대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 4, 839 ~ 856. Dec 2016

교과서의 귀류법 도입과 활용에 대한 고찰 및 개선 방안

이 기 돈* · 홍 갑 주**

2009 개정과 2015 개정 수학과 교육과정에서는 학생들의 인지발달 수준을 고려해 ‘증명’을 중학교에서 고등학교로 옮기는 한편, 7차와 2007 개정 교육과정에서 공식적으로는 도입되지 않았던 ‘귀류법’을 고등학교 1학년 과목의 ‘학습내용 성취 기준’에 명시하였다. 귀류법은 어떤 명제가 참임을 보이기 위해 오히려 그 명제를 부정하는 귀류법 가정의 독특함으로 인해 인지적 갈등을 유발하는 것으로 알려져 있다. 이 논문에서는 귀류법에 대한 논리수학적 및 역사적 분석을 바탕으로 새로이 도입된 현 교과서의 귀류법 도입 및 활용에 대해 살펴보고 발견, 설명, 융합 등의 관점에서 개선 방안을 모색하였다. 발견의 과정을 먼저 서술한 후 귀류법적 사고를 도입하고, 귀류법 가정이 직접적으로 필요하지 않은 부분을 분리시켜 설명하되 유기적으로 서술하며, 대우를 이용한 증명법과의 관계를 밝혀 상호 보완적으로 다루고, 융합교육적 관점을 도입할 것 등을 제안하였다.

I. 서 론

귀류법은 고전적인 수학 교과서인 Euclid 원론에 빈번하게 등장할 뿐 아니라 Eudoxus나 Archimedes 등 고대 그리스 수학자들에 의해 널리 사용되었다. 특히 Archimedes는 특유의 과감한 추론으로 얻은 포물선 절단부의 넓이, 원의 넓이, 구의 부피와 겉넓이 등을 수학적으로 엄밀하게 증명하는 데 귀류법을 능숙하게 활용하였다(홍갑주, 2008). 귀류법은, 르네상스 시대에는 Aristotle가 과학적 지식의 조건으로서 천명한 원인(cause)을 밝혀주지 못한다는 점에서(Mancosu, 1992), 20세기 이후에는 배중률을 받아들이지 않는 직관주의자들에 의해서 비판의 대상이 되었지만, 여전히 “수학자의 가장 훌륭한 무기 가운데 하나(Hardy, 2005: 60)”로 평가받으며 그 입지를 지키고 있다.

귀류법은 3차와 4차 교육과정 문서에서 중학교 2학년의 ‘용어와 기호’에 등장한다(문교부, 1973; 문교부, 1981). 이어지는 5차와 6차 교육과정 문서에서는 ‘귀류법’을 찾을 수 없지만 6차 고등학교 수학과 교육과정 해설서(교육부, 1992)에서 실수체계를 다룰 때 “[$\sqrt{2}$] 등이 유리수가 아님을 귀류법을 써서 증명”한다고 설명하고 있다. 한편 7차와 2007 개정 교육과정 문서에서는 귀류법은 등장하지 않고 교과서에서도 다루지 않는 경우가 많았다.[1] 2009 개정과 2015 개정 수학과 교육과정에서는 학생들의 인지발달 수준을 고려해 ‘증명’을 중학교에서 고등학교로 옮기는 한편, ‘귀류법’을 고등학교 1학년 과목의 ‘학

* 경인고등학교, tracer0@sen.go.kr (제1 저자)
** 부산교육대학교, gapdol@bnue.ac.kr (교신저자)

1) 교과서에 따라서는 예를 들어 $3+\sqrt{2}$가 무리수임을 유리수의 사칙연산이 닫혀있음과 $\sqrt{2}$가 무리수임을 이용하여 귀류법으로 증명하기도 하였다.

습내용 성취 기준'에 명시하였다.

증명은 주어진 공리체계에서 어떤 명제가 참임을 보이는 것이지만 귀류법은 오히려 그 명제를 부정하는 것을 출발점으로 삼는 독특한 증명법으로서, 학생들은 물론 교사들까지도 귀류법의 이해 및 활용에 어려움을 겪는 사례가 보고되어 왔다. 예를 들어, $\sqrt{2}$가 무리수라는 명제의 증명에 대한 Barnard & Tall(1997)의 연구에서는 18명의 학생 중 귀류법 가정을 생각해 낸 학생이 한 명도 없었고, Antonini & Mariotti(2006)에서는 귀류법 가정에 의해 참이 부정된 부조리한 세계에서 진행되는 연역 규칙에 대해 의문을 제기하는 학생의 사례가 소개되었다. 또, 황진연, 신보미(2016)에서는 34명의 교사 중 17명이 귀류법의 논리적 구조를 잘못 파악하고 있었다.

증명이 정당화 뿐 아니라 설명, 이해, 의사소통, 발견 등의 역할을 하지만 증명 교육이 정당화 이외의 역할에 대해서는 소홀하다는 지적이 있어 왔다(나귀수, 2014; 우정호, 2001; Knuth, 2002; Schoenfeld, 1994; Steiner, 1978). 귀류법의 이해와 활용에 있어서 보고되는 어려움들은 논리수학적으로 정당한 귀류법 서술만으로는 심리적으로 적절한 설명이나 이해를 제공하지 못할 수 있음을 시사한다. 교과서에서 귀류법을 다룰 때, 증명하고자 하는 명제의 부정과 이에 따르는 모순이라는 형식적인 요소의 제시를 넘어 학생과 교사가 겪는 이러한 어려움에 대한 배려가 필요가 있다.

이 논문에서는 귀류법에 대한 논리수학적 및 역사적 분석을 바탕으로 현 2009 개정 교육과정 교과서에서 귀류법이 어떻게 도입되고 활용되는지 살펴보고, 자연스러운 설명과 그것을 유도하는 발견의 관점에서 개선 방안을 논의한다. 더불어 2015 개정 교육과정에서 지향하는 창의융합 교육의 측면에서 귀류법 지도에 대한 개선 방향을 논의한다. 이러한 논의는 2018학년도 고등학교 1학년부터 사용 예정인 2015 개정 수학과 선택 교육과정의 공통과목(수학) 교과서를 집필하는데 있어 시사점을 제공할 수 있을 것이다.

II. 귀류법

1. 논리수학적 분석

귀류법에 대한 몇몇 연구(조형미, 2009; 황진연, 신보미, 2016; Joshi, 2015)에서는 귀류법을 'p이면 q이다' 꼴의 명제를 중심으로 논의하였다. 그러나 Hammack(2013)과 Jourdan & Yevdokimov (2016) 등에 의하면 귀류법은 그러한 꼴을 포함한 명제 일반에 대하여 적용 가능한 증명방법으로서, 증명하고자 하는 명제 전체가 거짓이라고 가정(귀류법 가정)하고 모순을 찾는 것이다. 즉, '$\sqrt{2}$는 무리수이다'나 '소수는 무한히 존재한다'와 같은 명제도 이 명제를 부정하고 모순을 찾으므로써 증명할 수 있다. 모순을 찾는다는 것은 귀류법 가정 하에서 배경 가정들(background assumptions)이 동원된 연역적 추론을 통해 '$C \wedge \sim C$'에 이르는 것을 의미한다. 이때, 어떤 명제라도 C의 역할을 할 수 있다(Hammack, 2013; Jacquette, 2008).

귀류법의 논리적 타당성은 진리표에 의해 설명될 수 있다. <표 II-1>은 모순 '$C \wedge \sim C$'를 이용하여 명제 P를 귀류법으로 증명할 때의 진리표이다. 이 표의 1열과 5열의 진릿값이 같기 때문에 $P \equiv ((\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C))$이다(Hammack, 2013).

귀류법의 타당성에 대해서는 다음과 같은 설명도 가능하다. 참인 가정들로부터 타당한 연역 논증이 이루어졌다면 거짓인 결론에 이를 수 없다. 귀류법 증명 과정에서 타당한 연역 논증을 통해 논리적으로 거짓일 수밖에 없는 모순

$(C \wedge \sim C)$에 이르렀다는 것은 가정들 중 일부가 거짓이라는 것을 의미한다. 귀류법 증명 과정에서 사용된 배경 가정들이 모두 참이라면 귀류법 가정($\sim P$)이 거짓일 수밖에 없기 때문에 P가 참이다(Jacquette, 2008).

<표 II-1> 귀류법 증명에서 진리표(Hammack, 2013)

P	C	$\sim P$	$C \wedge \sim C$	$(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

2. 귀류법과 대우를 이용한 증명법

Epp(2010)에 의하면 대우를 이용한 증명법은 'p이면 q이다' 꼴의 전칭명제에만 적용 가능하다. $p \to q$ 와 $\sim q \to \sim p$ 의 진릿값이 항상 같기 때문에 원래의 명제 $p \to q$ 를 증명하는 대신 그 대우 명제인 $\sim q \to \sim p$ 를 증명해도 충분하다.

