*Journal for History of Mathematics*
Vol. 29 No. 6 (Dec. 2016), 335–351
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2016.29.6.335

# A Study on Spherical Convexity

## 구면볼록성에 관한 고찰

Jo Kyeonghee 조경희

Spherical convexity may be defined in different ways. It depends on which statement we take as a definition among several statements that can be all used as a definition of convexity of subsets in an affine space. In this article, we consider this question from various perspectives. We compare several different definitions of spherical convexity which are found in mathematical papers. In particular, we focus our discussion on the definitions of J. P. Benzécri and N. H. Kuiper who built a solid foundation for theory of convex bodies and convex affine(projective) structures on manifolds.

*Keywords:* convexity, convex domains, spherical convexity; 볼록성, 볼록 영역, 구면 볼록성.

*MSC:* 52A01, 52A55

## 1 서론

볼록성은 수학자들의 주요 관심 대상 중의 하나로 여러 분야에서 다양한 방법으로 오랫동안 연구되어 오고 있다. 그 중의 하나로서 다양한 기하 공간에서의 볼록집합들의 정의 및 분류, 특히 거리공간에서의 볼록성에 대한 연구에는 많은 흥미있는 문제들이 존재한다. 이 논문에서 논의할 구면볼록성(spherical convexity)은 가장 오래된 수학 개념 중의 하나로 여러 가지 다른 정의들이 존재한다. 이는 아핀공간(affine space) 또는 유클리드 공간(Euclidean space)에서 정의된 볼록집합의 의미를 어떤 방향으로 확장하느냐에 따른 현상이라고 할 수 있으므로 우리는 이 관점에서 이러한 여러 정의들을 살펴볼 것이다.

아핀공간의 부분집합 $D$가 볼록이라 함은 $D$ 안의 임의의 두 점을 잇는 선분(line segment)이 $D$ 안에 있다는 것이다. 다음 다섯 명제는 아핀 공간에서 상호간에 동치인 명제들로 모두 볼록집합의 정의로 사용할 수 있다.[1)]

Jo Kyeonghee: Division of Liberal Arts and Sciences, Mokpo National Maritime Univ.
E-mail: khjo@mmu.ac.kr
Received on Oct. 6, 2016, revised on Nov. 10, 2016, accepted on Dec. 7, 2016.

1) 거리 개념을 고려할 경우 유클리드 공간이라는 용어가 더 많이 쓰이지만, $\mathbb{R}^n$ 에서 유클리드 거리를 사용하여

(명제 A) $D$ 의 임의의 두 점을 잇는 선분이 $D$ 안에 유일하게 존재한다.

(명제 B) $D$ 의 임의의 두 점을 잇는 모든 최단 곡선(minimal geodesic segment)이 $D$ 안에 포함된다.

(명제 C) $D$ 의 임의의 두 점을 잇는 최단 곡선(minimal geodesic segment)이 $D$ 안에 존재한다.

(명제 D)$D$ 의 임의의 두 점을 잇는 선분이 $D$ 안에 존재한다.

(명제 E)$D$ 와 만나는 모든 직선(line)과 $D$ 의 교집합은 연결(connected) 집합이다.

아핀공간 $\mathbb{A}^n$ 은 아핀 변환(affine transformation)을 사영변환(projective transformation)으로 대응시키는 동등 함수(equivariant map)에 의해 사영공간 $\mathbb{RP}^n$ 과 구면공간 $\mathbb{S}^n$ 의 열린 부분집합으로 생각할 수 있다. 여기서 사영공간과 구면공간은 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 의 상공간(quotient space) 으로 본 것으로, 사영공간은

$$\mathbb{RP}^n = \mathrm{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \big(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\big)/\mathbb{R}^*,\ \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

이고, 구면공간은

$$\mathbb{S}^n = \big(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\big)/\mathbb{R}^+,\ \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \,|\, r > 0\}$$

이다. 즉, $n$차원 아핀공간은 $n$차원 사영공간에서 $n-1$차원 사영공간을 제거한 집합으로 대응되고, $n$차원 구면공간의 열린 반구(open hemisphere)로 대응된다. 이 대응관계에 의해 아핀공간의 직선은 구면공간에서의 직선인 대원(great circle)의 열린 반호가 된다. 구면에서의 선분을 대원의 연결 부분집합으로 정의하면[2)] 아핀공간의 선분 또한 구면의 선분으로 대응된다.

