 없는 것으로 관찰되었다. 따라서 학생들의 교수실험 초기 거리, 시간, 속력의 관계에 대한 인식은 1) 불완전한 '거, 속, 시' 관계에 대한 인식과 2) 직선 형태로 표현되는 속력함수에서 그래프 아래의 넓이가 거리라는 인식이 서로 치밀하게 연결 되지 못한 채 양립하는 것으로 보였다.

2. '속력함수에서 거리함수의 구성 과정'에서 거리와 속력의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현

5) 호윤의 평균속력에 대한 언급에서 구간에서 일정한 함숫값을 갖는다는 표현은 김채연, 신재홍(2016)에서 구간에서의 변화를 고려하지 못하고 일정한 값으로 할당하는 덩어리추론과는 다른 것으로 보아야한다. 호윤의 경우는 이전 과정에서 속력함수에서의 구간에서의 무한한 변화들의 평균으로 평균속력을 인식하였기 때문이다.

속력함수 $y=x$에서 거리함수를 구성하는 과정에서 학생들은 속력함수에서 평균속력을 구성하는 경험을 하였는데, 속력함수에서 그래프 아래의 넓이와 동일한 넓이를 가지는 직사각형(밑변의 길이는 속력함수에서의 구간의 길이)의 높이로 평균속력을 인식하였다. 특히 호윤의 경우는 사전검사에서 함수의 변화를 표현할 때, 다른 두 학생(준호, 영찬)이 구간의 변화를 양 끝점에서는 인식하지만 구간 사이의 변화는 인식하지 못하는 덩어리추론(Castilo, 2012) 방식으로 표현한 것과 달리 한 점에서 접하는 접선의 기울기로 인식하는 모습이 관찰되었었는데, 본 연구의 교수실험에서는 평균속력을 인식하는 과정에서 구간의 무수히 많은 변화들의 평균을 평균속력으로 인식하는 모습이 관찰되었다. 호윤이 인식한 평균속력은 구간에서의 변화를 연속적으로 인식한 상태에서 구간의 변화를 대표하는 양으로 구간에 값을 할당한 것으로 보이는데, 이는 이동근 외(2015)에서 학생들이 구간에서의 변화를 구간에서의 평균변화율로 할당하여 변화를 나타내는 계단형 함수를 구성하는 것과 유사한 방식으로 보인다. 이동근 외(2015)의 연구에서는 실험대상 학생들이 함수의 변화를 대응표에서 함숫값의 변화에 대한 규칙을 계차수열로 표현하여 관찰하였는데, 이는 호윤과 달리 구간 사이의 변화를 고려하지 않는 덩어리추론에 해당한다고 볼 수 있다. 즉, 함수의 변화를 인식하는 학생들의 두 가지 추론 방식(덩어리추론, 연속추론) 모두에서 구간에 평균변화율을 할당하는 모습이 관찰되었다.

한편 정연준과 이경화(2009)에서는 '거리=시간×속력'의 관계를 등속도 상황에서의 관계와 동일한 것으로 언급하였으나, 본 연구에서 실험대상 학생들은 속력의 변화가 일정한 경우에도 '거, 속, 시'의 관계를 적용 가능하다고 보았다는 점에서 차이가 있다. 즉 실험대상 학생들은 거리, 시간, 속력의 관계가 제시된 상황에서는 등속도 여부와 상관없이 기계적으로 '거리=시간×속력'를 이용하여 분석하려는 것으로 보이는데, 평균속력에 대한 인식 이전에는 자신들의 방식으로 속력함수에서 그래프 아래의 넓이가 거리라는 것을 설명하지 못한다는 것을 경험하고 나서 '거, 속, 시'의 관계로는 등속도 운동만을 설명할 수 있는 제한적인 모델로 간주하는 모습을 보였다. 그러나 평균속력에 대한 인식 이후 학생들은 속력함수가 직선 형태가 아니어도 그래프 아래의 넓이가 거리라는 것을 인식하게 되었는데, 결과적으로 이는 학생들의 '거리=시간×속력'의 관계에서 '거리=시간×평균속력'으로 인식의 변화를 가져온 것으로 볼 수 있다. 즉, 본 연구에서는 정연준과 이경화(2009)가 언급한 '거리=시간×속력'의 관계를 등속도 상황에서의 관계와 동일한 것이라는 주장에 대하여 교수실험을 통하여 '거리=시간×평균속력'으로 확장할 경우 모든 속력함수에서 거리와 속력의 관계를 설명할 수 있는 모델이 될 수 있음을 발견하였다는 것에 의미가 있다.