대우를 이용하여 증명할 수 있는 모든 명제의 증명은 귀류법으로도 서술할 수 있다(Epp, 2010; Joshi, 2015). 명제 $\forall x \in A,\ p \to q$ 를 대우를 이용하여 증명하였다고 하자. 이 명제의 증명은 다음과 같이 귀류법으로 다시 서술할 수 있다.

$\exists x \in A,\ p \wedge \sim q$ 라고 가정하자.(귀류법 가정) - ①
대우가 증명되었으므로, $\forall x \in A,\ \sim q \Rightarrow \sim p$
그러므로 ①의 x에 대해서도 $\sim p$ 이다. - ②
①과 ②에 의해, ①의 x에 대해 $p \wedge \sim p$ 이다.(모순)
따라서 $\forall x \in A,\ p \Rightarrow q$

반대로, 명제 $\forall x \in A,\ p \to q$ 가 귀류법으로 증명되는 경우, 대우를 이용한 증명법으로도 증명할 수 있다.

귀류법 증명에 의해 $\exists x \in A,\ p \wedge \sim q$ 라고 가정하면 모순에 이른다. 즉, $\exists x \in A,\ \sim q \wedge p$ (대우명제에 대한 귀류법 가정)라고 가정하면 모순에 이르므로 $\forall x \in A,\ \sim q \Rightarrow \sim p$
따라서 $\forall x \in A,\ p \Rightarrow q$

그러나 '$\sqrt{2}$는 무리수이다'와 같이 귀류법에 의해 증명되지만 대우를 이용해 증명할 수 없는 명제도 존재한다(Epp, 2010; Jourdan & Yevdokimov, 2016).

3. 역사적 분석

Aristotle는 모순의 원리(the principle of contradiction)를 세 가지 방식으로 공식화하였는데, 그것들 사이의 차이를 명확히 하지는 않았다. 그 세 가지는 다음과 같이 풀어쓸 수 있다(Lukasiewicz & Wedin, 1971: 488).

(존재론적 공식화) 같은 특성이 하나의 대상에 속하면서 동시에 그 대상에 속하지 않을 수는 없다.
(논리적 공식화) 반대되는 두 명제들은 동시에 참일 수 없다.
(심리적 공식화) 반대되는 두 명제들에 대응하는 두 개의 믿는 행위는 같은 의식에 존재할 수 없다.

하나의 원리에 대한 위 세 가지 방식의 공식화는 귀류법을 교육적으로 논의할 때 존재론적이고 논리적인 수학적 특성 뿐 아니라 심리적인 측면도 고려해야 함을 시사한다.

고대 그리스의 수학자 Eudoxus는 Hippocrates나 Democritus가 구한 원의 넓이나 다각뿔과 원뿔의 부피를 소진법으로 엄밀히 증명한 것으로 알려져 있다. Eudoxus의 방법은 두 원의 넓이는 두 원의 지름에 세워진 정사각형 넓이에 비례함을 보이는 Euclid 원론 12권 2번 명제의 증명에 사용되었다. 이 증명은 두 원과 두 정사각형의 넓

이가 비례하지 않는다고 가정(귀류법 가정)할 때 다음의 두 사실 사이에 모순이 발생함을 보이는 것이라고 요약할 수 있다(홍갑주, 2008).

㉠ 내접다각형의 넓이를 통해 원의 넓이에 얼마든지 가까이 갈 수 있다.
㉡ 같은 단계에서, 두 내접다각형의 넓이는 해당하는 원의 지름에 세운 정사각형의 넓이에 비례한다.

극한을 다루는 Eudoxus의 위 방법은 내접다각형의 넓이의 극한을 통해서 원의 넓이에 접근하는 한쪽 방향 기법인 반면, Archimedes는 Eudoxus식의 소진법을 보다 유연한 양쪽 방향 기법으로 발전시켰다. 원의 넓이가 원주를 밑변으로 하고 반지름을 높이로 하는 직각삼각형의 넓이와 같다는 증명에 사용된 양쪽 방향 기법과 귀류법은 다음과 같은 형식을 띤다(홍갑주, 2008).

1단계: 구하고자 하는 양 S 에 대해, $I_n < S$ 이면서 증가하는 양 I_n과 $C_n > S$ 이면서 감소하는 양 C_n을 설정하고, 임의의 ε에 대해 $C_n - I_n < \varepsilon$ 인 n을 잡을 수 있음을 보인다.
2단계: 임의의 n에 대해 $I_n < K < C_n$ 인 어떤 양 K를 찾고, 이때 $S = K$ 임을 아래와 같이 귀류법으로 보인다.
[귀류법 증명]
$S > K$ 를 가정하면 … $I_n > K$ 인 n이 존재하여 모순.
$S < K$ 를 가정하면 … $C_n < K$ 인 n이 존재하여 모순.

Archimedes는 양쪽 방향 기법 외에도 구하고자 하는 양 S 에 대해, 그 양의 아래쪽에서 수렴하는 급수의 부분합 S_n과 특별한 관계를 갖는 어떤 양 K 를 찾아 $S = K$ 임을 귀류법으로 보이는 방법을 포물선 절단부의 넓이 등을 구하는데 사용하였다. 그런데, Archimedes는 <The Method>에서 불가분량과 지레의 법칙을 독창적으로 조합한 '역학적 방법'으로 도형의 넓이와 부피, 무게중심에 대한 놀라운 발견을 이룬 것으로도 잘 알려져 있다. 포물선 절단부 역시 <The Method>에서는 불가분량(선분)이 모인 것으로 간주하고 지레의 법칙을 적용하여 그 넓이를 구하였다. 이 방법은 불가분량의 개념과 지레의 법칙을 이용했다는 점에서 수학적 엄밀성의 측면에서 논란의 여지가 있다. 이와 관련하여 Archimedes 자신은 <The Method>의 서문에서 아래와 같이 설명하였다.

> 나는 역학적 방법을 통해 나에게 확실하게 된 몇 가지 명제들을 나중에 기하학적으로 증명하였는데, 역학적 방법에 의한 탐구는 실질적인 증명은 제공하지 않기 때문입니다. 그러나 . . . 역학적인 방법을 통해 어떤 지식을 미리 얻는다면 이러한 예비지식 없이 시작하는 것보다는 간단하게 증명을 찾을 수 있습니다.
> (Heath, 2002)

Archimedes는 자신의 역학적 방법을 엄밀한 증명 이전에 명제를 발견하고 그 타당성을 확인하거나 증명의 착상 등을 얻을 수 있는 과정으로 여기는 것으로 보인다. 귀류법 증명의 교육과 관련하여 Archimedes의 사례는 귀류법을 통한 엄밀한 증명 이전에 그 명제의 발견과 심리적인 확신을 지원하는 수학적 경험이 필요함을 보여준다.

III. 2009 개정 교육과정 교과서의 귀류법 도입 및 활용 분석

1. 귀류법을 도입하는 맥락

2009 개정 교육과정 문서에 기술된 수학Ⅱ 과목의 명제 내용영역 성취기준을 핵심어를 중심

으로 정리하면 다음과 같다(교육과학기술부, 2011: 61).

① 명제와 조건의 뜻 ② 명제의 역과 대우
③ 필요조건과 충분조건
④ 절대부등식의 이해 및 증명
⑤ 대우를 이용한 증명법과 귀류법

인천광역시교육청의 2009 개정 교육과정 인정 도서 심사에 합격하여 2014학년도부터 보급된 수학Ⅱ 교과서는 총 9종이다(인천광역시교육청, 2013). 9종의 교과서 모두 명제 단원에서 ①번부터 ④번 항목까지의 내용을 이 번호 순서대로 다룬다. 한편 ⑤번 항목 내용에 해당하는 귀류법은 대우를 이용한 증명법과 함께 다루어지는데, 이 증명법들을 도입하는 맥락은 크게 두 가지 유형으로 구분할 수 있다. 하나는 ②번 항목 내용에서 '대우'를 설명한 다음에 바로 이어서 다루는 유형(5종)이고, 다른 하나는 명제 단원의 뒷부분에서 절대부등식의 증명과 함께 다루는 유형(4종)이다. 전자는 대우를 이용한 증명법을 소개하기 위해 선행되어 다루어져야 할 '대우'를 도입하면서 때맞추어 두 증명법을 함께 소개한 것이고, 후자는 명제 단원 전체를 명제(조건)의 뜻, 명제(조건) 사이의 관계, 명제의 증명(법) 순으로 구조화 한 것으로 보인다.

