대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 4, 819 ~ 838. Dec 2016

초등학교 5학년과 6학년의 비례 추론 능력 분석

정 영 옥* · 정 유 경**

본 연구는 비와 비율에 대한 기본적인 내용을 배운 5학년 학생들과 비례와 비례식 및 형식적인 전략까지 배운 6학년 학생들의 비례추론 능력을 비교 분석하고, 초등학교의 비례 추론 지도를 위한 시사점을 제공하고자 하였다. 이를 위해 5학년 131명과 6학년 138명 학생들을 대상으로 다양한 과제로 구성된 비례 추론 검사를 실시하여 성취도와 전략을 분석하고, 일부 면담을 실시하였다. 분석 결과 5학년과 6학년 학생들의 평균은 다소 차이는 있었으나 크지 않았고, 과제 유형별로는 5, 6학년 모두 기하 과제보다는 대수 과제, 질적 과제보다는 양적 과제, 비교 과제보다는 미지값 과제에서 높은 점수를 보였으며, 5, 6학년 모두 형식적 전략보다는 인수 전략과 단위 비율 전략 같은 비형식적 전략을 훨씬 더 많이 사용하였고, 비례 상황과 비 비례 상황을 구분하는 데는 여전히 어려움이 있었다. 이런 결과를 바탕으로 학생들의 비례 추론 지도를 위한 시사점으로 다양한 비례 추론 과제의 도입과 학생들의 유연한 전략의 중시를 제안하였다.

I. 서 론

비례 추론은 수학 내적으로 학교수학의 핵심일 뿐만 아니라 수학 외적으로 많은 학문의 영역과 일상생활에서 매우 중요한 역할을 한다(Ben-Chaim, Keret, & Ilany, 2012; Dole, Clarke, Wright, Hilton, & Roche, 2008; Langrall & Swafford, 2000; Lesh, Post, & Behr, 1988). 비례 추론은 수와 연산 영역에서 분수, 소수, 곱셈, 나눗셈, 도형에서 닮음과 삼각법, 측정에서 단위 환산, 함수에서 기울기나 미분계수, 확률에서 비율, 통계에서의 다양한 자료의 비교 상황 등 수학의 많은 부분과 관련되어 있고, 지리학에서 인구밀도나 축척, 과학에서 속도, 힘, 중력, 농도, 에너지, 경제학에서의 이익과 손실, 역학에서의 운동, 건축이나 예술에서의 다양한 비, 일상생활에서 약이나 음식의 성분 등과 같이 다양한 부분과 관련되어 있다.

이런 비례 추론 능력은 단기간에 걸쳐 발달하는 것이 아니라 장기간에 걸쳐 발달하며, 학생들뿐만 아니라 성인들의 경우에도 비례추론 과제를 해결하는 데 많은 어려움을 보인다(Adjiage & Pluvinage, 2007; Harel, Behr, Lesh, & Post, 1994; Karplus, Pulos, & Stage, 1983; Langrall & Swafford, 2000; Tournaire & Pulos, 1985). 이런 어려움을 겪는 원인으로는 근본적으로 비례 개념 자체가 많은 요소들을 포함하고 있기 때문이기도 하지만, 학생들이 경험하는 과제 유형이 매우 제한적이고 학생들 자신의 비형식적 전략을 사용하는 것이 아니라 형식적 전략을 강조하는 지도 방식 때문이기도 하다(정은실, 2013; 정영옥, 2015; Ben-Chaim et al., 2012).

이런 관점들을 고려하여 비례추론의 의미가

* 경인교육대학교, yochong@ginue.ac.kr (제1 저자)
** 당동초등학교, zucchini60@naver.com (교신저자)

무엇인지, 학생들의 비례 추론 능력은 어떠한지, 학생들의 비례추론 능력을 신장하기 위한 지도 방법은 무엇인지 등에 대한 국내외의 연구들이 지속되어 왔다(고은성・이경화, 2007; 김경선・박영희, 2007; 안숙현・방정숙, 2008; 이종욱, 2006; 정유경・정영옥, 2015; 정은실, 2013; Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto, & Miller, 1998; Lamon, 2005; Shield & Dole, 2013; Van Dooren, De Bock, Janssen, & Verschaffel, 2008). 또한 여러 나라의 교육과정에서도 이런 관점들을 반영하여 초등학교뿐만 아니라 중학교 이후에서도 비례추론을 지속적으로 강조하면서 학생들에게 다양한 과제 유형들을 제공하며 학생들의 비형식적 전략에서 출발하여 좀 더 형식적 절차로 나아갈 수 있도록 지도하고 있다. 예를 들면, 미국은 현재의 교육과정에 해당하는 Common Core State Standards(CCSSI, 2010)에서 중학교 교육과정의 대영역에 비와 비례 영역을 별도로 두어 지속적으로 강조하고 있고, 싱가포르는 중학교 교육과정(CPDD, 2012)의 수와 대수 영역에 비와 비례를 포함하여 지속적으로 강조하고 있으며, 영국은 중학교 교육과정뿐만 아니라 고등학교 교육과정(DfE, 2013, 2014)의 대영역에 비, 비례와 변화율을 별도로 두어 지속적으로 강조하고 있고, 호주는 중학교 교육과정의 수와 대수 영역에서 비와 비율, 비례식과 비례배분을 고등학교 교육과정(ACARA, 2013a, 2013b)에서는 백분율과 비율 등을 지속적으로 강조하고 있다.

그러나 우리나라 교육과정에서는 비례 추론과 관련해서 단기간에 제한된 과제유형을 다루며 학생들의 비형식적 추론 전략을 다루기보다는 형식적 절차를 강조해 왔다(고은성・이경화, 2007; 김경선・박영희, 2007; 김경희・백희수, 2010; 임재훈・이형숙, 2015, 정유경・정영옥, 2015; 정은실, 2013; 홍지연・김민경, 2013). 즉, 학생들은 비와 비율을 배운 후에 주로 대수 과제, 양적 과제, 미지값 과제를 중심으로 비례식의 성질을 이용하는 형식적 전략을 주로 다룬다(교육과학기술부, 2011a, 2011b, 2012). 그러나 이러한 비례 추론 지도 방식의 효과에 대해서는 좀 더 집중적인 논의와 검증이 필요하다.

따라서 본 연구에서는 비와 비율의 기본적인 개념을 배운 5학년 학생들과 비례와 비례식 및 형식적 전략까지 배운 6학년 학생들의 비례 추론 능력 검사를 실시하고 정답률과 전략을 비교 분석함으로써, 우리나라 초등학교에서 비례 추론 지도를 위한 시사점을 제공하고자 한다.

II. 이론적 배경

이 장에서는 비례 추론의 이론적 배경으로 비례 추론의 의미, 비례 추론 과제 유형, 비례 추론 전략에 대해 살펴보고자 한다.

1. 비례 추론의 의미

비례 추론에 대해서는 여러 연구자들의 다양한 관점이 있는데, 본 연구에서는 이런 의견들을 종합하여 비례 추론은 수학적 추론의 한 유형으로 다양한 비례 맥락에서 곱셈적 관계를 인식하고, 곱셈적 관계에서 공변성과 일정성을 이해하며, 양적 추론과 질적 추론을 바탕으로 하는 적절한 곱셈적 전략을 사용하여 문제를 해결하고, 비례 상황과 비(非) 비례 상황을 구별하는 능력을 포함하는 것으로 본다(정영옥, 2015; 안숙현・방정숙, 2008; Cramer, Post, & Currier, 1993; Lanius & Williams, 2003; Post, Behr, & Lesh, 1988).

이 때 공변성은 레몬과 오렌지 원액을 2컵, 3컵의 비로 섞어서 새로운 음료를 만든다고 할 때, 같은 맛의 음료를 만들기 위해서는 레몬이 4

컵이 되면 오렌지는 6컵, 레몬이 6컵이 되면 오렌지는 9컵, … 과 같이 레몬이 2배, 3배, …될 때, 오렌지도 2배, 3배, …와 같이 변하는 것을 이해하는 것이고, 일정성은 2:3=4:6=6:9=…에서 2:3이라는 곱셈적 관계는 본질적으로 변하지 않는 것을 이해하는 것이다.

한편, 질적 추론은 "수를 포함하지 않거나 수에 대한 정보가 부족한 경우의 비교를 말하고, 양적 추론은 필요한 수에 대한 정보를 포함한 비교"를 말한다(Post et al., 1988: p. 79). 일반적으로 양적 추론은 비례 추론을 사용할 수도 있지만 형식적인 연산에 머무를 수도 있으므로, 비의 변화의 방향에 대한 직관적 이해를 바탕으로 하는 질적 추론이 양적 추론보다 선행되거나 병행되어야 한다(Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992: p. 320). 예를 들면, 코코아 음료 A, B가 있을 때 물의 양은 B가 많고 코코아 가루의 양은 같다면, 어느 코코아 음료가 더 진한지를 알아보는 문제와 같이 비의 변화의 방향을 결정하는 질적 추론이 비례 추론에서 강조되어야 한다.