그렇다면 무수히 많은 아핀공간을 부분집합으로 가지고 있는 사영공간과 구면공간에서 볼록성을 어떻게 정의하는 것이 좋을까? 각 아핀공간에서의 볼록집합은 사영공간과 구면공간에서 여전히 볼록집합이 되도록 정의하여야 할 것이다. 이러한 집합들만을 볼록집합으로 정의하는 경우, 즉, 어떠한 집합이 볼록이라 함을 그 집합을 포함하는 아핀공간이 있어 그 아핀공간에서 볼록인 집합이라 정의할 수 있는데, 우리는 이 논문에서 이러한 볼록성을 **아핀-볼록(affine-convex)**이라 부른다.[3)]

아핀공간에서 볼록집합의 정의로 사용할 수 있는 위의 명제 5개를 그대로 구면공간에서의 볼록집합의 정의로 사용하면 어떻게 될까? 구면공간에서는 5개의 명제가 서로 동치가

---

정의한 볼록성의 개념은 아핀공간 $\mathbb{A}^n$ 에서의 정의와 일치하므로 이 논문에서는 $\mathbb{A}^n$ 에서 고려하는 거리는 유클리드 거리라고 생각하기로 한다.

2) 이 정의는 대원 자신을 선분으로 포함한다.

3) 이러한 정의를 사영공간에서 사용한 예로 [14]이 있다. 그는 명제 D를 만족하는 집합을 준볼록(semiconvex)라 불렀고, 아핀-볼록에 해당하는 집합을 볼록이라고 정의하였다. 현대 수학에서 이러한 정의가 사용된 예를 [16]에서 찾아볼 수 있다.

아니므로 다른 결과가 나타남을 확인할 수 있다. 그러므로 각 명제에 의해 정의된 볼록성을 **$C_A$-볼록, $C_B$-볼록, $C_C$-볼록, $C_D$-볼록, $C_E$-볼록**이라 구분하기로 한다. 이 중 $C_C$-볼록성은 1960년 벤제크리(J. P. Benzécri)가 사용한 정의에 의한 볼록성과 일치하고[4)], $C_D$-볼록성[5)]은 1953년 카이퍼(N. H. Kuiper)의 정의와 일치하므로, 이 논문에서는 각각 **벤제크리-볼록 (Benzécri-convex)**과 **카이퍼-볼록 (Kuiper-convex)**이라 명명한다([2]와 [10] 참조). 사영기하가 활발하게 연구되었던 1900년대 초중반에는 $C_A$-볼록성이 볼록집합의 정의로 주로 사용되었으며 명제 $C_D$를 만족하는 부분집합은 준볼록(semiconvex)이라는 정의를 사용하여 구분하였는데, 이는 [4], [6], [7], [9], [14] 등에서 찾아볼 수 있다. $C_B$-볼록성은 현대수학에서 가장 많이 쓰이고 있는 것으로 보여지며([5]과 [12] 등 참조), $C_E$-볼록성은 다른 볼록성들과 다른 볼록성을 정의한다. [6)] [7)] [8)]

수학의 여러 분야에서 다루는 볼록성의 경우 열린 집합(이하 영역(domain))에서의 볼록성이 중요하며, 또한 영역들의 볼록성은 그렇게 다양하게 나타나지 않는다. [9)] 영역들의 볼록성만을 고려하여 살펴보면 여러 정의들이 일치하게 되는데, 위 5개의 명제에 의한 볼록성의 정의는 이 경우 아핀-볼록성, 벤제크리-볼록성, 카이퍼-볼록성 중의 하나와 일치한다. 그러므로 이 논문에서는 구면공간에서의 볼록성에 관한 위의 여러 정의 중 아핀-볼록, 벤제크리-볼록, 카이퍼-볼록에 대해서 중점적으로 비교 분석하고 그 모양을 분류한다. [10)]

## 2 아핀-볼록

이 장에서는 구면의 부분집합에 대한 볼록성의 정의 중 아핀-볼록에 대하여 알아본다. 구면상의 임의의 열린 반구는 아핀공간으로 볼 수 있는데, 이는 $\mathbb{R}^{n+1}$의 $n$ 차원 아핀공간 중의 하나인 초평면 $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = 1\}$이 $\mathbb{S}^n$의 열린 북반구로 대응되는 것이 그 한

---

4) $C_C$-볼록성과 벤제크리-볼록성은 정의 자체는 다르지만 볼록집합들이 일치한다. $C_C$-볼록성이 사용된 예로는 [3]과 [11]등이 있다.

5) J. H. C. Whitehead가 1931년 좀 더 일반적인 기하에서 볼록집합을 $C_D$-볼록성으로 정의한 예를 [17]에서 찾아볼 수 있다.

6) 명제 $E$를 이용하여 사영공간의 볼록집합을 정의한 예로 [8]이 있다.

7) 사영공간에서는 $C_A$-볼록성, $C_D$-볼록성, $C_E$-볼록성이 일치하고, $C_B$-볼록성과 $C_C$-볼록성이 일치한다. 이는 두 점을 지나는 직선은 유일하다는 사영 기하의 특성에서 비롯된 것이다.