두 가지 유형 모두 귀류법에 대한 서술 비중이 크지 않다. 9종 모두 하나의 소단원에서 대우를 이용한 증명법 이후에 귀류법을 서술하였다. 이때 5종의 교과서가 선택한 전자의 맥락은 대우를 이용한 증명법을 도입하기 위한 것으로서 귀류법이 굳이 '대우'를 소개하는 장면에 이어서 서술되어야 하는 것은 아니다. 귀류법을 다른 증명법과 대등하게 다룰 수 있는 후자의 맥락을 선택한 4종도 그 중 3종은 대우를 이용한 증명법보다 적은 지면을 할애하여 1쪽 이내로 비교적 가볍게 다루었다. 다만 나머지 1종은 예제와 문제뿐 아니라 생각열기, 실생활문제, 사고력 수학 등 여러 가지 형식을 동원하고 대우를 이용한 증명법보다도 많은 양을 서술하는 등 귀류법을 비중 있게 다루었다.

한편 9종 모두 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 한 단원에서 연이어 다루지만 두 가지 증명법의 관계를 서술한 교과서는 2종에 그쳤다. 한 교과서는 두 증명법이 모두 간접증명법이라는 점을 본문에서 언급하였고, 다른 한 교과서는 대우를 이용한 증명법이 귀류법의 한 종류라는 점을 날개단에서 설명하였다. 그러나 후자의 설명은 $p \rightarrow q$ 꼴의 명제에서 결론(q)의 부정을 귀류법 가정으로 보는 입장으로 이해되는데, 명제 $p \rightarrow q$ 의 부정은 $\sim q$ 가 아닌 $p \wedge \sim q$ 이기 때문에 이러한 설명에는 문제가 있는 것으로 보인다. 두 가지 증명법의 관계에 대한 현 교과서의 서술은 전반적으로 보충 및 개선될 필요가 있다고 생각된다.

2. 귀류법에 대한 설명 및 대표 예제의 귀류법 서술 방식

귀류법을 설명하는 문장이 제공하는 정보의 종류는 9종의 교과서가 대체로 유사하다. 한 교과서의 예를 들면 다음과 같다.

> <u>명제 $p \rightarrow q$가 참임을 증명할 때(㉮)</u> <u>그 명제의 결론 q를 부정(㉯)</u>하여 <u>가정 또는 이미 알려진 사실 등에 모순됨(㉰)</u>을 보여 그 결론이 참임을 보이는 증명방법을 귀류법이라고 한다.
> (김창동, 장경윤, 김응환, 문광호, 이병헌, 이채형 외, 2014: 54, 밑줄과 ㉮, ㉯, ㉰는 연구자의 것임)

즉, 어떤 명제를 증명할 때 사용하는지(㉮), 무엇을 부정하는지(㉯), 무엇에 모순됨을 보이는지(㉰) 등의 정보를 제공한다. 이 세 가지 정보의

내용은 교과서에 따라 다르다. 9종의 교과서(A, B, ... , I)에 대해 그 내용을 정리하면 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 9종 교과서의 귀류법 설명 내용

정보의 종류 / 내용	㉮	㉯	㉰
명제 $p \rightarrow q$의 증명	B, C, F, (D)		
(어떤) 명제의 증명	A, E, G, H, I,		
(명제의) 결론을 부정		A, B, C, D, F, H, I	
명제를 부정		E	
명제 또는 명제의 결론을 부정		G	
가정(하고 있는 것) 또는 이미 알려진 사실에 모순			A, B, C, D, H, I
[언급 없음]			E, F, G

* (D)는 ㉮에 대해 서술하지 않았으나 문맥상 그렇게 이해됨

Ⅱ.1.에서 귀류법은 일반적인 명제를 증명하기 위해 그 명제를 부정할 때 이르게 되는 모순을 찾는 것임을 살펴보았다. <표 III-1>은 이러한 귀류법의 뜻에서 벗어나는 방식으로 서술한 교과서가 상당 수 존재함을 보여준다. '명제'를 증명할 때 사용한다고 설명한 A, H, I 의 경우에도 부정의 대상을 명제 자체가 아닌 '결론'이라고 서술하였는데, 이것은 이 교과서들이 언급하는 '명제'가 $p \rightarrow q$ 꼴의 명제에 제한된 것일 수 있음을 시사한다.

귀류법을 $p \rightarrow q$ 꼴의 명제에 제한시켜 설명할 때 귀류법 가정을 '명제의 결론(q)의 부정'으로 삼는 것은 심리적으로 타당한 측면이 없지 않다. 'p이면 q이다'의 증명 과정에서 '$\sim q$'를 가정하고 모순을 찾더라도 일상어 'p이면'의 뜻에 의해 자연스럽게 p가 참이라는 사실도 함께 사용한다면 실제로는 '$p \wedge \sim q$'를 가정했다고 할 수 있다. 이런 경우에는 귀류법의 대표 예제로 $p \rightarrow q$ 꼴의 명제를 제시하는 것이 자연스러울 것이다. 그러나 이러한 입장을 취하는 교과서에서도 대표 예제로 '$\sqrt{2}$는 무리수이다'의 증명을 제시하였는데, 이러한 전개는 논리적 일관성이나 내용의 일체성을 반감시킨다고 생각된다.

명제 '$\sqrt{2}$는 무리수이다'의 증명은 9종 중 8종의 교과서에서 귀류법의 대표 예제로 사용되었다. 다른 예제를 사용한 나머지 1종의 교과서도 예제 앞의 본문에서는 이 명제의 증명을 예로 들어 설명하였다. 이 명제에 대한 교과서의 전형적인 귀류법 증명 서술은 다음과 같다.

(증명1)
$\sqrt{2}$가 무리수가 아니라고 가정하자. - ①
그러면 $\sqrt{2}$는 유리수이므로 서로소인 두 자연수 m, n 에 대하여 $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ - ②
즉 $n=\sqrt{2}\,m$이고 양변을 제곱하면 $n^2=2m^2$
n^2이 짝수이므로 n도 짝수이다. - ③
$n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로
$4k^2=2m^2$, 즉 $2k^2=m^2$
m^2이 짝수이므로 m도 짝수이다. - ④
따라서 m, n 이 모두 짝수이므로 m, n 이 서로소라는 가정에 모순이다. - ⑤
그러므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다.
(황선욱, 강병개, 김영록, 윤갑진, 김수영, 송미현 외, 2015: 40 수정).

이 증명은 6차 교육과정 교과서에서 제시한 증명과 거의 다르지 않다. (증명1)을 <표 III-1>의 틀로 분석하면, '~은 ~이다' 꼴로 서술된 이 명제의 증명은 '명제의 부정'을 귀류법 가정으로 삼아(①) 증명의 과정에서 가정 된 'm과 n이 서로소이다(C)'에 대한 모순(⑤, $C \wedge \sim C$)에 이르렀다고 할 수 있다.

이때 $\sqrt{2}$가 유리수라는 귀류법 가정을 수식으로 표현하는 단계(②)를 생각해 보자. 여기에서 m과 n이 서로소라는 가정은, '$\sqrt{2}$가 유리수임'을 두 자연수의 비율로 나타낼 때 서로소가 아닌 두 자연수 m과 n을 사용해도 상관없

다는 점에서 부차적인 요소이다. 이러한 부가적인 가정은 그렇게 함으로써 이후에 모순에 이르게 된다는 것을 미리 알고 있는 교과서 저자의 의도적인 설정이라고 할 수 있다. (증명1)은 부차적인 가정이 증명의 후반부에 모순($C \wedge \sim C$)의 한 부분(C)을 차지하여 귀류법의 핵심으로 재등장함으로써 당혹감을 불러일으킨다.2)

한편 Barnard & Tall(1997)에 의하면 'n^2(또는 m^2)이 짝수이면 n(또는 m)이 짝수이다(③ (또는 ④))'의 연역도 학생들에게는 낯선 사고 과정으로서 상당한 인지적 부담을 준다. 그들의 연구에서, 학생들은 $n^2 = 2m^2$을 적을 수 있었지만 n^2이 짝수임을 언급하지는 못하였고, 교사가 n을 짝수와 홀수일 때로 구분하여 n^2이 짝수일 때는 n이 짝수일 수밖에 없음을 학생들에게 직접 보여 주었지만, 이후 $\sqrt{3} = \frac{n}{m}$이라고 가정할 때 m, n 이 3의 배수가 된다고 추론하는 데에는 실패하였다. ③과 ④의 이해에 따르는 어려움과 관련하여 (증명1)을 다루기에 앞서 9종 중 7종의 교과서는 별도의 예제를 통해, 1종의 교과서는 문제를 통해, 명제 'n^2이 짝수이면 n도 짝수이다'를 증명하였다. 이러한 조치도 앞에서 그 명제를 증명했다는 것을 미처 인지하지 못한 학생이 ③의 진술을 접했을 때 발생하는 일차적인 당혹감을 덜어주지는 못할 것이다. 이와 관련하여 2종의 교과서에서는 ③을 진술할 때 '앞의 예제에 의하여'와 같은 '비내용 단어(non-content words)'를 추가하여 서술하였다. 비내용 단어의 추가와 같은 서술자의 부언은 텍스트 이해를 위한 '신호를 줌(signaling)'으로써 수학 텍스트의 이해를 돕고 흥미 요소를 부각시킨다는 점에서 주목된다(이기돈, 2014; Meyer, 1975).