2. 비례 추론 과제 유형

비례 추론 과제 유형은 연구자마다 다양하다. 안숙현·방정숙(2008), Ben-Chaim 외(2012), Cramer 외(1993), Lesh 외(1988), Reys, Lindquist, Lamdin 그리고 Smith(2012)는 미지값 과제, 비교 과제, 질적 추론 과제, Billings(2001)는 양적 과제와 질적 과제, Freudenthal(1983)은 내적비 과제, 외적비 과제, 두 도형의 축소나 확대처럼 개념적으로 연결되어 있으나 비교하는 대상이 공통된 전체의 부분이 아닌 과제로 나누고 대수 과제뿐만 아니라 기하 과제를 중시하고, 양적 과제뿐만 아니라 질적 과제를 강조하였다. Tourniaire와 Pulos(1985)와 Vergnaud(1988)는 미지값 과제와 비교 과제, Van de Walle(2008)는 질적 과제와 양적 과제로 나누고 양적 과제에 미지값 과제, 비교 과제, 닮음 과제로 구분하였다. 한편, 정영옥(2015)은 이런 과제들을 종합하고 다시 분류하여 과제 유형을 세 가지 범주로 구분하여 위에 제시한 모든 과제들을 포괄할 수 있는 틀을 제시하였다. 첫째 범주는 수치적 비례 과제인지 축소나 확대와 관련된 비례 과제인지에 따라 구분한 대수 과제와 기하 과제, 둘째 범주는 구체적인 수를 포함하는 비례 과제인지 아닌지에 따라 구분한 양적 과제와 질적 과제, 셋째 범주는 두 비가 같은지 아닌지를 비교하는 과제인지 세 양을 제시하고 나머지 한 양을 구하는 과제인지에 따라 구분한 비교 과제와 미지값 과제로 이루어진다. 이 때 미지값 과제는 세 양의 크기를 알고 나머지 한 양을 구하는 양적 미지값 과제뿐만 아니라 두 양의 순서를 알고 있을 때, 나머지 두 양 중 어느 것이 더 큰지를 구하는 질적 미지값 과제 유형까지 그 의미를 확장하였다. 이와 같이 세 개의 범주로 나누어 볼 때 비례 추론 과제는 세 가지 범주 각각의 한 유형에 속하므로, 크게 8가지 유형으로 구분된다. 본 연구에서는 이 틀을 사용하여 비례 추론 능력 검사지를 구성할 때 과제 유형으로 대수-양적-비교(ANC), 대수-양적-미지값(ANM), 대수-질적-비교(ALC), 대수-질적-미지값(ALM), 기하-양적-비교(GNC), 기하-양적-미지값(GNM), 기하-질적-비교(GLC), 기하-질적-미지값(GLM)을 고려하였다.

3. 비례 추론 전략

학생들의 비례 추론 전략은 매우 다양한데, 양적 과제와 관련된 전략은 연구가 많이 되어 있으나 질적 과제에 대한 전략 연구는 미흡한 실정이다. 양적 과제와 관련해서 Ben-Chaim 외(2012)는 시행착오 전략, 구성 전략, 합성단위 전략, 단위비율 전략, 전체 부분 전략, 대각선 곱 전략,

Kastberg, D'Ambrosio 그리고 Lynch-Davis(2012)는 질적 추론 전략, Lamon(1993)은 세기와 모델링 전략, 단위화 전략, 시행착오 전략, 단위비율 전략, 구성 전략, 합성 단위 전략 등을 제시하였다. 한편, Langrall과 Swafford(2000)는 임의전략, 덧셈 전략, 세기와 모델링 전략, 구성 전략, 직관적 전략, 단위화 전략, 단위비율 전략, 스칼라 인수 전략, 동치비 전략을 제시하고, 학생들의 비례 추론 전략의 수준을 비(非) 비례 추론 수준, 비형식적 추론 수준, 양적 추론 수준, 형식적 추론 수준으로 구분하여, 각 수준에 적합한 전략으로 분류하였다. 정영옥(2015)은 Langrall과 Swafford (2000)의 수준을 참조하고 위에서 제시한 다른 연구자들의 전략을 더 보완하여 양적 과제와 관련된 학생들의 비례 추론 전략을 수준별로 구분하고 여러 전략을 동시에 사용하는 혼합 전략을 추가하였다. 본 연구에서는 Langrall과 Swafford (2000)와 정영옥(2015)의 틀을 따라 학생들의 비례 추론 전략을 분석하였다. 양적 과제와 관련된 비례 추론 전략은 <표 II-1>과 같다.

수준 0은 비 비례 추론의 단계로 추측이나 시각적 단서를 사용하고, 문제 상황에서 곱셈적 관계를 인지하지 못하며, 수, 연산, 전략을 임의로 사용하며 덧셈적 관계를 사용하기도 하지만, 두 대상을 연결할 수 없고, 정답을 제시하지 못한다. 이 수준에서 사용하는 임의 전략은 근거가 명확하지 않은 것을 의미하며, 덧셈 전략은 곱셈적 관계가 아닌 차와 같은 덧셈적 관계를 적용하는 것을 의미한다.

수준 1은 비례 상황에 대한 비형식적 추론 단계로 문제 상황에 대해 곱셈적으로 사고하며, 그림 또는 구체물을 이용해서 상황을 이해하고, 질적 비교를 하기도 한다. 이 수준에서 사용하는 직관적 전략은 양을 여러 번에 나누어 분배하는 것, 세기 전략은 뛰어 세기와 같은 세기 방법을 사용하는 것, 모델링 전략은 그림이나 구체물을 사용하는 것, 질적 비교 전략은 주어진 수들을 사용하여 정확히 계산하는 것이 아니라 수를 어림하는 것을 의미한다.

수준 2는 양적 추론의 단계로 곱셈적 사고를 하며, 구체물 없이 추론하거나 모델을 사용하는 경우에는 그 모델을 수치적 계산과 연결할 수 있다. 이 수준에서 사용하는 구성 전략은 한 비 내에서 관계를 정하고 이를 덧셈에 의해 확장하는 것, 단위화 전략은 두 쌍의 비에서 하나의 비를 다른 비를 기준으로 재해석하는 것, 합성 단위 전략은 단위들의 단위를 사용하는 것, 단위 비율 전략은 하나에 해당하는 비를 구하는 것, 조정 전략은 단위 비율 대신 최소공배수를 사용하는 것, 전체 부분 전략은 a:b를 a/(a+b): b/(a+b)의 전체 부분 관계로 재해석하는 것, 인수 전략은 한 비의 곱셈적 관계를 다른 비로 확장하는 것, 동치 분수 전략은 두 비를 분수로 표현하여 동치 분수를 사용하는 것을 의미한다.

수준 3은 형식적 비례 추론 단계로 비의 동치 관계를 이해하고 변수를 사용해서 비례식을 세운다. 이 수준에서 사용하는 형식적 전략으로 비례식 전략은 내항의 곱과 외항의 곱은 같다는

<표 II-1> 학생들의 양적 비례 추론 전략

추론 수준		전략
수준 0	비 비례 추론 수준	임의 전략, 덧셈 전략
수준 1	비형식적 추론 수준	직관적 전략, 세기 전략, 모델링 전략, 질적 비교 전략
수준 2	양적 추론 수준	구성 전략, 단위화 전략, 합성 단위 전략, 단위 비율 전략, 조정 전략, 부분 전체 전략, 인수 전략, 동치 분수 전략
수준 3	형식적 추론 수준	비례식 전략, 대각선 곱 전략

비례식의 성질을 이용하는 것, 대각선 곱 전략은 두 비를 분수로 표현하여 대각선 곱이 같음을 이용하는 것을 의미한다.

질적 과제와 관련된 비례 추론 전략은 정영옥(2015)과 본 연구에서 나타난 학생들의 반응을 기초로 1차원 전략, 2차원 전략, 특수화 전략으로 구분하였다. 1차원 전략은 두 쌍의 양 중 오직 한 쌍의 양들의 관계만을 고려하는 것, 2차원 전략은 두 쌍의 양들의 관계를 모두 고려하는 것, 특수화 전략은 특정한 그림을 사용하거나 구체적인 수들을 사용하는 것을 말한다. 일부 학생들은 질적 과제들을 해결할 때 질적 비교 전략, 인수 전략, 동치 분수 전략과 같은 양적 과제와 관련된 전략을 사용하기도 하였지만, 본 연구에서는 일관성을 위해서 질적 과제를 분석할 때는 1차원, 2차원, 특수화 전략으로 구분하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 방법 및 대상

본 연구는 경기도에 소재한 D 초등학교의 5학년 학생 171명과 6학년 학생 173명을 대상으로 조사 연구의 방식으로 진행되었다. D 초등학교는 학생들의 학력 수준과 학부모들의 사회·경제적 수준을 고려해 볼 때 평범한 수준에 속하는 학교이다. 검사 시점을 기준으로 연구에 참여한 5학년 학생들은 3개월 전에 비와 비율 단원을 학습하였고, 6학년 학생들은 6개월 전에 비례식 단원을 학습한 상태였다. 연구 대상들이 학습한 내용을 각 단원의 성취 수준을 통하여 좀 더 상세하게 살펴보면 <표 III-1>과 같다(교육부, 2014).