8) 구면공간에서 위의 5개의 명제들로 볼록집합을 정의할 경우 아핀공간에서의 볼록성과는 다르게 두 볼록집합의 교집합이 볼록집합이 아닐 수도 있다. 예를 들어 $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$와 $\mathbb{S}^1 \setminus \{q\} (p \neq q)$는 명제 A, 명제 D, 명제 E를 만족하지만 그 교집합은 연결 집합이 아니므로 5 명제 모두 성립하지 않는다. 이런 이유로 우리가 고려한 볼록성을 단순 볼록(simple convex)이라 하고 단순 볼록집합들의 교집합으로 나타나는 부분집합을 볼록집합이라 정의하기도 한다. 이렇게 정의할 경우 단순 볼록집합은 볼록집합들 중 연결인 집합이다. 단순 볼록의 정의를 사용한 예로 [15]가 있는데, 그의 정의는 $C_A$-볼록과 일치한다.

9) 볼록체(convex body)라 불리는 내부점이 있는 닫힌 볼록집합이 많이 연구되는데, 이는 영역의 닫힘(closure)으로 나타나기 때문에 영역의 볼록성이 결국 중요하다고 볼 수 있다.

10) 볼록 아핀(사영) 기하구조를 갖는 닫힌 다양체는 아핀(사영) 공간의 한 볼록 영역의 무한 이산 아핀군(사영군)에 의한 궤도 공간(orbit space)으로 나타나는데, 이러한 연구의 기초 작업으로 벤제크리와 카이퍼는 볼록 영역을 분석하였다.

예로, 모든 열린 반구는 극점에 접하는 초평면에 대응된다. 여기에서 대응관계는 구면공간 $\mathbb{S}^n$ 을 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 의 $\mathbb{R}^+$ 작용에 의한 상공간(quotient space) $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{R}^+$ 으로 보았을 때의 상함수(quotient map)

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^n$$

에 의한다. 우리는 앞으로 임의의 점 $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 의 $\pi$ 에 의한 $\mathbb{S}^n$ 위의 상을 $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ 로 표시할 것이다.

**정의 2.1:** $n$ 차원 구면공간 $\mathbb{S}^n$ 의 부분집합 $D$ 가 하나의 $n-1$ 차원 부분 구면공간 $\mathbb{S}^{n-1}$ 을 경계로 하는 한 열린 반구에 대응되는 아핀공간 안에 들어가는 부분집합으로서 볼록일 때 $D$ 를 **아핀-볼록(affine-convex)**이라 한다.

서론에서 언급한 여러 볼록성들과 아핀-볼록성의 관계를 먼저 살펴보면, 열린 반구 안에 들어 있는 임의의 두 점을 잇는 선분은 유일하며 그 선분은 두 점 사이의 최단 곡선이므로 다음이 성립함을 쉽게 알 수 있다:

- 아핀-볼록이면 $C_A$-볼록, $C_B$-볼록, $C_C$-볼록, $C_D$-볼록, 그리고 $C_E$-볼록이다.

구면공간 $\mathbb{S}^n$ 에서 어떤 집합이 아핀-볼록이라 함은 $\mathbb{S}^n$ 의 한 열린 반구 안에 그 집합이 볼록집합으로 들어 있음을 의미하며, 이는 열린 반구를 아핀공간으로 보았을 때 아핀공간에서 사용하는 볼록의 용어와 일치하므로 아핀공간에서의 볼록집합에 대한 성질을 먼저 알아보자.

**도움정리 2.1:** 아핀공간 $\mathbb{A}^n$ 의 부분집합 $D$ 가 볼록이면 다음 둘 중의 하나를 만족한다:

*(i)* $D$ 는 직선을 포함하지 않는다. 즉, 어떤 $1$차원 아핀공간도 포함하지 않는다.

*(ii)* $D$ 는 한 차원 낮은 볼록집합과 $1$차원 아핀공간의 곱으로 표현된다. 즉, $\mathbb{A}^n$ 안에 $n-1$ 차원 아핀공간 $\mathbb{A}^{n-1}$ 과 그 안의 볼록집합 $D' \subset \mathbb{A}^{n-1}$ 이 있어 다음과 같이 표현된다.

$$D = D' \times \mathbb{A}^1$$

**증명.** (i) 의 경우가 아니라면, 즉, $D$ 가 직선을 포함한다면, $\mathbb{A}^n$ 의 한 점 $p_0$ 와 벡터 $\mathbf{v}$ 가 있어 직선

$$p_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

가 $D$ 안에 완전히 들어간다. 그런데 $D$ 가 볼록이므로 임의의 점 $p \in D$ 에 대하여 점 $p$ 와 점 $p_0 + t\mathbf{v}$ 를 잇는 선분

$$(1-s)p + s(p_0 + t\mathbf{v}), \quad 0 \le s \le 1$$

이 $D$ 안에 들어간다. 이는 모든 실수 $t$ 에 대하여 성립하므로

$$p + s(p_0 - p) + ts\mathbf{v} \in D \quad \text{for} \quad 0 \le s \le 1, \quad t \in \mathbb{R}$$