요컨대 (증명1)은 ③과 ④를 이해하기 위해 낯선 수리논리를 따라가야 하는 동시에 그것이 이르게 되는 모순의 한 부분이 앞에서 의도적으로 설정한 부차적인 가정이라는 점에서 이중적인 인지적 어려움을 부과하지만, 교과서의 서술은 이에 대한 심리적 배려가 부족한 편이다. 정당화를 넘어 설명과 이해를 지원하는 방향으로 서술을 개선할 필요가 있다.

한편 2009 개정 교육과정에서는 귀류법이 하나의 증명법으로 명제 단원에서 소개됨에 따라 귀류법 증명의 형식은 부각되지만 증명 대상 명제를 수학적 문맥 속에서 발견적으로 다루기는 어렵다. 6차 교육과정에서는 고등학교에서 실수 체계를 다루는 가운데 중학교에서 무리수라고 받아들였던 $\sqrt{2}$를 귀류법으로 증명하였다. 이런 경우 귀류법 증명 이전에 $\sqrt{2}$에 대해 발견적으로 논의함으로써 귀류법적 사고를 자연스럽게 유도할 수 있는 내용적인 여지가 있었다. 2015 개정 교육과정에서도 귀류법이 명제 내용영역에서 2009 개정 교육과정과 거의 동일한 성취기준으로 지도되는 바3), 교과서에서 현재와 동일한 대표 예제를 선택한다면 그것을 다루기에 앞서 $\sqrt{2}$에 대한 발견적 논의를 간단하게나마 서술할 필요가 있을 것이다.

3. 도입 이후 귀류법의 활용 사례

'수학Ⅱ'에서 증명법으로서의 귀류법을 설명한 이후, 실제로 그것을 활용하여 어떤 명제를 증명하는 사례는 '기하와 벡터'의 한두 예제를 제외하고는 교과서에서 찾기 어렵다. 대부분4)의

---

2) 모순의 나머지 한 부분($\sim C$)은 m과 n이 2를 공약수로 갖는다는 점에 기반한다.

3) 2015 개정 교육과정과 2009 개정 교육과정의 명제 내용영역 성취기준은 네 번째와 다섯 번째 기준의 제시 순서 정도의 차이를 제외하고는 동일하다.

4) 인천광역시교육청의 인정도서 심사에 합격한 총 9종의 '기하와 벡터' 교과서 중 8종의 교과서에서 이 명제를 예제로 다루었다.

2009 개정 교육과정 '기하와 벡터' 교과서는 '두 평면 사이의 위치관계'를 다루면서 '평면 α 위에 있지 않은 한 점 P를 지나고, 평면 α 에 평행한 두 직선 l, m 에 의해 결정되는 평면 β 가 평면 α 와 평행함'을 예제를 통해 증명하는데, 이때 귀류법이 다음과 같이 사용된다.

(증명2)
두 평면 α, β가 평행하지 않다고 가정하고 그 교선을 n이라고 하면
$l//n$, $m//n$ 이므로 $l//m$ - (※)
이것은 두 직선 l, m이 점 P에서 만난다는 가정에 모순이다.
따라서 평면 α와 평면 β는 평행하다.
(이강섭, 황석근, 김부윤, 심성아, 왕규채, 송교식 외, 2014: 132, (※)은 연구자의 것임)

(증명2)는 귀류법 가정에서 모순에 이르기까지 (※)의 한 단계만을 거치기 때문에 (※)의 이해는 (증명2)의 이해에 관건이라고 할 수 있다. 이를 고려하면 (※)에서 $l//n$ 과 $m//n$ 이 성립하는 이유에 대한 추가적인 설명이 필요하다. 인정도서 심사에 합격한 총 9종의 교과서 중 위의 서술과 같이 그 이유에 대한 충분한 설명이 없는 교과서는 6종인데, 이 중 5종은 이 예제를 다루기에 앞서 (※)의 이해에 필요한 명제를 예제나 문제로 다루었다. 그러나 이 경우에 비내용 단어를 추가하여 (※)을 보다 설명적으로 서술한 교과서는 5종 중 2종에 그쳤다. 또, 6종 중 1종은 (※)의 이해를 돕기 위한 추가적인 조치를 취하지 않았다. 귀류법 소개를 위한 대표 예제로서의 (증명1)과 마찬가지로 귀류법을 활용하는 장면에서도 교과서의 서술은 심리적인 고려가 충분하지 않다.

한편, '수학Ⅱ' 이후 대우를 이용한 증명법의 활용은 '미적분Ⅰ'에서 급수의 발산 판정을 위해 요긴하게 사용되는 명제 '$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다 - (가)'의 설명에서 발견된다. 대부분[5]의 2009 개정 교육과정 미적분Ⅰ 교과서에서는 (가) 대신 '$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다 - (나)'를 증명하고 대우를 이용한 증명법에 의해 (가)가 성립한다고 설명하였다. 다른 과목에서 학습한 '대우를 이용한 증명법'에 익숙하지 않은 학생이라면 이러한 설명에 만족하기 어려울 것이다. 익숙한 경우라도, '어떤 명제가 참이면 그 대우 명제도 참이다'는 지식은 그것이 왜 성립하는지에 대한 사고 과정을 거쳐 이미 개념화가 완료된 것으로서, 익숙하다는 것은 (가)를 이해하는데 있어 (나)가 도구적 지식으로 사용되어 보다 세부적인 이해를 어렵게 할 수 있음을 시사한다. 반면, (나)를 증명한 후 귀류법을 동원하면 특별한 사전지식 없이도 (가)를 보다 직접적으로 설명할 수 있다. 만일 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$인데도 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 곧바로 모순에 이른다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 (나)에 의해 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이어야 하는데 이것은 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$과 모순이기 때문이다. 이처럼 대우를 이용한 증명법과 귀류법은 간접증명법이라는 점에서 뿐 아니라 논리적으로도 긴밀히 연결된 두 가지 증명법으로서 상호 보완적인 역할을 할 수 있으나 교과서에서는 이러한 맥락의 접근이 이루어지고 있지 않다.

Ⅳ. 교과서의 귀류법 서술 개선 방안 논의

5) 인천광역시교육청의 인정도서 심사에 합격한 총 8종의 '미적분Ⅰ' 교과서 중 7종의 교과서가 대우를 이용해 설명하였다. 나머지 1종은 (가)의 이유를 설명하지 않았다.

1. 귀류법 증명 전에 발견의 과정 서술

독학으로 공부한 '갈루아 이론'을 13세 딸에게 가르치기 위한 책을 쓴 재일교포 소설가 김중명은 귀류법과 증명을 다음과 같이 평가한다.

> 귀류법이란, . . . '증명'으로서는 완벽할지 모르겠지만, ... 그들[고대 그리스인들]은 상대를 이기기 위해 증명을 하기 시작했다. 상대방을 이해시키기 위해 증명을 한 것이 아니다. 증명은 논쟁의 도구이지, 이해를 재촉하는 여신의 속삭임이 아니라는 것을 수학자들은 잊고 있는 것 같다.
> (김중명, 2013: 20-21)

이와 같이 일반인에게 귀류법은 상대방을 이해시키기 위한 도구라기보다는 논쟁에서 승리하기 위한 무기로 비춰질 수 있다. 교육적 관점에서는 귀류법이라는 무기가 기반하고 있는 설명과 이해의 측면을 발굴할 필요가 있을 것이다.

Ⅱ.3.에서 살펴 본 바와 같이 Archimedes는 곡선으로 둘러싸인 넓이에 대한 여러 명제를 불가분량과 지레의 법칙을 조합한 과감한 추론을 통해 보였지만, 그것은 일종의 추측일 뿐이며 아직 수학적 증명에 의해 정당화된 것은 아니라고 인식하였다. 추측에 대한 확신과 그것의 수학적 불완전성에 대한 인식은 증명을 찾고자 하는 심리적 동기를 제공했을 것으로 보인다.

참이라고 생각하는 추측을 정당화해야 하는 상황에서, 그 추측을 부정할 때 발생하는 모순을 찾는 것은 학생들의 자연스러운 사고 과정에서 관찰된다. Reid & Dobbin(1998)은 7세 아동이 보드게임「Set」에서 탁자에 놓인 여섯 장의 카드 중에 'Set'이 되는 세 장의 카드가 없음을 설명할 때 귀류법 가정을 기반으로 설명하는 장면과, 15세 학생이 도형 숫자퍼즐(arithmagon problem)에 대한 자신의 추측을 시험하는 과정에서 그것이 틀렸음을 귀류법적 사고를 통해 설명하는 모습을 관찰하였다. 이러한 사고는 학교수학의 문제를 해결하는 학생에게서도 발견된다. 다음은 2016년 8월 서울의 한 고등학교 방과후학교 수업에서 다루었던 문제이다.