<표 III-1>에 제시된 바와 같이, 5학년 학생들은 비와 비율의 의미와 비율의 여러 가지 표현 방법을 학습하였으며, 6학년 학생들은 비례식을 이해하고 활용하며, 비의 성질을 학습한 후에 비례식의 성질, 즉 내항의 곱과 외항의 곱이 같다는 성질을 이용하여 비례식을 해결하는 형식적인 비례 추론 전략을 학습하였다. 해당 수학 수업은 수학 교과서를 주교재로 하는 학교 현장에서 이루어지는 일반적인 수업 방식으로 진행되었다.

2. 검사 도구

본 연구에서는 비례 추론과 관련된 선행 연구(Ben-Chaim et al., 2012; Billings, 2001, The School Mathematics Project, 2003)에서 사용한 비례 추론 과제를 기반으로 다양한 유형으로 구성된 20개의 문항으로 이루어진 비례 추론 검사지를 마련하였다. 문항의 맥락은 우리나라 학생들이 공감할 수 있는 상황으로 재구성하여 문항에 관한 학생들의 이해도를 향상시키고자 하였다.

마련된 검사지에 대한 예비 검사를 연구 대상이 속한 초등학교의 6학년 1개 학급에 2014년 10월과 11월에 걸쳐 2차례 진행하였다. 예비 검

<표 III-1> 비례 추론 관련 단원의 성취 수준

학년	단원명	성취 수준
5	비와 비율	①두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타낼 수 있다. ②두 양 사이의 비와 비율의 의미를 이해한다. ③비율을 여러 가지 방법으로 나타낼 수 있다.
6	비례식	①비례식을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ②비례식의 성질을 이용하여 간단한 비례식을 풀 수 있다.

사를 실시한 결과 상대적으로 지나치게 높거나 낮은 정답률을 보인 6개의 문항은 비례 추론 능력을 측정하는 데 다소 적절하지 못한 측면이 있다고 판단하여 검사지에서 제외하였다. 또한 검사지에 대한 학생들의 반응을 기반으로 문항에 대한 학생들의 이해도를 높이기 위하여 좀 더 학생 친화적이고 자연스러운 진술이 될 수 있도록 수정·보완하는 과정을 거쳤다. 마지막으로 검사지의 타당도에 대한 수학 교육 전문가 3인의 검토를 거쳐서 총 14문항으로 이루어진 최종 검사지를 완성하였다.

검사지의 각 문항의 과제 유형과 구체적인 맥락은 <표 III-2>와 같다. 문항의 구성을 과제 유형의 범주에 따라 살펴보면 대수 과제 7문항과 기하 과제 7문항, 양적 추론 과제 8문항과 질적 추론 과제 6문항, 비교 과제 8문항과 미지값 과제 6문항으로 구분된다.

3. 자료 수집 및 자료 분석

본 검사는 2014년 12월에 40분 동안 7문항씩 총 2회에 걸쳐 실시하였으며, 학생이 요구할 경우 10분의 시간을 더 제공하였다. 검사를 실시하기에 앞서 연구자들이 각 학급에 방문하여 학생들에게 검사를 실시하는 의도를 설명하고, 성실하게 임하여 줄 것을 부탁하였다. 또한 연구자들은 학생들이 검사에 임하는 과정에서 필요한 경우 연구의 결과에 영향을 미치지 않는 범위 내에서 문항에 대한 학생들의 질문에 답변하였다. 학생들이 해결한 검사지를 모두 수거한 후, 문항에 대한 답변의 성실성을 살펴 5학년 131명, 6학년 138명의 검사지를 선별하였다. 학생들이 문항

<표 III-2> 비례 추론 능력 검사지 문항

문항	유형		내용
1	대수-양적-비교	ANC	매실주스 A. B의 총량이 40㎖, 80㎖이고, 매실액은 각각 20㎖. 30㎖가 들어 있어 A의 맛이 더 진할 때, A에는 매실액을 10㎖, B에는 물을 10㎖ 더 넣은 후 농도 비교하기
2	대수-양적-비교	ANC	60㎢ 내 1000마리와 100㎢ 내 1500마리 길고양이의 밀도 비교하기
3	대수-양적-비교	ANC	버스와 도보로 등교하는 학생들의 비가 20:15, 18:12인 두 반의 비 비교하기
4	대수-양적-미지값	ANM	6개에 1950원인 초콜릿 20개의 구매 비용 구하기
5	대수-양적-미지값	ANM	자전거로 8㎞를 가는 데 30분이 걸릴 때, 20㎞를 가는데 걸리는 시간 구하기
6	대수-질적- 비교	ALC	총량은 A>B이고, 농도는 A=B인 코코아 A, B에 동일한 양의 코코아 가루를 첨가하였을 때 농도 비교하기
7	대수-질적-미지값	ALM	코코아 A에는 코코아 가루를 B에는 우유를 첨가하였을 때, 진한 코코아 구하기
8	기하-양적-비교	GNC	3×2인 사진을 18×12로 확대 가능한지 판단하기
9	기하-양적-미지값	GNM	3×5인 사진을 6×□로 확대했을 때 □의 값 구하기
10	기하-양적-미지값	GNM	15×10인 사진에 필요한 밀폐제가 400g일 때, 30×20인 사진에 필요한 밀폐제의 양 구하기
11	기하-질적-비교	GLC	이중 확대되는 과정을 나타내는 그림 선택하기
12	기하-질적-비교	GLC	왜곡되지 않고 축소·확대된 사진 선택하기(사진 외형의 축소·확대)
13	기하-질적-비교	GLC	비율에 맞게 확대·축소된 사진 선택하기
14	기하-질적-미지값	GLM	제시된 그림자를 참고하여 사물의 그림자 그리기

을 해결한 결과는 정답, 오답, 무응답으로 구분하였고, 정답의 경우 1점, 오답과 무응답에 대해서는 0점을 부과하였다. 또한 정답을 제시한 학생들이 사용한 비례 추론 전략을 양적 추론 전략과 질적 추론 전략의 종류에 따라 분류하였으며, 이 과정은 연구자 2명이 교차 분석으로 검증하는 과정을 거쳤다. 학생들의 정답률과 비례 추론 전략의 비율에 대한 분석 및 t 검정에는 통계 프로그램 SPSS v18.0을 사용하였다. 학생들이 해결한 검사지를 분석하는 과정에서 학생들의 사고 과정에 대한 좀 더 상세한 이해를 위하여 일부 학생들에 대한 개별 면담을 실시하였다.

IV. 연구 결과

이 장에서는 학생들의 비례 추론 능력을 분석하기 위하여 5학년과 6학년 학생들의 전반적인 정답률과 학년별, 문항별, 과제 유형별 정답률을 살펴보고, 학년과 과제 유형에 따라 정답률이 차이를 보이는가에 대해 살펴보았다. 또한 5학년과 6학년의 정답자들이 어떠한 비례 추론 전략을 사용하였는지 상세히 알아보고, 학년에 따라 학생들이 사용한 비례 추론의 전략의 유형에 차이점이 존재하는지에 관하여 살펴보았다.

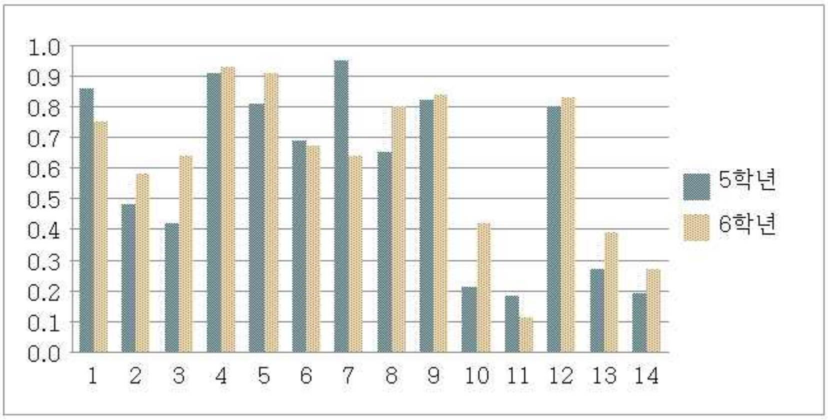
1. 전체 정답률과 문항별 정답률

5학년과 6학년 각각의 문항별 정답률과 전체 문항별 정답률을 살펴보면 <표 IV-1>과 같다. [그림 IV-1]은 각 학년의 문항별 정답률을 그래프로 나타낸 것이다.

<표 IV-1>을 보면 5・6학년 전체 정답률은 0.61이었으며, 대수-양적-미지값 과제인 문항 4의 정답률이 0.92로 가장 높았으며, 기하-질적-비교 과제인 문항 11의 정답률이 0.14로 가장 낮았다.