3. 교육적 함의 및 제언

본 연구는 거리, 시간, 속력의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현을 구성적 관점에서 교수실험을 통하여 세밀하게 관찰한 연구이다. 이 과정에서 학생들의 시간, 거리, 속력의 관계에 대한 인식의 변화를 드러내었는데, 1) 처음에는 '거, 속, 시'의 관계로 인식하던 것에서 2) 직선으로 그래프의 형태가 나타나는 속력함수에서 그래프 아래의 넓이를 거리로 인식하는 과정을 거쳐서 3) 평균속력의 개념을 인식한 이후 직선이 아닌 형태의 일반적인 속력함수에서도 그래프 아래의 넓이를 거리로 인식하게 되었으며 4) 평균속력에 대한 인식은 '거, 속, 시'의 관계에서 거리함

수를 구성하는 방법의 문제점과 '거, 속, 시' 관계를 '거리=시간×평균속력'로 확장하는 과정을 보여주었다.

한편 동일한 상황에서 다르게 표현된 속력함수와 거리함수에서 학생들의 거리, 시간, 속력의 관계에 대한 인식을 살펴보기 위하여 속력함수 $y=x$에서 거리함수를 구성하는 과정을 교수실험에서 수행하였다. 이때 거리함수에서 속력함수를 구성하는 과정도 고려할 수 있으나, 학생들의 구성과정을 따라가는 교수실험 과정에서 연구자들의 합의하에 속력함수에서 거리함수를 구성하는 것이 자연스럽다고 판단하였다. 그러나 추후 거리함수에서 속력함수를 구성하는 과정에서 학생들의 거리, 시간, 속력의 관계에 대한 인식을 조사하는 연구가 필요할 것으로 보인다.

또한 연속추론을 하는 학생도 구간에 평균변화율을 함숫값으로 할당하여 원시함수의 변화를 설명할 수 있는 새로운 함수의 구성이 가능함을 보여주었다. 본 연구는 제한된 학생을 대상으로 교수실험을 진행하였지만, 학생들의 시간, 거리, 속력의 관계에 대한 인식과 표현의 변화 과정에 대한 관찰을 통하여 여러 시사점을 제시하였다. 이러한 연구 결과가 추후 미적분 학습 모델 구성을 위한 다양한 연구의 시발점이 되기를 기대해본다.

참고문헌

교육부(2015). **과학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74 [별책 9].

권오남, 조현정(1997). 극한에 관련된 학생들의 수학적 신념에 관한 연구. **수학교육학연구. 7**(1), 211-229.

권오남, 박재희, 조경희, 박정숙, 박지현(2015). 학습자 중심의 미적분 교육과정과 교실 문화. **학습자중심교과교육연구. 15**(6), 617-642.

김연식, 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 분석. **수학교육학연구. 2**(1), 1-15.

김영식(2001). **과학혁명-전통적 관점과 새로운 관점**. 서울: 도서출판 아르케.

김채연, 신재홍(2016). 연속적으로 공변하는 두 양에 대한 추론의 차이가 문제 해결에 미치는 영향. **수학교육. 55**(3), 251-279.

김현재(1978). J. Piaget의 아동의 운동과 속력 개념에 관한 고찰. **한국과학교육학회지. 1**(1), 1-14.

김형수, 권재술(1995). 초등학교 아동들의 속력 개념 형성에서 컴퓨터 인터페이스의 활용 효과. **한국과학교육학회지. 15**(2), 164-172.

박선화(2000). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구. **수학교육학연구. 10**(2), 247-262.

신은주(2005). 등속도 운동에서 일차함수 교수-학습 과정에 관한 사례연구. **수학교육학연구. 15**(4), 419-444.

신은주(2006). 등가속도 운동에서 미적분의 기본 아이디어 학습 과정에 관한 사례연구. **수학교육학연구. 16**(1), 59-78.