> (문제1) 세 개의 주사위 A, B, C를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c 라 하자. $ab+bc$ 가 홀수일 확률은?
> (2016 EBS 수능완성 수학영역 나형 p.116)

(문제1)을 풀어볼 시간을 충분히 준 후에 한 학생에게 문제 해결을 위한 아이디어를 물었다.

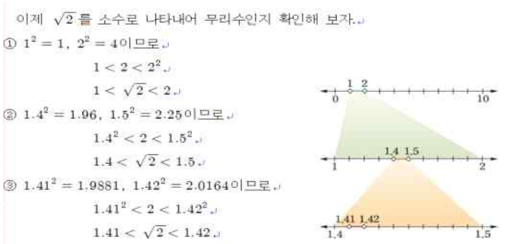
> 학생: 우선 b 는 홀수예요.
> 교사: 왜?
> 학생: 왜냐하면 만일 b 가 짝수라면 ab 와 bc 가 모두 짝수가 되어 $ab+bc$ 가 홀수가 될 수 없어요.

위 학생은 (문제1)을 경험적으로 탐구하던 중 b 가 홀수이어야만 한다는 것을 발견하고 그것을 정당화할 것을 요구하는 교사의 질문에 자연스럽게 귀류법 가정 하에서 발생하는 모순을 언급한 것으로 보인다.

학생의 추측이 항상 참인 추측을 낳는 것은 아닐 것이다. 그러나 경험적 과정을 통해 형성된 추측이 참이 아닌 경우에도 그것의 부정을 가정하는 사고는 의미 있을 수 있다. 잘 알려진 것처럼 평행공준을 나머지 공준으로부터 증명할 수 있을 것이라는 추측은 참은 아니었지만 이 추측을 증명하기 위한 귀류법적 사고는 비유클리드 기하학의 발견을 가져왔다(Jacquette, 2008). 옳건 그르건 간에 경험적 과정을 거쳐 어떤 수학적 추측을 형성하는 것은 심리적으로 그 이후의 귀류법적 사고를 자연스럽게 활성화할 수 있다는 점에서, 그리고 이때 활성화된 귀류법적 사고는 수학적 발견의 원동력이 될 수 있다는 점에서 교과서에서 귀류법 증명에 앞서 경험적인 발견의 과

정을 서술하는 것이 바람직하다고 생각된다.

현 교과서에서 귀류법 소개를 위한 대표 예제로 다루고 있는 ‘$\sqrt{2}$는 무리수이다’의 귀류법 증명에서도 그에 앞서 발견의 과정을 먼저 서술할 필요가 있다. 이때 $\sqrt{2}$를 소수(小數)로 나타내면 순환하지 않는 무한소수, 즉 무리수가 된다는 중학교 3학년 수학 교과서의 설명을 다시 한 번 활용하는 것을 고려할 수 있다.



[그림 IV-1] 순환하지 않는 무한소수 $\sqrt{2}$에 대한 경험적인 확인 과정(황선욱, 강병개, 한길준, 한철형, 권혁천, 김의석 외, 2014: 18)

교과서는 공학적 도구를 활용하여 [그림 IV-1]의 과정을 반복적으로 시행하는 경험을 제안할 수 있다. 이를 통해 $\sqrt{2}=1.41421356...$ 을 경험적으로 발견함으로써 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수일 것이라는 추측을 유도한다. 시행을 거듭할수록 확신은 더욱 강해지지만, 이 추측은 유한의 경험 안에서만 확인될 뿐 수학적으로 정당화되지는 못한다. 이런 맥락 하에 자연스럽게 귀류법 가정을 도입할 수 있다. 이때, Ⅲ.2.의 (증명1)에서 귀류법 가정의 수식화 단계에 대해 지적한 문제점을 함께 고려하면, 다음과 같이 m과 n이 서로소라는 가정을 제거한 귀류법 가정을 생각할 수 있다.

$$\sqrt{2} = \text{유한소수 또는 순환하는 무한소수}$$
$$= \frac{n}{m} \quad (\text{단, } m, n \text{ 은 자연수})$$

이제 현 교과서의 (증명1)과는 다른 위 귀류법 가정으로부터 어떻게 모순에 이를 수 있는지 살펴보자.

(증명3)
$n=\sqrt{2}\,m$이고 양변을 제곱하면 $n^2=2m^2$
n^2이 짝수이므로 n도 짝수이다.
즉, 어떤 자연수 n_1에 대해 $n=2n_1$이므로
$4n_1^2=2m^2$, 즉 $2n_1^2=m^2$
m^2이 짝수이므로 m도 짝수이다.
즉, 어떤 자연수 m_1에 대해 $m=2m_1$이므로
$2n_1^2=4m_1^2$, 즉 $n_1^2=2m_1^2$
마찬가지로, n_1^2이 짝수이므로 n_1이 짝수이다.
즉, 어떤 자연수 n_2에 대해 $n_1=2n_2$이므로
$4n_2^2=2m_1^2$, 즉 $2n_1^2=m_1^2$
마찬가지로 m_1^2이 2의 배수이므로 m_1도 짝수이다.
즉, 어떤 자연수 m_2에 대해 $m_1=2m_2$
이와 같이 계속하면
$n>n_1>n_2>n_3>\cdots$,
$m>m_1>m_2>m_3>\cdots$
을 얻는다.
그러나 이것은 자연수의 정렬성에 모순이다.[6)]

즉, 자연수 m, n에 대해서 $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$이라고 가정하면 분모와 분자를 계속해서 더 작은 수로 바꿀 수 있다는 결론을 얻게 된다. 이때 분모의 집합과 분자의 집합[7)]은 최소원을 정할 수 없게 되어 자연수의 정렬성에 모순된다.

6) 자연수의 정렬성이란 자연수의 공집합이 아닌 부분집합 S는 최소원을 가진다는 것으로서, 자연수의 핵심적인 성질이다. 고등학교 수준에서는 ‘그러나 이것은 더 작은 자연수를 계속해서 찾을 수는 없다는 사실에 모순이다’라는 정도로 풀어 서술할 수 있을 것이다. 사실, (증명1)의 ② 역시 서로소인 두 자연수 m, n 을 잡는다는 것은 m 을 최소로 잡는다는 말과 동치이므로 이 원리가 이용된 것이다.

7) 이 집합에서는 새로이 생성되는 원소들이 그 직전 원소에 비해 작다. 이 과정이 무한히 반복된다는 의미에서 이러한 증명 방법을 ‘무한강하법’이라고 부른다.

위 증명은 (증명1)에서 m과 n이 서로소라는 설정, 즉 $\sqrt{2}$를 유리수라고 가정할 때의 부차적인 설정이 모순의 한 부분이 되는 인위적인 느낌을 없애고, 계속해서 분자 분모를 2로 나누어 나가는, 학생들 스스로도 시도할 수 있었을만한 자연스러운 과정을 거듭함으로써 모순에 이르게 된다는 장점이 있다.

또 한 가지 대안을 살펴보자. 위 논증을 수정하여 구성하면 자연수의 정렬성에 위배되지 않기 위해서는 m과 n의 소인수 2가 유한개만 존재해야 한다는 가정을 얻을 수 있는데, 이 점을 이용하여 (증명1)을 수정하는 방안을 고려해 볼 수 있다. 영국의 GCSE mathematics Higher 2 교과서에서는 같은 명제의 귀류법 증명 서술을 다음과 같이 시작한다.

(증명4)

$\sqrt{2}$를 $\frac{a}{b}$ 로 쓸 수 있다고 가정하자. 이때 a와 b는 범자연수(whole numbers)이고 $b \neq 0$이다.
a와 b가 공약수를 가지고 있다면 그것을 약분할 수 있다. - Ⓐ
우리는 다음의 가정을 한다. 우리는 후에 이 가정이 거짓임을 보일 것이다. . ..

$\boxed{\sqrt{2}=\frac{a}{b}\text{, 이때 } a\text{와 } b\text{는 서로소이다.}}$

(Solomon, 2002: 210, Ⓐ는 연구자의 것임)

위 귀류법 증명 서술은 우리 교과서와 달리 $\sqrt{2}$를 서로소인지의 여부와 관계없이 두 자연수 a와 b의 비율로 가정하고 이어서 모든 공약수를 약분하여 기약분수로 만들 수 있음을 언급한다. 그러나 a와 b의 소인수 2가 유한개만 존재한다는 입장에서는 2^k 꼴의 공약수만을 약분하는 것이 자연스럽다. 이러한 가정만으로도 위 증명에 (증명1)의 ③, ④를 이으면 동일한 모순(⑤)에 이른다. 따라서 Ⓐ를, a와 b가 2^k 꼴의 공약수를 더 이상 갖지 않을 때까지 약분할 수 있다고 수정하여 서술할 수 있다.