<표 IV-1> 문항별 5·6학년 정답률

문항 / 학년	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	평균
	ANC	ANC	ANC	ANM	ANM	ALC	ALM	GNC	GNM	GNM	GLC	GLC	GLC	GLM	
5(N=131)	.86	.48	.42	.91	.81	.69	.95	.65	.82	.21	.18	.80	.27	.19	.59
6(N=138)	.75	.58	.64	.93	.91	.67	.64	.80	.84	.42	.11	.83	.39	.27	.63
전체	.81	.53	.53	.92	.86	.68	.80	.73	.83	.32	.14	.82	.33	.23	.61



[그림 IV-1] 문항별 5・6학년 정답률

문항 11의 경우 이중 확대 상황으로 원래의 대상과 한 번 확대한 대상은 비례 관계가 성립하고 원래의 대상과 이중 확대한 대상은 비례 관계가 성립하지 않기 때문에 학생들은 이러한 관계에 많은 혼란을 보였다. 학생들이 확대 전·후의 변화에서 곱셈적 관계를 찾는 경우 정답을 찾을 수 있으나, 덧셈적 관계로 파악하는 경우 오답을 찾게 된다. 학생 반응을 살펴보면 덧셈적 관계로 이해하고 일정한 길이로 변화하는 답을 선택하는 오답 및 무응답의 비율이 0.86로 상당히 높게 나타났다.

학년에 따른 전체 정답률을 살펴보면, 5학년은 0.59, 6학년은 0.63으로 6학년이 다소 높게 나타났다. 학년에 따른 문항별 정답률을 살펴보면 14개 문항 중 1, 6, 7, 11번 문항에서 5학년의 정답률이 높았으며, 이를 제외한 10개 문항에서 6학년의 정답률이 높게 나타났다. 학년에 따른 정답률과 학년에 따른 문항별 정답률의 차이에 대해 좀 더 상세히 살펴보기 위하여 t-검정을 실시하였다.

<표 IV-2>는 학년에 따른 전체 정답률에 대한 t-검정을 실시한 결과이다. <표 IV-2>를 살펴보면 학년 사이의 전체 정답률에 관한 t-검정의 결과 p값은 0.016으로 학년에 따라 정답률에서 유의미한 차이가 존재함을 알 수 있었다. 학년간 정답률 평균의 차이는 0.038로 전체가 1.0임을 고려할 때 그리 크다고 보기 어려우나, 학년 간에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다.

다음으로 <표 IV-3>은 학년에 따른 문항별 정답률에 대한 t-검정을 실시한 결과이다. <표 IV-3>을 살펴보면, 학년에 따른 문항별 정답률에서 유의미한 차이가 있는 것으로 나타난 문항은 총 7개로 문항 1, 3, 5, 7, 8, 10, 13이다. 문항 1과 7의 경우 5학년의 정답률이 더 높았으며, 나머지 5개 문항에서는 6학년의 정답률이 더 높았다. 문항 1은 대수-양적-비교 과제이며, 문항 7은 대수-질적-미지값 과제로 두 문항 모두 대수 과제이며 용액의 농도와 관련되는 맥락을 바탕으로 한다는 공통점을 가지고 있다. 6학년의 정답률이 5학년의 정답률보다 높은 5개 문항의 과제

<표 IV-2> 학년에 따른 전체 정답률의 비교

학년	응답수	평균	표준편차	t	유의확률(p)
5	131	.59	.492	-2.417	.016*
6	138	.63	.484		

*p <0.05

<표 IV-3> 학년에 따른 문항별 정답률의 비교

문항	1	2	3	4	5	6	7
	ANC	ANC	ANC	ANM	ANM	ALC	ALM
t	2.427	-1.625	-3.653	-.590	-2.271	.365	6.645
유의 확률(p)	.016*	.105	.000*	.556	.024*	.716	.000*
문항	8	9	10	11	12	13	14
	GNC	GNC	GNC	GLC	GLC	GLC	GLM
t	-2.887	-.354	-3.727	1.728	-.674	-2.179	-1.510
유의 확률(p)	.004*	.724	.000*	.085	.501	.030*	.132

*p <0.05

유형을 살펴보면 대수 과제는 2개, 기하 과제는 3개, 양적 추론 과제는 4개, 질적 추론 과제는 1개, 비교 과제는 3개, 미지값 과제는 2개로 질적 추론 과제보다는 양적 추론 과제가 많았고, 대수 과제보다는 기하 과제가, 미지값 과제보다는 비교 과제가 조금 더 많았다.

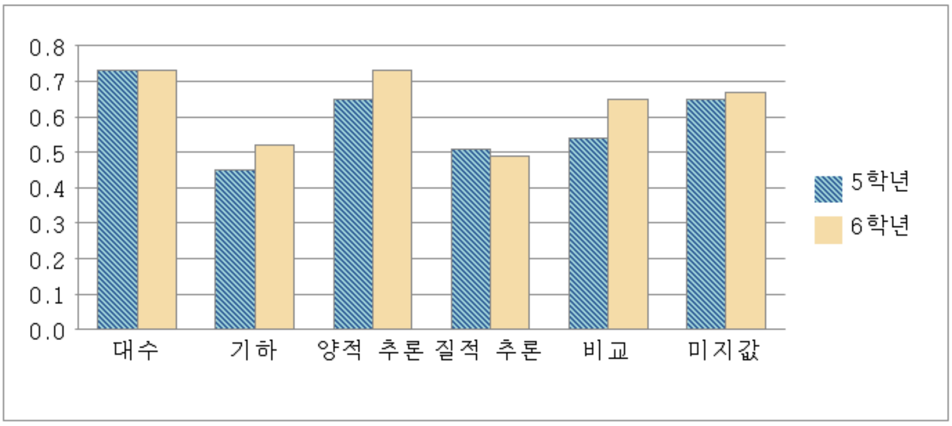
2. 과제 유형별 정답률

학년에 따라 정답률의 유의미한 차이를 보이는 문항들 사이의 좀 더 명확한 특성을 알아보고자 과제 유형으로 구분하여 정답률을 알아보았다. <표 IV-4>는 과제 유형별 5・6학년 정답률을 나타낸 것이고, [그림 IV-2]는 이를 그래프로 나타낸 것이다.

<표 IV-4>와 같이 과제 유형별로 5・6학년의 전체 정답률을 살펴보면 대수, 양적 추론, 미지값, 비교, 질적 추론, 기하의 순으로 대수, 양적 추론, 미지값 과제의 정답률이 상대적으로 높게 나타났다. 대수와 기하 과제는 0.24의 가장 큰 차이를 나타내었으며, 다음으로 양적・질적 추론 과제의 차는 0.19, 비교와 미지값 과제의 차는 0.06을 보였다. 이러한 큰 차이를 보이는 요인으로 수학 교과서(교육과학기술부, 2011a, 2012)에서 주로 다루는 과제 유형이 5・6학년 모두 대수 과제, 양적 추론 과제, 미지값 과제라는 사실을 들 수 있다. 각 학년의 과제 유형별 정답률을 살펴보면 6학년은 대수, 양적 추론, 미지값, 비교, 기하, 질적 추론 과제의 순이었고, 5학년은 대수, 양적 추론, 미지값, 비교, 질적 추론, 기하 과제의 순이었다. 5・6학년 모두 대수, 양적 추론, 미지값 과제의 정답률이 높은 편이라는 공통점이 존재하였으며, 가장 낮은 정답률을 보인 과제 유형이 5학년의 경우 기하 과제, 6학년의 경우 질적 추론 과제라는 차이점을 보였다. 이러한 차이점은 6학년들은 기하 과제를 다루었기 때문

<표 IV-4> 과제 유형별 5·6학년 정답률

학년 \ 유형	대수	기하	양적 추론	질적 추론	비교	미지값
5	.73	.45	.65	.51	.54	.65
6	.73	.52	.73	.49	.65	.67
전체	.73	.49	.69	.50	.60	.66



[그림 IV-2] 과제 유형별 5・6학년 정답률

<표 IV-5> 학년에 따른 과제 유형별 정답률의 비교

유형	대수	기하	양적 추론	질적 추론	비교	미지값
t	0.029	-3.337	-4.362	1.095	-2.441	-0.824
유의 확률(p)	0.977	0.001*	0.000*	0.274	0.015*	0.410

*$p < 0.05$

이지만 그 차이는 미미함을 알 수 있다.

과제 유형별로 5·6학년의 정답률을 비교해 보면, 6학년이 기하 과제에서 0.07, 양적 추론 과제에서 0.08, 비교 과제에서 0.06, 미지값 과제 0.02만큼 높은 정답률을 보였다. 반면 대수 과제의 경우 5·6학년의 정답률이 동일하였고, 질적 추론 과제에서는 5학년의 정답률이 0.02만큼 더 높게 나타났다. 학년 간 과제 유형별 정답률의 차이에 대해 좀 더 자세히 알아보기 위해 t-검정을 실시하였다. 그 결과는 <표 IV-5>와 같다.

<표 IV-5>를 보면 기하, 양적 추론, 비교 과제에서 5·6학년의 정답률 사이에 유의미한 차이가 있으며, 이 3가지 과제 유형에서 6학년의 정답률이 더 높았다. 일반적으로 이러한 결과는 6학년 학생들이 5학년 학생들에 비해 비례 추론 과제를 더 많이 학습한 효과라 볼 수 있고, 특히 기하 과제의 경우는 6학년만 다루기 때문이라 할 수 있다.