이다. 이 식은 $p$ 와 $p_0$ 를 잇는 선분 위의 점을 지나고 $\mathbf{v}$ 를 방향 벡터로 하는 직선이 모두 $D$ 안에 있음을 의미한다. 이로부터 우리는 임의의 점 $p \in D$ 를 지나는 $\mathbf{v}$ 방향의 직선이 $D$ 안에 완전히

들어감을 보였으며, 이는 $D$가 한 차원 낮은 볼록집합과 1차원 아핀공간의 곱으로 표현됨을 의미한다. □

$D$가 (ii)의 경우이면서 아핀공간 $\mathbb{A}^{n-1}$의 부분집합 $D'$이 아핀 직선을 포함하면 $D'$가 다시 (ii)의 경우가 되어

$$D' = D'' \times \mathbb{A}^1$$

이 되는 $n-2$차원 볼록집합 $D''$이 존재한다. 이 과정을 계속하면 우리는 다음을 얻는다:

- 아핀공간 $\mathbb{A}^n$의 부분집합 $D$가 볼록이고 $\mathbb{A}^k$이 $D$ 안에 들어 있는 최대 차원의 아핀공간 중의 하나이면 $\mathbb{A}^n$ 안에 $n-k$차원 아핀공간 $\mathbb{A}^{n-k}$과 그 안의 볼록집합 $D' \subset \mathbb{A}^{n-k}$이 있어 다음과 같이 표현된다.
$$D = D' \times \mathbb{A}^k$$

이제 다시 구면공간으로 돌아와서 논의를 계속하자. 구면공간 안에 있는 임의의 아핀공간의 직선은 대원의 부분집합으로서 열린 반원에 해당함을 알 수 있는데 이러한 선분을 우리는 이 논문에서 **아핀 직선**이라 부르기로 하자. $D$가 $n$차원 구면공간 $\mathbb{S}^n$의 아핀-볼록 부분집합이라 하면, $\mathbb{S}^n$ 속에 $n-1$차원 구면공간 $\mathbb{S}^{n-1}$이 있어 $D$는 $\mathbb{S}^n - \mathbb{S}^{n-1}$의 한쪽 열린 반구에 해당하는 아핀공간 $\mathbb{A}^n$의 볼록집합이 되며 다음이 성립함을 쉽게 알 수 있다: $\mathbb{S}^n$에서의 $D$의 닫힘(closure)을 $\bar{D}$라고 하면,

(a) $D$가 아핀 직선을 포함하지 않으면 $\bar{D}$를 포함하는 열린 반구가 $\mathbb{S}^n$에 존재한다.

(b) $D$가 아핀 직선을 포함하면 $\bar{D}$는 $\mathbb{S}^{n-1}$의 서로 대척(antipodal)인 두 점을 포함한다.

(a)를 만족하는 아핀-볼록집합 $D$는 도움정리 2.1의 (i)에 해당하는 유형이다. 이러한 아핀-볼록집합은 일반적으로 주어진 아핀공간에서 항상 유계[11)]는 아니지만, $\bar{D}$를 포함하는 열린 반구를 주어진 $\mathbb{A}^n$과 다르게 택함으로써 유계가 되게 할 수 있음을 의미한다. (b)를 만족하는 아핀-볼록집합 $D$는 $\mathbb{A}^n$과 다른 $D$를 포함하는 어떠한 열린 반구를 택하더라도 $D$는 비유계인 볼록집합으로, 대척인 두 점은 주어진 $\mathbb{A}^n$의 경계에 있는 $n-1$차원 구면공간 $\mathbb{S}^{n-1}$에 속한다.

카이퍼는 [10]에서 (a)를 만족하는 집합을 **C$^{a}$-볼록집합**이라 불렀고, $\mathbb{A}^n$이 아닌 (b)를 만족하는 집합을 **C$^{b}$-볼록집합**이라 불렀다. 그러므로 아핀-볼록인 $\mathbb{S}^n$의 부분집합은 다음과 같은 세 유형으로 분류된다(Figure 1 참조): $\mathbb{A}^n$, $C^a$-볼록집합, $C^b$-볼록집합

## 3 벤제크리-볼록

이 장에서는 구면 위의 집합에 대한 볼록성의 정의 중 벤제크리-볼록에 대하여 알아본다.

11) $\mathbb{R}^n$의 어떤 집합이 유계라 함은 그 집합이 원점을 중심으로 하는 적당한 원의 내부에 완전히 들어간다는 것과 동치이다.