이동근, 문민정, 신재홍(2015). 이차함수에서 두 변량사이의 관계 인식 및 표현의 발달 과정 분석. **수학교육. 54**(4), 299-315.

이동근, 김숙희, 안상진, 신재홍(2016). 변화율 관점에서 농도 변화에 대한 인식과 표현의 변화 과정에 대한 분석. **수학교육학연구. 26**(3), 333-354.

이진호(2005). 라이프니츠의 무한과 무한소의 개념과 무한의 연산, **한국수학사학회. 18**(3), 67-68.

이현주, 류중현, 조완영(2015). 통합적 이해의 관점에서 본 고등학교 학생들의 미분계수 개념 이해 분석. **수학교육논문집. 29**(1), 131-155.

정연준, 김재홍(2008). 함수의 연속성 개념의 역사적 발달 과정 분석. **수학교육학연구. 23**(4), 567-584.

정연준, 이경화(2009). 미적분의 기본정리에 대한 고찰 - 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계를 중심으로. **수학교육학연구. 19**(1), 123-142.

정은실(2003). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구. 13**(3), 247-265.

정은실(2010). 초등학교 수학교과서에서의 양의 계산에 대한 연구. **수학교육학연구. 20**(4), 445-458.

최영주, 홍진곤(2014). 도함수의 성질에 관련한 학생들의 사고에 대하여. **수학교육. 53**(1), 25-40.

황혜정, 김미향(2016). 미분 개념의 이해에 관한 수업 사례 - 공학적 도구를 활용한 역사 발생적 과정을 토대로. **학교수학. 18**(2), 277-300.

Byerley, C., Hatfield, N. & Thompson, P. W. (2012). Calculus student understandings of division and rate. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 358-363). Portland, Oregon: SIGMAA/RUME.

Boyer, C. (1959). **미분적분학사-그 개념의 발달**. 김경화 역, 서울: 교우사.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Castillo-Garsow, C. C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes, R. Bonillia, L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding*, WISDOMe Monographs (Vol. 2, pp. 55-73). Laramie, WY: University of Wyoming.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education 26*, 66-86.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Glasersfeld, E. (1995). 급진적 구성주의, 김판수, 박수자, 심성보, 유병길, 이형철, 임채성, 허승희 역, 서울 : 원미사.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education : a Calculus Course as an Example. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1), 111-30.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 313-330.

Lobato, J., & Ellis, A. B. (2010). *Essential understandings: Ratios, proportions, and proportional reasoning*. In R. M. Zbiek (Series Ed.), Essential understandings. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America* (Vol. 1, pp. 298-304). Raleigh, NC: North Carolina State University. Retrieved from http://bit.ly/1b4sjQE.

Strang, G. (1991). *Calculus*. Wellesley-Cambridge Press.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 45 – 64) Morelia, Mexico. PME.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*, WISDOMe Monographs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. CBMS *Issues in Mathematics Education, 8*, 103-122.

A Study on the Change Process of Students' Perception and Expression About Distance and Speed in Distance Function and Speed Function

Lee, Dong Gun (Moonjung High School)
Ahn, Sang Jin (Moonjung High School)
Kim, Suk Hui (Chungdam High School)
Shin, Jae Hong (Korea National University of Education)

This study is about investigating students' recognition and expression on relationship of 'time, distance, speed' via teaching experiment. In this process, students showed not only a change in perception of the relationship of 'time, distance, speed' but also recognizing the average speed as a viewpoint of the slope of the line connecting the end points of the interval in the distance function as well as another way of perceiving average speed of a height of a rectangle. In this process, the study shows the scene of expanding the relation of 'distance = time × speed' to 'distance = time × average speed', and also the student who makes the continuous reasoning shows the possibility of constructing a new function that can explain the change of the primitive function by allocating the average rate of change to the interval. Although this study was conducted with a limited number of students, this study suggests some implications through the observation of relationship of 'time, distance, speed' the students'. We hope that these results will be the starting point for various studies for constructing the integral learning model in the future.

* Key Word : time(시간), speed(속력), distance(거리), average speed(평균속력), speed functions(속력함수), distance function(거리함수)

논문접수 : 2016. 11. 16
논문수정 : 2016. 12. 6
심사완료 : 2016. 12. 8