반면, 질적 추론 과제에서 5·6학년의 정답률 사이에 유의미한 차이는 나타나지 않았지만 다른 유형의 과제와는 달리 5학년의 정답률이 더 높게 나타난 점은 주목할 만하다. 질적 추론 과제에서 5학년의 정답률이 높았던 문항은 3개인데, 그 중 2개는 용액의 농도에 관한 맥락이고, 1개는 이중 확대에 관한 맥락으로 5·6학년 모두에게 친숙하지 않은 문항이어서 전체적인 정답률은 매우 낮았지만 오히려 5학년 학생들이 더 높은 정답률을 보였다. 또한 대수 과제에서 5·6학년의 정답률이 동일하게 나타난 점도 대수 과제 중 1개 문항에서 5학년이 6학년보다 높은 정답률을 보인 것과 관련이 있으며 이 문항 또한 용액의 농도에 관한 맥락이었다.

용액의 농도에 관한 과제에서 5학년의 정답률이 더 높게 나타난 요인으로 5학년 1학기의 과학에서 용액의 농도에 관해 학습한 것을 생각해 볼 수 있다. 과학 교과서(교육부, 2016, pp. 126-127)에 제시된 학습 내용을 살펴보면 용액의 진하기의 의미를 제시하고, 200㎖의 물에 각각 백설탕 1순가락과 25순가락을 녹인 두 설탕물의 농도를 비교하는 활동이 포함되어 있다. 이 과정에서 5학년 학생들은 두 용액의 농도를 비교하는 자연스러운 사고 과정을 통하여 농도 개념을 학습할 수 있었던 것으로 판단된다. 이러한 점이 5학년 학생들이 용액의 농도와 관련된 질적 추론 과제와 대수 과제의 해결에 영향을 미쳤을 것으로 생각된다. 물론 6학년도 해당 내용을 학습하였지만, 연구가 이루어진 시점에서는 1년 이상의 시간이 경과한 관계로 5학년에 비해 영향을 받은 정도가 낮았을 것으로 보인다.

3. 비례 추론 전략 분석

학생들은 비례 추론 과제를 해결하면서 여러 가지 비례 추론 전략을 사용하였다. 이에 정답을 제시한 학생들이 사용한 비례 추론 전략을 크게 양적 추론과 질적 추론 과제에 사용한 전략으로 구분하여 분석하였다. 이를 통하여 학생들이 주로 사용하는 비례 추론 전략의 종류와 수준을 알아보고, 5·6학년 사이에 차이점이 있는지 살펴보았다.

가. 양적 추론 과제에서 사용된 비례 추론 전략

5·6학년이 양적 추론 과제의 해결 과정에서 사용한 비례 추론 전략과 수준을 살펴보면 <표 IV-6>과 같다. <표 IV-6>을 보면 전체 학생이 양적 추론 과제의 해결에 사용한 전략의 수준은 수준 3이 11.7%, 수준 2가 70.2%, 수준 1이 16.6%로 86.8% 이상의 학생들이 비형식적 전략을 사용하였다. 비례 추론 전략 중 가장 많이 사용한 순서로 살펴보면, 인수 전략이 27.0%, 단위 비율 전략이 25.9%로 나타났다. 각각의 사용 비율은 형식적 전략의 사용 비율의 2배에 해당하며, 두 전략의 사용 비율은 52.9%로 전체의 절반을 넘어선다.

양적 추론 과제의 해결에 사용된 비례 추론 전략의 사용 비율을 학년별로 살펴보면, 5학년은 수준 3이 5.5%, 수준 2가 75.3%, 수준 1이 17.6%로 92.9% 이상의 학생들이 비형식적 전략을 사용하였다. 또한 6학년은 수준 3이 16.8%, 수준 2가 66.2%, 수준 1은 15.7%로 형식적 전략인 비례식 전략을 학습하였음에도 불구하고, 81.9% 이상의 학생들이 비형식적 전략을 사용하였다. 5·6학년이 가장 많이 사용한 전략은 인수 전략과 단위 비율 전략으로 각 학년에서의 사용 비율은 큰 차이를 보이지는 않았으며, 그 다음으로 많이 사용한 전략을 5학년은 합성단위 전략, 6학년은 비례식 전략을 사용한 것으로 나타났다.

<표 IV-7>은 학생들이 양적 추론 과제를 해결하는 데 사용한 주요한 비례 추론 전략인 인수, 단위 비율, 합성 단위, 비례식 전략의 예를 학년

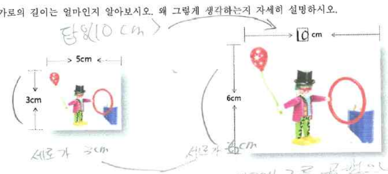
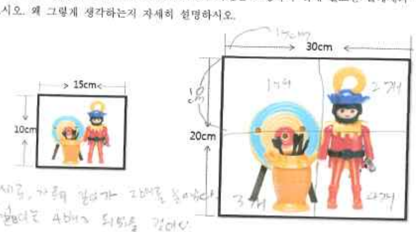
<표 IV-6> 양적 추론 과제에서 사용한 학년별 비례 추론 전략

학년	문항	유형	정답수	수준 3	수준 2					수준 1	혼합
				비례식	인수	단위 비율	합성 단위	단위화	조정	질적 비교	
5	1	ANC	113	·	14	16	·	·	·	83	·
	2	ANC	63	·	·	36	7	3	15	2	·
	3	ANC	55	·	·	·	·	10	7	32	6
	4	ANM	118	5	·	99	14	·	·	·	·
	5	ANM	106	5	10	37	40	9	·	·	5
	8	GNC	85	9	74	·	·	·	·	2	·
	9	GNM	108	15	93	·	·	·	·	·	·
	10	GNM	28	3	11	·	·	14	·	·	·
	전체(%)		676	37 (5.5)	202(29.9)	188(27.8)	61(9.1)	36(5.3)	22(3.2)	119 (17.6)	11 (1.6)
					509(75.3)						
6	1	ANC	103	·	2	25	·	·	·	76	·
	2	ANC	80	·	·	57	5	2	16	·	·
	3	ANC	88	14	·	·	1	·	20	50	3
	4	ANM	128	18	·	96	13	·	·	·	1
	5	ANM	125	40	12	19	33	14	·	·	7
	8	GNC	111	12	98	·	·	·	·	1	·
	9	GNM	116	39	77	·	·	·	·	·	·
	10	GNM	58	13	11	·	1	33	·	·	·
	전체(%)		809	136 (16.8)	200(24.7)	197(24.4)	53(6.7)	49(6.0)	36(4.4)	127 (15.7)	11 (1.3)
					535(66.2)						
전체(%)			1485	173 (11.7)	402(27.0)	385(25.9)	114(7.7)	85(5.7)	58(3.9)	246 (16.6)	22 (1.5)
					1044(70.2)						

별로 제시한 것이다. <표 IV-7>에서 인수 전략을 사용한 예를 살펴보면, 5학년 학생은 넓이가 150㎠인 사진에 밀폐제가 400g이 필요하기 때문에 4배 넓은 600㎠인 사진에는 밀폐제도 4배인 1600g이 필요하다고 답하였다. 6학년 학생은 확대된 사진의 가로의 길이를 구하는 문항에서 사진 세로의 길이가 2배 늘었으므로 가로의 길이도 2배 늘었다는 방식으로 문항을 해결하였다.

다음으로 단위 비율 전략을 사용한 예를 살펴보면, 5학년 학생은 6개에 1950원인 초콜릿 20개의 값을 구하는 문항을 초콜릿 1개의 값을 구해 20배하는 방법으로 해결하였다. 6학년 학생은 고양이가 각 마을에 60㎢에 1000마리, 100㎢에 1500마리가 있을 때 고양이를 자주 볼 수 있는 곳을 선택하는 문항을 고양이 한 마리가 차지하는 넓이를 구하고 이를 비교하여 해결하였다. 합성 단