요컨대, 교과서에서 귀류법의 대표 예제로 '$\sqrt{2}$는 무리수이다'를 선택한다면, 증명 서술에 앞서 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수라는 경험을 하도록 제안하고, 그 맥락 속에서 귀류법 가정이 자연스럽게 발생하도록 유도하며, 자연수 m, n에 대해서 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$이라고 가정하여 무한강하법을 사용하거나, 반복된 약분을 통해 m과 n이 2^k 꼴의 공약수를 더 이상 갖지 않을 때까지 약분한 후 ③, ④를 통해 모순에 이를 수 있음을 밝히는 것이 바람직할 것으로 생각된다.

2. 귀류법 가정이 필요 없는 부분의 분리와 유기적인 설명

명제 '소수의 개수는 무한하다'도 귀류법으로 증명되는 대표적인 명제 중 하나이다. 이 명제의 귀류법 증명은 보통 다음과 같이 서술된다.[8)]

(증명5)
소수의 개수가 r라고 가정하자.(r은 자연수) - (*)
r개의 소수들을 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 라 놓자.
자연수 $N=p_1 p_2 \cdots p_r+1\,(>1)$ 은 p_i의 배수가 아니므로 소수이고, $N>p_i$이므로 $N \neq p_i$ 이다.
(단, $1 \leq i \leq r$)
이것은 (*)에 모순이므로 소수는 무한히 많다.

전통적으로 이 증명은 간단하고 우아하다는 평을 받지만 그 이해가 수월한 편은 아니다. 귀류법 가정으로부터 모순에 이르기까지 갑작스러운 자연수 N의 구성, N이 p_i의 배수가 아니라는 점의 확인, 그러한 N이 소수일 수밖에 없다

8) 이 증명이 전형적으로 사용되는 유일한 증명은 아니다.

는 점의 납득, 그럼에도 N이 p_i는 아니라는 점의 인정 등이 필요하다. Leron(1985)은 이러한 증명을 처음 접한 대부분의 예비교사들이 충분히 주의 깊은 설명 후에도 여전히 혼란스러워 한다는 다년간의 교수 경험을 보고하였다. 그는 귀류법 가정을 통해 실제로는 불가능한 세계 속에서 사고해야 하는 심리적 부담을 그 원인으로 지적하였다. 예를 들어, N이 p_i들의 배수가 아니기 때문에 소수이어야 한다는 추론은 p_i들을 제외하고는 소수가 없다는 귀류법 가정에 기반 한 것으로, 실제로는 $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 59 \cdot 509$ 와 같이 소수들을 곱하고 1을 더한다고 해서 반드시 소수를 얻는 것은 아니다(Hardy & Woodgold, 2009).

이에 비해 소수의 개수가 무한하다는 것을 함의하는 Euclid 원론 9권 20번 명제의 증명을 현대의 용어와 기호로 번역하면 다음과 같다.

> (증명6)
> 세 소수 A, B, C 에 대하여 그것들 외의 소수가 존재함을 보이자.
> $P = ABC+1$ 은 소수이거나 합성수이다.
> P 가 소수인 경우, 이것이 A, B, C 이외의 소수이다.
> P 가 합성수인 경우, P 를 나누는 소수 p 가 존재하는데, 이것은 A, B, C 와 다르다.
> 왜냐하면 만일 p 가 A, B, C 중 하나라면 p 가 P 와 ABC 를 나누고 따라서 1 을 나누는데 이것은 모순이기 때문이다. - (**)
> 그러므로 A, B, C 외의 소수가 존재한다.
> (Hardy & Woodgold, 2009: 45-46 변형)

(증명5)는 모든 소수들을 곱하고 1을 더하여 얻는, 실제로는 구성이 불가능한 수 N 에 대한 수학적 조작을 필요로 하지만, (증명6)은 중간에 등장하는 귀류법에서 세 소수를 곱하고 1을 더하여 실제로 구성 가능한 수 P 에 대한 조작을 통해 모순을 얻는다. 또, (증명5)가 귀류법 가정으로 시작하여 모순에 이르러 증명이 종료되는 것에 비해 (증명6)은 전체적으로는 구성적인 증명이지만 부분적으로 (**)에서 귀류법을 사용한다. 이처럼 귀류법 가정 하에서 실제로 구성할 수 있는 대상에 대한 사고를 요구하고, 전체 증명에서 귀류법 가정이 적용되는 부분이 일부분이라는 점에서 (증명6)이 보다 수월한 이해를 돕는 설명적인 증명이라고 생각된다.

이러한 비교는 귀류법 증명의 교육에 있어서 귀류법 가정과 독립적으로 다룰 수 있는 부분을 따로 떼어 먼저 서술함으로써 귀류법 가정 하에서 설명되는 부분을 되도록 줄이는 증명 서술을 고려하도록 한다. 귀류법 가정 하에서 진행되는 사고의 양을 줄이는 것은 이때 발생하는 참이 부정된 부조리한 세계의 연역 규칙에 대한 혼란(Antonini & Mariotti, 2006)을 감쇠시키는 데 도움이 될 것이다. 실제로 Leron(1985)은 참이 부정된 세계의 수학적 대상을 다루는 심리적인 어려움을 논의하면서 교육적 입장에서 이와 같은 접근을 통한 귀류법 증명 서술을 제안하였다.

귀류법 가정이 필요 없는 부분을 분리하여 먼저 서술하는 방법이 모든 귀류법 증명에 적용될 수 있는 것은 아니다. (증명2)는 귀류법 가정에서 모순에 이르기까지 (※)의 한 단계만을 거치고 (증명1)도 '$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$'의 귀류법 가정(②)을 거치지 않고 ③, ④ 에 해당하는 사고를 수행하기는 어렵다. 따라서 귀류법 가정 이후에 진행되는 사고의 양을 줄일 수 있도록, (증명2)의 (※)이나 (증명1)의 ③, ④를 독립된 명제로서 미리 서술해 두는 방안을 고려할 수 있다. 현 교과서에서도 본 명제의 증명을 다루기에 앞서 (※)이나 ③, ④의 증명을 별도의 예제나 문제로 다루는 경우가 많다. 이에 대해 Ⅲ장에서는 일부 교과서에서만 활용되는 비내용 단어의 추가와 같은 서술자의 개입이 보다 설명적인 증명 서술을

위해 필요하다고 제안하였다. 이에 더해 (※)이나 ③, ④에 대한 설명을 별도의 예제나 문제로 다루지 않고 본 명제의 증명에 귀류법 가정보다 앞서 서술하는 것도 고려할 수 있다. 이로써 귀류법 가정 하에서 이루어지는 사고의 양을 줄이면서도 보다 유기적이고 설명적인 서술이 가능할 것이다.

한편, 교과서의 귀류법 대표 예제로 (증명1)이 아닌 다른 예를 선택하는 것도 가능하다는 점에서 (증명6)이나 Leron(1985)이 제안한 귀류법 가정이 필요 없는 부분의 분리 서술 방법은 참고할 만한 가치가 있다고 생각된다.

3. 대우를 이용한 증명법과의 조화로운 서술 및 그 활용

2009 개정과 2015 개정 교육과정 문서에서는 대우를 이용한 증명법과 귀류법의 두 가지 내용을 하나의 성취기준으로 표현하였다. 그것은 비슷하면서도 다른 두 가지 증명법 사이의 관계를 염두에 둔 것으로 판단된다. 논리적 관계에 있는 두 가지 증명법을 적절히 활용하면 Ⅲ.3.에서 살펴 본 것처럼 정당화와 설명 및 이해의 측면이 상호 보완적인 효과를 거둘 수 있을 것으로 생각된다. 교과서에서는 이 두 가지 증명법을 조화롭게 서술하고 활용할 필요가 있을 것이다.

Ⅲ.1.에서 살펴 본 대로 현 수학Ⅱ 교과서에서는 귀류법과 대우를 이용한 증명법과의 관계에 대해 총 9종 중 2종에서 두 가지 모두 간접증명법이라는 언급이나 후자가 전자의 일종이라는 날개단의 부정확한 설명 정도에 그치고 있다. 이러한 상황에서 설명에 이어 제시되는 예제와 문제는 두 증명법을 파악하기 위한 중요한 단서가 된다. 다음은 귀류법을 $p \rightarrow q$ 꼴의 명제에 대해 그 결론을 부정하여 모순을 찾는 것으로 보는 어느 교과서의 대표 예제에 이어지는 문제이다.

> (문제2) 명제 '자연수 a, b에 대하여 ab가 홀수이면 a, b는 모두 홀수이다.'가 참임을 귀류법으로 증명하여라.
> (신항균, 이광연, 박세원, 신범영, 이계세, 김정화 외, 2014: 53)

이 교과서의 관점에서 (문제2)의 답안을 간략히 적으면 다음과 같다.