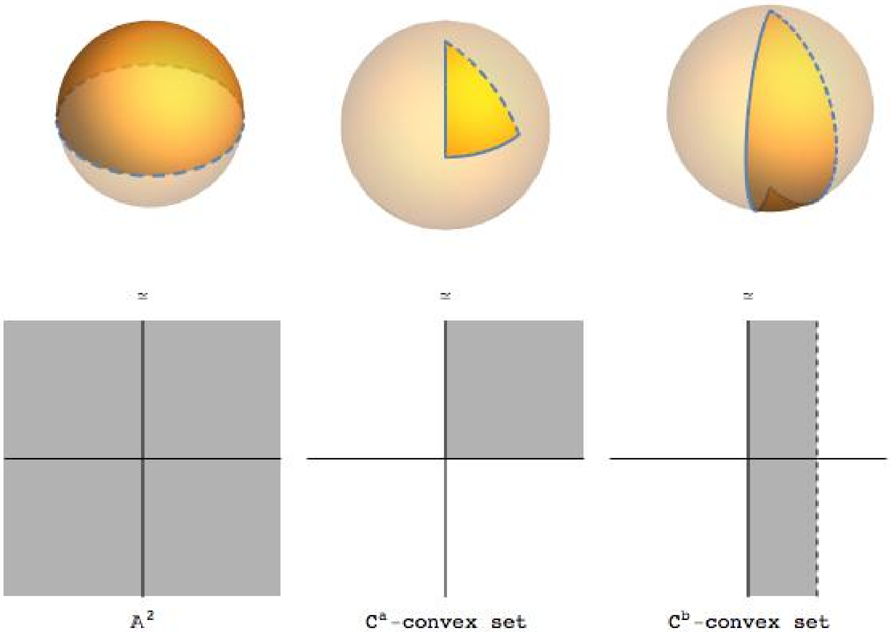


Figure 1. Affine-convex sets; 아핀-볼록집합

**정의 3.1:** $\{0\} \cup \pi^{-1}(D)$ 이 $\mathbb{R}^{n+1}$ 의 볼록인 부분집합일 때, $D$ 는 구면공간 $\mathbb{S}^n$ 의 **벤제크리-볼록 (Benzécri-convex) 집합**이라 한다. [12)]

우리는 위에서 정의한 벤제크리-볼록성이 $C_C$-볼록성과 일치함을 쉽게 알 수 있으며, 다음 정리를 얻는다.

**정리 3.1:** $\mathbb{S}^n$ 의 부분집합 $D$ 에 대하여 다음이 성립한다*:*

*(i)* $D$ 가 아핀-볼록이면 벤제크리-볼록이다.

*(ii)* $\mathbb{S}^n$ 이 아닌 영역 $D$ 가 벤제크리-볼록이면 아핀-볼록이다.

*(iii)* $D$ 가 벤제크리-볼록이면 $C_C$-볼록이고, 그 역도 성립한다.

*(iv)* $D$ 가 벤제크리-볼록이면 $C_D$-볼록이다.

*(v)* $D$ 가 벤제크리-볼록이면 $C_E$-볼록이다.

*(vi)* $D$ 가 벤제크리-볼록이면 $\mathbb{S}^n$ 의 임의의 아핀공간(열린 반구)과 $D$ 의 교집합이 그 아핀공

12) 원점을 포함하지 않고 $\pi^{-1}(D)$ 이 $\mathbb{R}^{n+1}$ 의 볼록인 부분집합일 때 $D$ 를 $\mathbb{S}^n$ 의 볼록집합이라 정의하면 볼록성이 조금 달라진다. 이 정의는 $\mathbb{S}^n$ 을 볼록집합으로 포함하지 않는다는 것을 제외하고는 $C_B$-볼록성과 일치한다. 이러한 정의를 사용한 논문으로는 [1]이 있다.

간에서 볼록이다.

**증명.** 정의에 의해 (i), (iii), (iv)는 명백하다. 먼저 (ii)를 보이기 위하여 잘 알려진 다음 정리를 상기하자 ([13]의 Lemma 3.1 참조):

> $\mathbb{R}^{n+1}$에서 여집합이 공집합이 아닌 볼록 콘(cone)은 원점을 지나는 받힘 초평면(supporting hyperplane)을 경계로 하는 닫힌 반공간(closed half space) 안에 들어간다.

위 정리에 의해 $D' = \{0\} \cup \pi^{-1}(D)$이 $\mathbb{R}^{n+1}$의 한 닫힌 반공간 안에 들어가게 되며, 원점을 제외한 $\pi^{-1}(D) = D' \setminus \{0\}$은 열린 콘이므로 열린 반공간에 들어간다. 그러므로 $D$는 $\mathbb{S}^n$의 한 부분 아핀공간 안에 있게 되어 아핀-볼록 영역이므로 (ii)가 성립함을 증명하였다.

이제 (v)을 증명하자. $D$가 벤제크리-볼록집합이고 $l$이 $D$와 만나는 $\mathbb{S}^n$의 직선이라면, $P = \{0\} \cup \pi^{-1}(l)$은 $\mathbb{R}^{n+1}$의 한 평면으로 원점을 지난다. $D$가 벤제크리-볼록집합이므로 $D' = \{0\} \cup \pi^{-1}(D)$이 $\mathbb{R}^{n+1}$에서 볼록 콘이고 $D' \cap P$는 2차원 볼록 콘이 된다. 그런데

$$D \cap l = \pi(D' \cap P)$$

이므로, $D \cap l$은 연결집합이다. 이는 $D$와 만나는 임의의 직선 $l$에 대하여 성립하므로 $D$는 $C_E$-볼록이다.