<표 IV-7> 양적 추론 과제에 정답자가 사용한 비례 추론 전략의 예

전략	5학년	6학년
인수	3) 효주는 벽에 전시할 사진이 손상되지 않도록 특수한 밀폐제로 코팅을 하였다. 15×10(cm)의 사진을 코팅하는 데 밀폐제 400g이 필요하다면, 30×20(cm)의 사진을 코팅하기 위해 필요한 밀폐제의 양은 얼마인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오.  ① : 150 → 400 (↓×4 ↓×4) ② : 600 → 1600 답 : 1600g	1) 승민이는 한 손님이 맡긴 사진을 확대하였다. 오른쪽 사진은 왼쪽 사진을 확대한 것이다. 확대된 사진의 가로의 길이는 얼마인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오. 답 : 10cm  세로가 3cm 세로가 6cm 6÷3=2, 세로에 2를 곱했으니 가로에도 2를 곱하면 10cm가 된다.
단위 비율	2) 유경이는 동물원 매점에 가서 6개에 1950원인 초콜릿 20개를 샀다. 초콜릿을 사는데 든 비용은 얼마인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오. 1950÷6=325 (한개의 값) 325×20=6500 (전체값) 따라서 초콜릿 20개를 사는데 든 비용은 6500원이다. 답 : 6500원	3) 경희는 집으로 돌아오는 길에 길고양이들을 보았다. 경희네 마을에는 약 1000마리의 길고양이가 있고, 혜정이네 마을에는 약 1500마리 있다. 경희네 마을의 넓이는 총 60㎢, 혜정이네 마을은 총 100㎢이다. 길고양이들이 마을 전체에 고르게 퍼져 있다고 한다면, 길고양이를 더 자주 볼 수 있는 마을은 어느 곳인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오. 경희네 마을이다. 경희네 길고양이 한 마리 당(평균) 차지하는 땅은 60÷1500 = 0.04 ㎢이다. 경희네에서는 0.04㎢ 당 한마리씩 볼수있다. 혜정이네 길고양이 한마리당(평균) 차지하는 땅은 100÷1500= 약 0.06㎢이다. 혜정이네에는 0.06㎢ 당 한마리씩 볼수있다 0.04㎢ < 0.06㎢ 이므로 경희네 마을에서 더 자주 볼수있다
합성 단위	3) 효주는 벽에 전시할 사진이 손상되지 않도록 특수한 밀폐제로 코팅을 하였다. 15×10(cm)의 사진을 코팅하는 데 밀폐제 400g이 필요하다면, 30×20(cm)의 사진을 코팅하기 위해 필요한 밀폐제의 양 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오.  400×4=1600g의 밀폐제를 사용해야 한다.	2) 유경이는 동물원 매점에 가서 6개에 1950원인 초콜릿 20개를 샀다. 초콜릿을 사는데 든 비용은 얼마인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오. 3⟌1950 = 650 2개에 650원 이므로 20개는 650×10 = 6500 6500원
비례식	유경이는 동물원 매점에 가서 6개에 1950원인 초콜릿 20개를 샀다. 초콜릿을 사는데 든 비용은 얼마인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오. 6:1950 = 20:□ 비례식에서 외항과 내항의 곱은 같으므로 1950×20 = 6×□ 39000 = 6×□ 39000 = 6×6500 □= 6500 으로 초콜릿을 사는데 든 비용은 6500원이다	유경이는 자전거로 8km를 가는 데 30분이 걸렸다. 자전거를 타고 동일한 속도로 20km를 가는 데 걸리는 시간은 얼마인지 알아보시오. 왜 그렇게 생각하는지 자세히 설명하시오. 위의 문제로 비례식을 세운다면 거리 : 시간 = 거리 : 시간으로 비례식을 세울수있다. 따라서 8 : 30 = 20 : x 이다. 이 때 외항의 곱과 내항의 곱은 같다는 성질을 이용하여 풀면 600 = 8x 따라서 x = 75이다 그러므로 1시간 15분이 걸린다.

위 전략을 사용한 예를 살펴보면, 5학년 학생은 확대되기 전 사진을 하나의 단위로 보고, 확대된 후의 사진에 단위가 4번 포함됨을 이용하여 필요한 밀폐제의 양을 구하였다. 6학년 학생은 6개에 1950원인 초콜릿이 2개일 때 650원이라는 합성 단위를 만들어 초콜릿 20개의 값을 구하였다. 다음으로 비례식 전략을 사용한 예를 보면, 학생들은 비례식을 세우고 내항의 곱과 외항의 곱이 같다는 비례식의 성질을 이용하여 값을 구하였다.

정답자들이 사용한 비례 추론 전략과 구체적 예를 살펴본 바를 종합하여 보면, 문항의 맥락이나 특성의 영향으로 학생들이 해결 과정에서 특정한 비례 추론 전략을 쉽게 떠올리거나, 활용이 용이한 경우에는 굳이 비례식을 사용하지 않아도 문제를 해결할 수 있었던 것으로 판단된다. 그러나 다른 측면에서 보면 비례식을 배운 경우 문항의 맥락이나 특성과 관련 없이 공통적으로 비례식을 활용하는 것이 가능한 문항들이다. 따라서 6학년이 형식적 전략보다는 비형식적 전략을 더 많이 사용하였다는 것은 6학년이 비례식 활용의 좋은 점과 필요성에 대해 명확하게 이해하고 있지 못한 상태, 즉 비례식 전략을 이해하고 내면화하지 못한 측면이 존재하는 것으로 추측할 수 있다. 학생들의 면담 결과 학생들은 어떤 문항에 비례식을 사용해야 하는지 잘 인식하지 못했고, 비례식으로 해결한 학생들 중에는 그 과제를 다른 전략으로는 해결할 수 없다고 생각하는 경우가 많았다.

나. 질적 추론 과제에서 사용된 비례 추론 전략

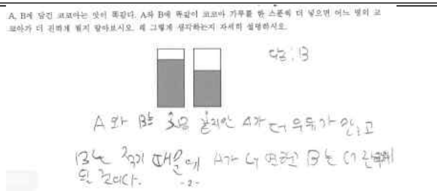
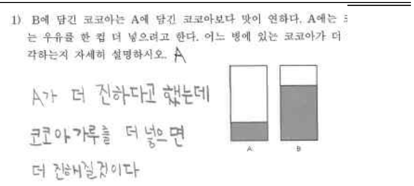
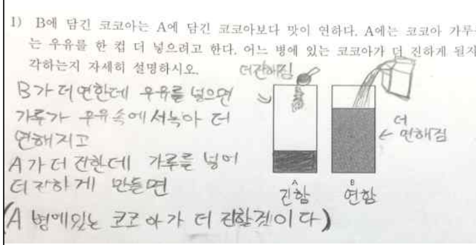
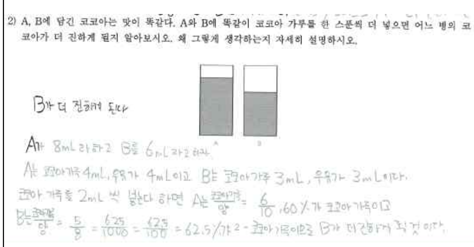
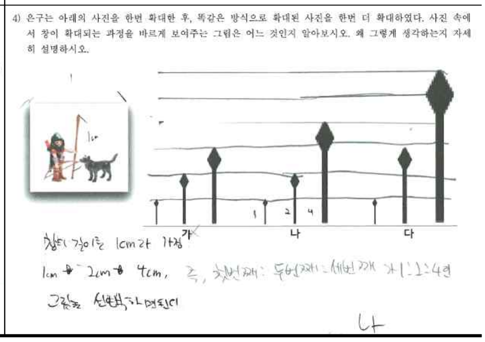
5·6학년이 질적 추론 과제의 해결 과정에서 사용한 비례 추론 전략은 <표 IV-8>에 제시된 바와 같다. <표 IV-8>을 살펴보면, 질적 추론 과제를 해결하는 과정에서 학생들이 사용한 전략은 1차원, 2차원, 특수화 전략의 순이었다. 1차원 전략의 전체 사용 비율은 51.9%로 5학년은 49.0%, 6학년은 54.7%였고, 학년 간 차이 5.7%로 나타났다. 2차원 전략의 전체 사용 비율은 42.8%였으며, 1차원 전략과는 약 9.1%의 차이를 보였고, 5학년이 44.3%로 41.3%인 6학년에 비해 다소 높았다. 특수화 전략을 사용한 비율은 전체는 5.3%였고, 5학년이 6.7%, 6학년이 4.0%로 5학년이 상대적으로 높았다.

<표 IV-9>는 질적 추론 과제에 정답자가 사용한 비례 추론의 전략의 구체적인 예를 학년별로 제시한 것이다. <표 IV-9>에서 1차원 전략의 적용 사례에서 5학년 학생은 우유의 양으로 두 코코아의 농도를 비교하였으며, 6학년 학생은 코코아 가루의 양으로 코코아의 농도를 비교하였다. 2차원 전략을 사용한 사례를 살펴보면, 5학년 학생은 왜곡되지 않고 확대·축소된 사진을 선택하는 과정에서 원본 사진과 확대·축소된 사진의 관계와 사진 속 대상 간의 관계를 함께 고려

<표 IV-8> 질적 추론 과제에서 사용한 학년별 비례 추론 전략

전략	5학년							6학년							전체 (%)
	6 ALC	7 ALM	11 GLC	12 GLC	13 GLC	14 GLM	전체 (%)	6 ALC	7 ALM	11 GLC	12 GLC	13 GLC	14 GLM	전체 (%)	
정답수	91	124	24	105	35	25	404	93	89	15	116	54	37	404	1,616
2차원	1	121	24	·	33	·	179 (44.3)	12	88	15	·	52	·	167 (41.3)	692 (42.8)
1차원	90	·	·	105	·	3	198 (49.0)	80	·	·	114	·	27	221 (54.7)	838 (51.9)
특수화	·	3	·	·	2	22	27 (6.7)	1	1	·	2	2	10	16 (4.0)	86 (5.3)

<표 IV-9> 질적 추론 과제에 정답자가 사용한 비례 추론 전략의 예

전략	5학년	6학년
1차원		
2차원		
특수화		

하여 문제를 해결하였다. 6학년 학생은 코코아 A와 B의 농도 사이의 관계를 파악하고, 코코아와 우유를 첨가한 뒤의 각각의 농도 변화를 반영하여 코코아 A와 B의 농도를 비교하였다. 이 학생은 양적 추론 전략에 속하는 그림을 사용한 모델링 전략도 사용하였는데 코코아의 농도를 코코아 색의 진하기로 표현하였다. 다음으로 특수화 전략의 적용 사례를 보면 5학년 학생들은 수치가 제시되어 있지 않은 코코아의 농도 변화 문제에서 코코아와 코코아 가루, 우유의 양을 문항에서 제시된 관계가 반영되도록 구체적인 수를 정하여 문항을 해결하였다. 6학년 학생은 동일한 방식으로 연속으로 확대된 그림을 찾는 문항에서 창의 길이를 가정하여 이를 활용하여 문항을 해결하였다.