> a 또는 b가 짝수라고 하자.
> 그러므로 ab는 짝수이다.
> 이것은 ab가 홀수라는 것에 모순이다.

위 증명의 처음 두 줄의 진술은 (문제2)를 대우를 이용한 증명법으로 증명할 때와 다르지 않다. 대우를 이용한 증명법을 공부하고 이어서 귀류법을 공부하는 상황에서 위와 같은 문제의 제시는 귀류법과 대우를 이용한 증명법과의 구별을 어렵게 하여 인지적 혼란을 야기할 수 있을 것이다. $\sim q$ 가 아니라 $p \wedge \sim q$ 를 귀류법 가정으로 삼아 (문제2)의 귀류법 증명을 다시 적으면 다음과 같다.

> ab가 홀수이면서(ⓐ) a 또는 b가 짝수(ⓑ)라고 하자.
> ⓑ에 의해 ab는 짝수이다.
> 이것은 ⓐ에 모순이다.

Ⅱ.2.에서 살펴 본 대로 $p \rightarrow q$ 꼴의 전칭명제에 대해서 귀류법과 대우를 이용한 증명법은 상호 전환이 가능하기는 하지만 엄연히 구분되는 두 가지 증명법이다. 때문에 위의 두 번째 증명과 같이 귀류법 가정을 명시적으로 서술함으로써 $p \rightarrow q$ 꼴의 명제에 대한 두 증명법의 형식적 차이를 분명히 할 필요가 있다고 생각된다. 뿐아니라 현 교과서에서처럼 귀류법으로만 증명되는 명제도 반드시 다루는 것이 바람직할 것이다.

요컨대, 교과서에서 Ⅱ장의 논의를 바탕으로

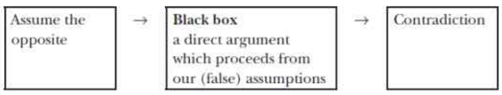
귀류법을 서술하고 귀류법과 대우를 이용한 증명법과의 관계를 밝히며, 하나의 명제를 두 가지 증명법으로 증명하여 비교하도록 서술하는 것을 고려할 수 있다. 또, 이러한 서술의 연장선에서 Ⅲ.3.에서 살펴본 것과 같이 대우를 이용한 증명법이 등장할 때 귀류법을 활용한 보완적인 설명을 추가하는 등 두 가지 증명법을 조화롭게 활용함으로써 정당화뿐 아니라 설명이나 이해를 지원할 수 있을 것이다.

4. 융합교육의 소재로서의 귀류법

과학기술과 사회문화의 여러 분야에서 창의와 융합이 강조되는 가운데 2015 개정 교육과정은 개발 단계에서 인문학적 상상력과 과학기술 창조력을 갖춘 창의융합형 인재의 양성을 표방하였다(교육부, 2014). 개발된 교육과정 문서에서도 "바른 인성을 갖춘 창의융합형 인재(교육부, 2015: 3)"의 양성을 교육과정 구성의 중점 사항으로 언급하였다.

창의융합 역량의 증진은 교육과학기술부가 2011년부터 중점적으로 시행했던 STEAM 교육을 통해서도 추진되어 왔다(백윤수, 박현주, 김영민, 노석구, 박종윤, 이주연 외, 2011). 그러나 적절한 교육과정 편성과 프로그램 개발 및 보급 등이 선결 문제로 지적되는 가운데 학교 현장에서는 교육 구성원들이 STEAM 교육을 위한 합의를 이루지 못하는 경우가 많다(박현주, 변수용, 심재호, 백윤수, 정진수, 2016). 정규 교육과정에서 분절화 된 각 교과를 담당하고 있는 교사들은 과학(S), 수학(M), 예술(A) 등 다양한 분야를 의미 있게 융합하는 방법 및 자료의 개발 등에 부담을 느끼기 쉬울 것으로 생각된다.

이러한 맥락에서 수학교육 분야에서는 수학을 반드시 다른 교과나 분야의 요소와 인위적으로 결합해야만 융합교육이 가능한지에 대한 의문을 제기할 수 있다. Jourdan & Yevdokimov(2016)는 결론을 부정한 후 모순을 찾는 귀류법의 증명 형식에 비해 그 모순이 어떻게 얻어질 수 있는지는 명백하지 않다고 지적하면서 모순을 찾는 과정을 'Black box'로 표현하였다([그림 IV-2]). 절차적 지식에 따른 문제풀이와 달리 귀류법에서 모순에 이르기 위해서는 비어 있는 공간을 채우는 창의성이 필요하다는 것이다. 귀류법의 'Black box'와 같이 우리를 당혹스럽게 하는 진짜 문제의 해결은 예술적인 과정을 필요로 하는 것으로 이해되어 왔다(Stanic & Kilpatrick, 1988, Schoenfeld, 1992에서 재인용). 이러한 이해는 귀류법에서 모순을 찾는 과정처럼 접근 방법이 알려져 있지 않은 수학 문제 상황을 해결하는 교육을 통해서도 적합한 교수학습 방법을 취한다면 융합교육이 가능할 수 있음을 시사한다.



[그림 IV-2] 귀류법 모델(Jourdan & Yevdokimov, 2016: 57)

귀류법은 모순을 찾는 과정뿐 아니라 증명하고자 하는 명제를 부정하는 '귀류법 가정'을 가정하는 사고 자체에서도 융합교육적 요소를 찾을 수 있다. 개념론의 입장에서는, 공준과 그로부터 이어지는 증명의 각 추론 단계의 가정이나 결론들은 실재적 참이라기보다는 공준을 참이라고 상상할 때 형성되는 인식의 장에서 정당성을 인정받는 일종의 가설이다. 증명의 이해를 위해서는 각 추론의 단계마다 가정을 참으로 바라보는 상상이 필요한 것이다. 이때 가정은 그 이전 추론 단계의 결론으로서 선행하는 가정을 참이라고 상상하면 받아들여질 수 있는 정도의 상상력을 요구한다. 반면, 경험적인 발견의 과정을

거쳐 어떤 명제가 참이라는 것을 믿고 있는 경우, 그 명제를 증명하기 위한 귀류법 가정은 실제로 믿고 있는 사실과 반대되는 사실을 가정한다는 점에서 뿔 없는 말을 보며 유니콘을 상상하는 것처럼 매우 의식적인 상상력을 필요로 한다. Aristotle는 의견을 그것의 진위가 필연적이라는 점에서 진위에 얽매이지 않는 상상과 구분하였는데(유원기, 2001), 이런 관점에서 귀류법 가정은 그 명제가 참이라는 자신의 의견을 부정해야 할 정도로 적극적인 사고의 유희로서의 상상이라고 할 수 있다(이기돈, 2016).

요컨대 귀류법은 비어 있는 공간으로서의 '모순을 찾는 과정'의 적합한 탐색을 통해서, 또 믿고 있는 바를 부정할 정도의 적극적인 사고의 유희로서의 귀류법 가정에 대한 반성적 성찰을 통해서, 융합교육적으로 접근할 수 있다. 이러한 접근은 귀류법 증명을 서술하는 교과서 본문에서 직접적으로 언급되기보다 읽을거리 등을 통해 서술되는 것이 바람직할 것으로 보인다. 귀류법을 융합교육적으로 접근하기 위한 교과서의 구체적인 서술에 대해서는 추가적인 논의가 필요하다.

V. 결 론

2009 개정 수학과 교육과정에서는 7차와 2007 개정 교육과정과는 달리 '증명'을 중학교에서 고등학교로 옮기는 한편 공식적으로 도입되지 않았던 '귀류법'을 고등학교 1학년 과목의 '학습내용 성취 기준'에 명시하였다. 귀류법은 증명하고자 하는 명제의 부정을 출발점으로 삼는 독특한 증명법으로서 학생들은 물론 교사들까지도 귀류법의 이해 및 활용에 어려움을 겪는 사례가 보고되어 왔다. 증명 교육이 정당화 이외의 증명의 역할을 소홀히 해 왔다는 지적을 고려하면, 이처럼 어려움을 겪는 귀류법의 교과서 서술을 보다 설명과 이해를 지원하는 방식으로 개선할 필요가 있다. 특히 창의융합 교육을 지향하는 2015 개정 교육과정의 수학과 선택 교육과정 공통과목(수학)에서도 현 2009 개정 교육과정과 유사한 성취기준으로 2018학년도부터 귀류법을 지도하는 바, 이 논문에서는 귀류법에 대한 논리수학적 및 역사적 분석을 바탕으로 현 교과서의 귀류법 도입 및 활용에 대해 살펴보고 발견, 설명, 융합 등의 관점에서 개선 방안을 논의하였다.