마지막으로 (vi)을 증명하자. $\mathbb{S}^n$의 임의의 아핀공간 $\mathbb{A}^n$에 대하여, $\pi^{-1}(\mathbb{A}^n)$은 $\mathbb{R}^{n+1}$의 열린 반공간(open half space)이고, $D$가 벤제크리-볼록이면 $\{0\} \cup \pi^{-1}(D)$ 이 $\mathbb{R}^{n+1}$의 볼록집합이므로, 두 볼록집합의 교집합 $(\{0\} \cup \pi^{-1}(D)) \cap (\{0\} \cup \pi^{-1}(\mathbb{A}^n))$은 $\mathbb{R}^{n+1}$에서 볼록이다. 그런데

$$(\{0\} \cup \pi^{-1}(D)) \cap (\{0\} \cup \pi^{-1}(\mathbb{A}^n)) = \{0\} \cup \pi^{-1}(\mathbb{A}^n \cap D)$$

이므로, $\mathbb{A}^n \cap D$의 임의의 두 점 $\{p, q\}$에 대하여 다음과 같이 두 점을 잇는 선분 $s$를 $\mathbb{A}^n \cap D$ 안에서 찾을 수 있다: $\{\tilde{p}, \tilde{q}\}$가 $\{0\} \cup \pi^{-1}(\mathbb{A}^n \cap D)$의 두 점으로

$$\pi(\tilde{p}) = p, \quad \pi(\tilde{q}) = q$$

이라 하면 $\tilde{p}$와 $\tilde{q}$를 잇는 선분 $\tilde{s}$이 볼록집합 $\{0\} \cup \pi^{-1}(\mathbb{A}^n \cap D)$ 안에 있으므로 $s = \pi(\tilde{s})$가 $p$와 $q$를 잇는 선분으로 $\mathbb{A}^n \cap D$ 안에 있다. 이로써 $\mathbb{A}^n \cap D$이 아핀공간 $\mathbb{A}^n$에서 볼록임이 증명되었다. □

위 정리의 (i)과 (ii)로부터 우리는 $\mathbb{S}^n$ 자신을 제외한 영역들만 생각했을 때는 아핀-볼록과 벤제크리-볼록이 동치 개념임을 알았다. 그렇지만 닫힌 반구의 예에서 알 수 있듯이 $\mathbb{S}^n$ 이외의 모든 벤제크리-볼록집합이 아핀-볼록인 것은 아니다. 이 외에도 앞 절에서 나온 $C^b$- 볼록집합의 닫힘은 모두 아핀-볼록이 아닌 벤제클리-볼록집합이다. 실제로 Figure 2와 같이 대척인 쌍을 포함하는 벤제클리-볼록집합이 많이 나타나며 이러한 성질을 갖는 벤제크리-볼록집합들은 모두 아핀-볼록이 아니다.

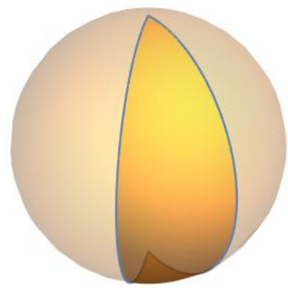

Figure 2. Benzécri-convex set which is not affine-convex; 아핀-볼록이 아닌 벤제크리-볼록집합

그렇다면 영역들에 대해서는 (iv) 과 (v) 의 역도 성립할까? 다음 장에서 $C_D$-볼록에 대해서는 자세히 살펴보겠지만, 두 볼록성이 벤제크리-볼록성과 동일하지 않음을 다음 예에서 바로 알 수 있다. $p$가 $\mathbb{S}^n$ 상의 임의의 점이라 할 때 $D = \mathbb{S}^n - \{p\}$는 $C_D$-볼록과 $C_E$-볼록이지만 벤제크리-볼록은 아니다. 왜냐하면, $\mathbb{S}^n$ 상의 임의의 직선 $l$에 대하여 $D \cap l$은 $l$ 자신이거나 $l - \{p\}$이므로 $D$는 $C_D$-볼록이고 $C_E$-볼록이다. 그러나 $\{0\} \cup \pi^{-1}(D) = \mathbb{R}^{n+1} - \pi^{-1}(p)$은 $\mathbb{R}^{n+1}$에서 반직선이 하나 제거된 집합으로 볼록집합이 아니므로 $D$는 벤제크리-볼록집합이 아니다.