정답자들이 질적 추론 과제의 해결에 활용한 비례 추론 전략과 구체적 예들을 살펴본 바를 종합하여 보면, 구체적 수치가 없는 상황에서도

문제 상황 속 한 가지 또는 두 가지 이상의 관계를 파악하고 이를 글, 그림 또는 수학 기호 등을 사용한 설명 등으로 정리하여 문제를 해결하였음을 알 수 있다. 또한 문제 상황을 수치화하여 학생들에게 익숙한 양적 추론 과제 유형으로 변형시켜 해결하려는 경향성이 있음을 확인할 수 있었다. 그러나 많은 학생들이 양적 추론 과제에 비해 질적 추론 과제에서는 경험의 부족으로 자신들의 전략을 쉽게 생각해 내지 못하였다.

V. 결 론

본 연구에서는 비례 추론은 학교수학을 관통하는 내용일 뿐만 아니라 수학 외적인 학문이나 일상생활에 매우 핵심적인 내용임에도 불구하고, 많은 학생들이 어려움을 겪고 있으며, 그 원인으로 제한된 과제 유형을 다루는 것과 형식적 전략 위주의 지도를 들고 있지만, 우리나라 교육과정에서는 여전히 비와 비율의 의미를 다룬 후에 비례식을 중심으로 제한된 과제 유형을 다루면서 형식적 전략 위주의 지도를 하고 있으므로, 비와 비율의 의미를 주로 다루는 5학년과 학생들과 비례와 비례식 및 형식적 전략까지 배운 6학년 학생들의 비례 추론 능력 검사를 실시하고 성취도와 전략을 비교 분석함으로써 우리나라 초등학교에서 비례 추론 지도를 위한 시사점을 제안하고자 하였다.

본 연구의 결과를 바탕으로 한 결론은 다음과 같다. 첫째, 비와 비율의 의미를 주로 배운 5학년 학생들과 비례와 비례식 및 형식적 전략까지 배운 6학년 학생들의 평균은 유의미한 차이는 있으나 그다지 크지 않다. 6학년의 정답률 평균은 0.63, 5학년의 정답률 평균은 0.59로, 이는 6학년 학생들이 5학년 학생들에 비해 더 많은 내용을 배우고 더 많은 비례 과제를 해결해 본 경험에 비추어 볼 때 그 차이가 크다고 말하기는 어렵다. 따라서 6학년의 비례와 비례식 및 형식적 전략 위주의 지도가 효과적이라고 보기는 어렵다. 이는 비례식 지도가 효과적임을 밝힌 김경선・박영희(2007)의 연구 결과와 다소 차이를 보이는데, 두 연구에서 연구 대상들이 비례식을 학습한 시점에 차이가 있는 데서 기인한 것으로 보인다. 본 연구의 경우 비례식을 학습한 후 6개월이 경과한 학생들을 대상으로 하였으며, 김경선・박영희(2007)은 비례식을 배운 직후의 학생들을 대상으로 하였다. 그러나 김경선・박영희(2007)의 연구에서도 비례식과 형식적 전략을 학습하기 전에는 자신의 비형식적 전략으로 잘 해결하던 학생들이 형식적 전략을 배운 후에는 오히려 어려움을 겪는 학생들이 있었음을 기술하고 있다. 이런 연구 결과를 종합하여 보면, 형식적 전략을 중심으로 비례식을 학습한 효과가 지속성이 높다고 보기 어렵다. 따라서 6학년에서 이루어지는 형식적 전략 중심의 비례식 지도 효과에 대해서는 좀 더 많은 검증이 필요하다.

둘째, 과제 유형과 관련해서 5학년과 6학년 학생들 모두 기하 과제, 질적 과제, 비교 과제에 친숙하지 않으며, 이런 상황에서 곱셈적 관계를 인식하는 데 어려움이 있다. 과제 유형별 정답률을 비교하면, 5학년은 유형별 정답률의 순위가 대수 과제, 양적 과제, 미지값 과제, 비교 과제, 질적 과제, 기하 과제의 순이고, 6학년은 기하 과제와 질적 과제의 순위만 다르다. 이를 범주별로 비교하면 5학년과 6학년 모두 대수 과제보다는 기하 과제, 양적 과제보다는 질적 과제, 미지값 과제보다는 비교 과제의 평균에 많은 차이를 보였다. 특히 대수 과제와 기하 과제의 평균의 차이는 0.24점이나 되었다. 또한 과제 유형별로 보았을 때 5학년과 6학년 모두 가장 높은 평균을 보이는 문항은 대수-양적-미지값 과제이고, 가장 낮은 평균을 보이는 문항은 기하-질적-비교

과제였다. 5학년과 6학년을 비교했을 때, 6학년이 5학년보다 높은 정답률을 보인 과제 유형은 기하 과제, 양적 과제, 비교 과제, 미지값 과제이다. 이러한 모든 결과는 학습 경험과 관련되어 있는데, 두 학년 모두 대수 과제, 양적 과제, 미지값 과제를 위주로 학습하고 있으며, 6학년은 상대적으로 이런 과제들에 대한 문제해결 경험이 많고, 6학년 경우에만 기하 과제를 다루고 있는 것이 두 학년의 차이의 원인이라 할 수 있다. 따라서 학생들에게는 다양한 과제들을 균형 있게 다룰 필요가 있다.

셋째, 5학년 학생들뿐만 아니라 6학년 학생들도 양적 과제와 관련해서 형식적 전략보다 비형식적 전략을 훨씬 더 많이 사용한다. 정답을 제시한 학생들 중 5학년은 92.9%, 6학년은 81.9% 이상의 학생들이 수준 1과 수준 2의 비형식적 전략을 사용하며, 5학년과 6학년 학생들 모두 가장 많이 사용하는 두 전략은 공변성과 일정성에 바탕을 둔 인수 전략과 단위 비율 전략과 같은 비형식적 전략이고, 그 다음으로 많이 사용하는 전략은 5학년은 질적 비교 전략, 6학년은 형식적 전략이었다. 6학년의 경우 5학년보다 형식적 전략을 조금 더 사용하기는 하지만 그 경우가 양적 과제와 미지값 과제에 한정되어 있다. 따라서 학생들에게 비례 추론을 지도할 때 특정한 과제에만 다소 유효한 형식적 전략을 지도하기 전에 다양한 과제들을 다루면서 비형식적 전략을 충분히 활용할 수 있는 기회가 먼저 제시되어야 한다.

넷째, 학생들의 유연한 비례 추론 전략의 사용과 관련해서 형식적 전략을 사용하는 학생들 중에는 형식적 전략 외에는 다른 전략을 전혀 생각해 내지 못하는 고착화 현상을 보이는 학생들도 있다. 면담 결과 학생들 중에는 형식적 전략을 배운 6학년 학생들 중에 형식적 전략을 언제 사용해야 하는지 모르는 학생들뿐만 아니라 형식적 전략을 사용하는 학생들 중에는 이 전략이 비례 과제를 해결하는 유일한 방법이라고 생각하는 경우도 발견할 수 있었다. 따라서 비례 추론을 지도할 때 형식적 전략을 지나치게 강조하는 것은 학생들의 유연한 사고와 관련해서 어려움이 있을 뿐만 아니라 효과적인 방법도 아님을 알 수 있다.

다섯째, 비례 상황과 비 비례 상황을 파악하는 데 어려움을 겪는 학생들이 많다. 본 연구에서는 비 비례 상황과 관련된 문항은 10번과 11번이다. 10번은 길이의 비가 아닌 넓이의 비를 다루는 상황으로 연구자들(Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005; Van Dooren et al., 2008)이 주장하는 바와 같이 많은 학생들이 어려움을 갖고 있는 문항으로 알려져 있는데 6학년 학생들은 유사한 문항이 교과서(교육과학기술부, 2011a)에 한두 개 제시되어 있었음에도 불구하고 평균이 높지는 않았다. 11번은 확대하고 확대하는 이중 확대 상황으로 원래의 대상과 이중 확대한 대상은 비례 관계가 아니지만 학생들은 원래의 대상, 한번 확대한 대상, 두 번 확대한 대상을 2:4:6과 같은 비례 상황으로 해석하는 학생들이 많이 있었다. 따라서 학생들이 많은 비 비례 상황을 접하면서 비례추론이 가능한지 그렇지 않은지에 대한 판단을 할 수 있는 충분한 기회가 제공되어야 한다.