귀류법은 $p \rightarrow q$ 꼴의 명제를 포함한 일반적인 명제에 대하여 명제 전체를 부정하고 모순을 찾는 증명법으로서, 대우를 이용한 증명법과 논리적으로 긴밀한 관계를 갖기 때문에 두 가지 증명법을 조화롭게 사용하면 상호 보완적인 효과를 기대할 수 있었다. 또, Aristotle나 Archimedes의 언급을 통해서는 발견을 기반으로 하는 귀류법의 심리적인 기원을 엿볼 수 있었다. 현 교과서의 분석 결과, 전반적으로 이러한 귀류법의 의미 및 특성의 반영과 설명 및 이해의 측면에서의 심리적인 배려가 부족한 교과서들이 많았다.

대부분의 교과서에서 귀류법의 대표 예제로 제시되는 '$\sqrt{2}$는 무리수이다'의 증명에 대해 발견의 과정을 먼저 서술한 후 보다 설명적으로 귀류법 가정을 도입하고 모순을 찾는 방안을 모색하였고, 귀류법 대표 예제로 사용될 수 있는 또 다른 명제인 '소수의 개수는 무한하다'의 귀류법 증명을 중심으로 귀류법 가정이 필요 없는 부분을 분리하여 유기적으로 서술하는 방법의 가능성을 논의하였다. 한편 대우를 이용한 증명법과의 관계에 대한 명시적인 서술과 두 가지 증명법을 구분하고 서로의 관계를 드러내는 데 적합한 예제 및 문제의 제시를 제안하였다. 또, 귀류법은 2015 개정 교육과정이 표방하는 창의융합 교육을 수학교육 분야에서 추진할 수 있는 적절한 교수학습 소재라는 점을 논의하였다.

이 논문의 논의가 2015 개정 수학과 선택 교육과정의 공통과목(수학) 교과서를 집필하는데 있어 도움이 되기를 바라며, 또한 의미 있는 수학 교수학습의 소재로서의 귀류법에 대한 연구가 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8].

교육부(1992). **제6차 고등학교 수학과 교육과정 해설서**.

교육부(2014). **2015 문이과 통합형 교육과정의 총론 주요사항 발표**. 2014.9.24.자 보도자료.

교육부(2015). **초·중등학교 교육과정 총론**. 교육부 고시 제2015-80호 [별책 1].

김중명(2013). **열세 살 딸에게 가르치는 갈루아 이론**. (김슬기, 신기철 역), 서울: 승산.

김창동, 장경윤, 김응환, 문광호, 이병헌, 이채형, 차순규, 박윤근, 이소영, 정지현, 이병하, 김성남, 주정오, 권백일, 장인선(2014). **수학Ⅱ**. 교학사.

나귀수(2014). 수학교사의 증명과 증명 지도에 대한 인식 - 대학원에 재학 중인 교사를 중심으로 -. **수학교육논문집, 28**(4), 513-528.

문교부(1973). **제3차 중학교 교육과정**.

문교부(1981). **제4차 중학교 교육과정**.

박현주, 변수용, 심재호, 백윤수, 정진수(2016). 우리나라 초·중·고등학교의 STEAM 교육 운영 현황 실태조사. **한국과학교육학회지, 36**(4), 669-679.

신항균, 이광연, 박세원, 신범영, 이계세, 김정화, 박문환, 윤정호, 박상의, 서원호, 전제동, 이동흔(2014). **수학Ⅱ**. (주)지학사.

백윤수, 박현주, 김영민, 노석구, 박종윤, 이주연, 정진수, 최유현, 한혜숙(2011). 우리나라 STEAM 교육의 방향. **학습자중심교과교육연구, 11**(4), 149-171.

우정호(2001). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교출판부.

유원기(2001). **아리스토텔레스 영혼에 관하여**. 서울: 궁리출판.

이강섭, 황석근, 김부윤, 심성아, 왕규채, 송교식, 김진석, 김경돈, 주창수, 양인웅, 차주연, 정재훈, 김원일, 조보관, 김원중(2014). **기하와 벡터**. (주)미래엔.

이기돈(2014). **수학 내러티브의 교육적 활용**. 서울대학교 박사학위 논문.

이기돈(2016). 상상의 수학, 상상하는 수학의 교육. **수학교육학연구, 26**(1), 103-119.

인천광역시교육청(2013). **인정도서 심사 예비 합격 공고**. 인천광역시교육청 공고 제2013-127호.

조형미(2009). **증명 평가를 통한 교사의 귀류법 이해**. 서울대학교 석사학위 논문.

홍갑주(2008). **아르키메데스 수학의 교육적 연구**. 서울대학교 박사학위 논문.

황선욱, 강병개, 한길준, 한철형, 권혁천, 김의석, 유기종, 정종식, 김민정(2014). 중**학교 수학 ③**. 좋은책 신사고.

황선욱, 강병개, 김영록, 윤갑진, 김수영, 송미현, 이성원, 도종훈, 이문호, 박효정, 박진호(2014). **수학Ⅱ**. 좋은책 신사고.

황진연, 신보미(2016). 귀류법에 대한 교사 지식 분석 - '교과 내용 지식' 및 '학생의 이해에 대한 지식'을 중심으로 -. **수학교육, 55**(1), 91-106.

Antonini, S., & Mariotti, M. A. (2006). Reasoning in an absurd world: difficulties with proof by contradiction. In *Proceedings of the 30th conference of the International Group for PME (Vol. 2, pp. 65-72)*.

Barnard, T., & Tall, D.(1997). Cognitive units, connections and mathematical proof. In *PME conference* (Vol. 2, pp. 41-48). The program committee of the 18th PME conference.

Epp, S. S.(2010). *Discrete mathematics with applications*. Cengage Learning.

Hammack, R. H. (2013). *Book of Proof*. Virginia Commonwealth University

Hardy, G. H.(2005). **어느 수학자의 변명**. (정회성 역), 서울: 세시.

Hardy, M., & Woodgold, C.(2009). Prime simplicity. *The Mathematical Intelligencer, 31*(4), 44-52.

Heath, T. L.(2002). *The works of Archimedes*. New York: Dover Publications.

Jacquette, D.(2008). Mathematical Proof and Discovery Reductio ad Absurdum. *Informal Logic, 28*(3), 242-261.

Joshi, M. (2015). Contrapositive and Contradiction. In *Proof Patterns* (pp. 33-41). Springer International Publishing.

Jourdan, N., & Yevdokimov, O. (2016). On the analysis of indirect proofs: Contradiction and contraposition. *Australian Senior Mathematics Journal, 30*(1), 55.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

Leron, U.(1985). A direct approach to indirect proofs. *Educational Studies in Mathematics, 16*(3), 321-325.

Lukasiewicz, J., & Wedin, V.(1971). On the principle of contradiction in Aristotle. *The Review of Metaphysics, 24*(3), 485-509.

Mancosu, P. (1992). Aristotelian logic and Euclidean mathematics: Seventeenth-century developments of the Quaestio de certitudine mathematicarum. *Studies in History and Philosophy of Science Part A, 23*(2), 241-265.

Meyer, B. J. F.(1975). *The organization of prose and its effects on memory*. New York: Elsevier.

Reid, D. A., & Dobbin, J.(1998). Why is proof by contradiction difficult? *Proceedings of the Conference of the International Group for PME (22nd, July 12-17, 1998.) Volume 4*, 41.

Schoenfeld, A. H.(1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *The Journal of Mathematical Behavior, 13*(1), 55-80.

Solomon, R. C.(2002). *GCSE mathematics Higher 2*. John Murrary Publishers.

Stanic, G., & Kilpatrick, J.(1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp.1-22). National Council of Teachers of Mathematics.

Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies, 34*(2), 135-151.

A Study on Improvement of Introductions and Applications of 'Proof by Contradiction' in Textbooks

Lee, Gi Don (Kyeongin High School)
Hong, Gapju (Busan National University of Education)

In 2009 revision and 2015 revision mathematics national curriculum, 'proof' was moved to high school from middle school in consideration of the cognitive development level of students, and 'proof by contradiction' was stated in the "success criteria of learning contents" of the first year high school subject while it had been not officially introduced in 7th and 2007 revision national curriculum. *Proof by contradiction* is known that it induces a cognitive conflict due to the unique nature of rather assuming the opposite of the statement for proving it. In this article, based on the logical, mathematical and historical analysis of *Proof by contradiction*, we looked about the introductions and the applications of the current textbooks which had been revised recently, and searched for improvement measures from the viewpoint of discovery, explanation, and consilience. We suggested introducing *Proof by contradiction* after describing the discovery process earlier, separately but organically describing parts necessary to assume the opposite and parts not necessary, disclosing the relationships with *proof by contrapositive*, and using the viewpoint of consilience.

* Key Words : proof by contradiction(귀류법), proof by contrapositive(대우를 이용한 증명법), mathematical discovery(발견), mathematical explanation(설명), consilience(융합)

논문접수 : 2016. 11. 10
논문수정 : 2016. 12. 15
심사완료 : 2016. 12. 20