정리 3.1의 (vi) 의 역도 한 번 생각해보자. 즉, $\mathbb{S}^n$의 임의의 아핀공간과 $D$의 교집합이 그 아핀공간에서 볼록이면 $D$는 벤제크리-볼록집합일까? 우리는 쉬운 반례를 바로 생각할 수 있다. $\mathbb{S}^n$의 임의의 대척쌍(antipodal pair) $\{p, p^*\}$으로 이루어진 집합은 벤제크리-볼록집합이 아니지만 위 성질을 만족한다. 그렇지만 이러한 경우가 아니면 역이 성립함을 보일 수 있다.

**정리 3.2:** *$\mathbb{S}^n$의 부분집합 $D$가 대척쌍으로 이루어진 두 점 집합이 아니면 다음을 만족한다: $\mathbb{S}^n$의 임의의 아핀공간 $\mathbb{A}^n$에 대하여 $D \cap \mathbb{A}^n$이 $\mathbb{A}^n$에서 볼록이면 $D$는 벤제크리-볼록이다.*

**증명.** 벤제크리-볼록성과 $C_C$-볼록성이 일치하므로 $D$가 $C_C$-볼록임을 보이자. $D$의 임의의 서로 다른 두 점 $p, q$가 서로 대척이 아닌 경우에는 두 점을 포함하는 아핀공간을 생각함으로써 두 점을 잇는 최단 곡선이 $D$ 안에 있음을 증명할 수 있다. 이제 $q = p^*$라 하면, $D$는 대척쌍으로 이루어진 두 점 집합이 아니므로 $D$ 안에 또 다른 점 $r$을 찾을 수 있다. $\{p, r\}$과 $\{p^*, r\}$은 둘 다 대척쌍이 아니므로 각각의 두 점을 잇는 최단 곡선이 $D$ 안에 있다. 그런데 이 두 최단 곡선을 이은 선분이 바로 $p$와 $q = p^*$를 잇는 선분이다. 대척점을 잇는 임의의 선분은 최단 곡선이므로 $C_C$-볼록성이 증명되었다. □

## 4 카이퍼-볼록

이 장에서는 구면 위의 집합에 대한 볼록성의 정의 중 카이퍼-볼록에 대하여 알아보고, 카이퍼-볼록 영역에 대한 카이퍼의 분류 결과([10] 참조) 에 대한 좀 더 엄밀한 증명을 제시한다. 카이퍼가 정의한 구면상의 볼록성은 서론에서 언급한 $C_D$-볼록성과 일치하므로 다음과 같이 정의한다.

**정의 4.1:** $D$ 의 임의의 두 점을 잇는 선분이 $D$ 안에 존재할 때 $D$ 는 **카이퍼-볼록 (Kuiper-convex)**이라 한다.

아핀공간에서는 볼록집합의 임의의 두 점을 잇는 직선은 그 볼록집합과의 교집합이 선분이다. 그러나 앞에서 본 Figure 2의 벤제크리-볼록집합 $D$ 를 살펴보면, 뾰족한 양 끝점을 잇는 직선 중 일부 직선은 $D$ 와의 교집합이 그 두 점을 끝점으로 하는 반원이고 일부 직선은 그 두 점이 바로 교집합이 된다. 즉, 아핀공간에서와는 다르게 그러한 직선의 존재성은 보장이 되지만, 모든 만나는 직선이 그런 성질을 만족하는 것은 아니라는 것이다. 이 점은 카이퍼-볼록성이 $C_E$-볼록성과 다르다는 것을 보여주는 것으로, 이는 근본적으로 (명제 $D$) 와 (명제 $E$) 가 구면공간에서는 동치가 아니기 때문에 일어나는 현상이다. 그렇지만 볼록집합의 내부를 통과하는 직선에 대해서는 같은 결론을 얻을 수 있음을 쉽게 알 수 있는데, 이는 기본적인 내용으로 뒤에서 필요하므로 여기서 간단히 정리해 보자.

**도움정리 4.1:** *$D$ 가 $\mathbb{S}^n$ 의 부분집합일 때 다음이 성립한다.*

*(i) $D$ 가 카이퍼-볼록이면 $D$ 의 임의의 두 점을 잇는 직선 $l$ 이 존재하며 $l \cap D$ 는 연결 집합, 즉 선분이다.*

*(ii) $D$ 의 내부와 만나는 모든 직선 $l$ 에 대하여 $l \cap D$ 는 연결 집합이다.*

**증명.** (i) $p, q$ 가 $D$ 의 서로 다른 두 점이라 하면, $D$ 가 카이퍼-볼록이므로 $p, q$ 를 잇는 선분이 $D$ 안에 존재한다. 이 선분을 포함하는 직선은 유일하므로 이 직선을 $l$ 이라 하면 $l \cap D$ 는 연결 집합임을 다음과 같이 보일 수 있다: $l \cap D$ 이 연결 집합이 아니라면, $p, q$ 를 포함하는 선분 $s_1$ 과 나머지 부분집합 $s_2 \neq \emptyset$ 이 있어 ($s_2$ 는 선분이 아닐 수 있음)

$$l \cap D = s_1 \cup s_2, \quad s_1 \cap s_2 = \emptyset$$

를 만족한다. 이제 $s_2$ 에서 한 점 $r$ 을 택하면, $r^*$ 가 아닌 점 $t$ 를 $s_1$ 에서 고를 수 있다. 그런데 $r$ 과 $t$ 를 잇는 선분은 $D$ 안에 있지 않으므로 $D$ 가 볼록집합이라는 데 모순이 되어 $l \cap D$ 이 연결 집합임이 증명되었다.