지금까지의 논의를 바탕으로 앞으로의 비례 추론 지도를 위해 고려할 점을 몇 가지 제안하면 다음과 같다. 첫째, 비례 추론 과제와 관련해서는 형식적 전략 위주의 대수 과제에서 벗어나서 축소와 확대와 관련된 기하 과제를 접할 수 있는 기회를 더 많이 제공해야 하고, 양적 과제뿐만 아니라 질적 과제들을 제공해야 하고, 비교 과제와 미지값 과제를 균형 있게 충분히 다룰 필요가 있으며, 비례 상황뿐만 아니라 비 비례 상황을 같이 다룰 필요가 있다. 둘째, 비례 추론

전략 지도와 관련해서 비례식의 성질을 이용한 형식적 전략을 다루기 전에 다양한 과제에 접하면서 다양한 비형식적 전략을 접할 수 있는 기회를 제공해야 한다. 학생들은 형식적 전략을 학습하기 전인 구체적 조작 단계에서도 잠재적인 다양한 비형식적 추론 전략을 가지고 있고, 이런 전략들이 형식적 전략을 학습하는 데 도움이 되며, 형식적 전략은 문제 상황의 비례적 특성에 초점을 맞추는 것이 아니라 방정식을 해결하는 것에 초점을 맞추게 된다(Kastberg et al., 2012; Lamon, 1993, 2005; Langrall & Swafford, 2000; Post et al., 1998; Shield & Dole, 2013). 따라서 이런 형식적 전략은 비례 과제를 해결하는 처음 단계에 지도할 내용이 아니라 학생들이 다양한 비례 과제에서 곱셈적 관계를 인식하고 공변성과 일정성에 기초한 자신들의 비형식적 비례 추론 전략을 통해 비례 추론에 충분히 숙달할 때까지 기다릴 필요가 있다.

본 연구에서는 2009 개정 교육과정에 의한 교과서로 비와 비율 및 비례식을 학습한 5학년과 6학년 학생들을 비교 분석하였지만 그 이후의 교육과정에 의한 교과서를 학습한 학생들의 경우에도 과제 유형이나 전략 지도와 관련된 효과를 분석하여 비례 추론 지도를 위한 좀 더 나은 개선점을 찾을 수 있기를 희망한다.

참고문헌

고은성 · 이경화(2007). 초등학교 6학년 학생의 비례 추론 능력 분석. **수학교육학연구, 17**(4), 359-380.

교육과학기술부(2011a). **수학 6-1**. 서울: 두산동아(주).

교육과학기술부(2011b). **수학과교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]. 교육과학기술부.

교육과학기술부(2012). **수학 5-2**. 서울: 두산동아(주).

교육부(2014). **수학 6-1 지도서**. 서울: 두산동아(주).

교육부(2016). **과학 5-1**. 서울: 천재교육(주).

김경선 · 박영희(2007). 초등학생의 비례 추론 지도에 관한 연구. **학교수학, 9**(4), 447-466.

김경희 · 백희수(2010). 비와 비율 영역에 대한 우리나라와 싱가포르 교육과정 및 교과서 비교-TIMSS 평가 목표와 공개문항을 중심으로. **학교수학, 12**(4), 473-491.

안숙현 · 방정숙(2008). 5, 6, 7학년 학생들의 비례 추론 능력 실태 조사. **수학교육학연구, 18**(1), 103-121.

이종욱(2006). 4학년 아동의 비와 비례 개념 분석. **수학교육학연구, 16**(2), 157-177.

임재훈 · 이형숙(2015). 비례추론을 돕는 시각적 모델에 대하여: 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로. **수학교육학연구, 25**(2), 189-206.

정영옥(2015). 초등학교에서 비례추론 지도에 관한 논의. **수학교육학연구, 25**(1), 21-58.

정유경 · 정영옥(2015). 초등학생들의 비례 추론 전략 분석-6학년을 중심으로. **한국초등수학교육학회지, 19**(4), 457-484.

정은실(2013). 초등학교 수학교과서에서의 비례 추론에 대한 연구. **수학교육학연구, 23**(4), 505-516.

홍지연 · 김민경(2013). 초등수학 비구조화된 문제해결 과정에서의 비례적 추론. **학교수학, 15**(4), 723-742.

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 149-175.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority(ACARA) (2013a). *F-10 Curriculum.* http://www.australiancurriculum.edu.au/

Australian Curriculum, Assessment and Reporting

Authority(ACARA) (2013b). *F-10 Curriculum.* http://www.australiancurriculum.edu.au/

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. In D. A. Grouws(Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 296-331). New York: Macmillan Publishing Company.

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics, 36*(3) 247-273.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. S. (2012). *Ratio and Proportion. Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Pre-and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes)*. Rotterdam, AW: Sense Publishers.

Billings, E. M. H. (2001). Problems that encourage proportion sense. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7*(1), 10-14.

Common Core State Standards Initiative(CCSSI) (2010). *Common Core Standards for Mathematics*. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens(Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics* (pp. 159-178). New York: Macmillan Publishing Company.

Curriculum Planning Development Division(CPDD) (2012). *O-& N(A)-Level Mathematics Teaching and Learning Syllabus*. Ministry of Education, Singapore.

Department for Education(DfE) (2013). *Mathematics Programmes of Study: Key Stage 3, National Curriculum in England*. https://www.gov.uk/government/publications/nationalcurriculum-in-england- mathematics-programmes-of-study.

Department for Education(DfE) (2014). *Mathematics Programmes of Study: Key Stage 4, National Curriculum in England*. https://www.gov.uk/government/publications/nationalcurriculum-in-england- mathematics-programmes-of-study.

Dole, S., Clarke, D., Wright, T., Hilton, G., & Roche, A. (2008). Eliciting growth in teachers' proportional reasoning: Measuring the impact of a professional development program. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar(Eds.) *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 163-168.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht*: D. Reidel Publishing Company.

Harel, G., Behr, M., Lesh, R., & Post, T. (1994). Invariance of ratio: The case of children's anticipatory scheme for constancy of taste. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(4), 324-345.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219-233.

Kastberg, S. E., D'Ambrosio, B., & Lynch-Davis, K. (2012). Understanding proportional reasoning for teaching. *Australian Mathematics Teacher, 68*(3), 32-40.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpente, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers An Integration of Research(pp. 131-156). New Jersey*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. New Jersey: Lawrence Erbaum Associates, Inc., Publishers.

Langrall, C. W., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(4), 254-261.

Lanius, C. A., & Williams, S. E. (2003). Proportionality: A unifying theme for the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(8), 392-396.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades(pp. 93-118)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.) *The Idea of Algebra K-12 (1998 Yearbook, pp. 78-90)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lamdin, D. V., & Smith, N. L. (2012). **초등교사를 위한 수학과 교수법**. 박성선 · 김민경 · 방정숙 · 권점례 역. 서울; 경문사. (영어 원작은 2009년 출판).

Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 183-199.

The School Mathematics Project(2003). *SMP Interact Practice for Book 8T*. Cambridge University Press.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204.

Van de Walle, J. A. (2008). **수학을 어떻게 가르칠 것인가**. (남승인 외 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2004년 출판).

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on properties of Overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The Linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Vol. 2* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

5th and 6th Grade Korean Students' Proportional Reasoning Abilities

Chong, Yeong Ok (Gyeongin National University of Education)
Jung, Yoo Kyung (Dangdong Elementary School)

This research analyzed proportional reasoning abilities of the 5th grade students who learned only the basis of ratio and rate and 6th grade students who also learned proportion and cross product strategy. Data were collected through the proportional reasoning tests and the interviews, and then the achievement of the students and their proportional reasoning strategies were analyzed.

In the light of such analytical results, the conclusions are as follows. Firstly, there is not much difference between 5th and 6th grade students in the achievement scores. Secondly, both 5th and 6th graders are less familiar with the geometric, qualitative and comparisons tasks than the other tasks. Thirdly, not only 5th graders but also 6th graders used informal strategies much more than the formal strategy. Fourthly, some students can't come up with other strategies than the cross product strategy. Finally, many students have difficulties in discerning proportional situation and non-proportional situations.

This study provided suggestions for improving teaching proportional reasoning in elementary schools in Korea as follows: focusing on letting students use their informal strategies fluently in geometric, qualitative, and comparisons tasks as well as algebraic, quantitative, and missing value tasks focusing on the concept of ratio and proportion instead of enforcing the formal strategy.

* Key Words : proportional reasoning(비례 추론), algebraic task(대수 과제), geometric task(기하 과제), quantitative task(양적 과제), qualitative task(질적 과제), missing value task(미지값 과제), comparisons task(비교 과제), proportional reasoning strategy(비례 추론 전략)

논문접수 : 2016. 11. 10
논문수정 : 2016. 12. 14
심사완료 : 2016. 12. 18