(ii) $D$ 의 내부와 만나는 직선을 $l$ 이라 하면, $l \cap D$ 에는 대척이 아닌 두 점이 존재한다. 그런데 $l$ 위의 대척이 아닌 임의의 두 점을 지나는 직선은 $l$ 자신이 유일하므로 (i) 에 의해 $l \cap D$ 는 연결집합이어야 한다. $\square$

위 도움정리가 카이퍼-볼록성과 $C_E$-볼록성이 일치한다는 것을 말해주지 않음은 앞에서 보았다.(Figure 2의 벤제크리-볼록집합은 카이퍼-볼록집합이지만 $C_E$-볼록집합은 아니다.) 그렇지만 (ii) 로부터 영역들에 대해서는 카이퍼-볼록성 ($C_D$-볼록성) 과 $C_E$-볼록성이 일치함을 바로 알 수 있다. 즉, 다음이 성립한다:

**따름정리 4.2:** 구면 상의 임의의 영역 $D$는, $C_D$-볼록이면 $C_E$-볼록이고, $C_E$-볼록이면 $C_D$-볼록이다.

도움 정리 4.1로부터 다음을 또한 알 수 있다:

**따름정리 4.3:** 카이퍼-볼록 영역의 여집합은 닫힌 카이퍼-볼록집합이다.

**증명.** 카이퍼-볼록 영역 $D$의 여집합 $D^c$에 있는 서로 다른 두 점 $\{p, q\}$에 대하여 이 두 점을 잇는 직선을 $l$이라 하면, 도움 정리 4.1의 (ii) 에 의해 $l \cap D$이 공집합이거나 열린 선분이므로 $l \cap D^c$이 $\{p, q\}$를 잇는 선분을 포함한 닫힌 선분으로 $D^c$에 통째로 들어간다. $D^c$에 있는 임의의 두 점에 대하여 이러한 선분을 찾을 수 있으므로 $D^c$는 카이퍼-볼록집합이다. □

일반적인 카이퍼-볼록집합에 대해서는 위 따름정리가 성립하지 않는다. 가장 간단한 예로 구면상의 직선 (대원) 을 생각할 수 있다. 임의의 직선은 카이퍼-볼록집합이지만 그 여집합은 볼록이 아니다. 사실 이 경우는 경계를 공유하는 열린 반구 두 개의 합집합으로 그 여집합이 이루어져 있으므로 연결집합조차 아님을 알 수 있다. 또 다른 예로는, 반원보다 길이가 더 길거나 같은 선분 또는 Figure 2에 있는 것과 같은 종류의 $C^b$-볼록집합들은 카이퍼-볼록이지만 그 여집합은 볼록이 아닌 연결 집합들이다.

이렇게 볼록집합이 영역인 경우에만 특수하게 그 여집합이 볼록임을 보장해준다. 그러나 이 성질이 카이퍼-볼록 영역의 외부영역[13)]이 항상 카이퍼-볼록 영역임을 의미하는 것은 아닌데 이것은 뒤에서 보게 될 것이다. 다음 정리는 볼록집합이 영역일 때 나타나는 특이한 성질로 카이퍼 볼록 영역을 분류하는 데 핵심이 되는 내용이다.

**정리 4.4:** $\mathbb{S}^n$ 상의 카이퍼-볼록 영역 $D$는 다음 둘 중 하나를 만족한다.

*(i)* $D$를 만나는 모든 직선은 $D$ 안에 서로 대척인 두 점을 포함한다.

*(ii)* $D$를 만나는 어떤 직선도 $D$ 안에 서로 대척인 두 점을 포함하지 않는다.

**증명.** 카이퍼-볼록집합 $D$가 열린 집합이므로 임의의 직선과의 교집합은 열린 선분이 되며 (도움 정리 4.1), 이는 임의의 직선은 $D$ 안에 혹은 $D$의 여집합에 대척쌍을 항상 포함함을 의미한다. 이제 $D$ 안에 서로 대척인 두 점을 포함하는 직선 $l$과 서로 대척인 두 점을 전혀 포함하지 않는 직선 $l'$이 있다고 가정하면, $D \cap l$ 위의 대척쌍 $\{x, x^*\}$과 $D^c \cap l'$ 위의 대척쌍

13) 즉, 여집합에서 경계가 빠진 집합

$\{y, y^*\}$를 선택할 수 있다. 이 두 점 $x$와 $y$를 잇는 직선을 $l''$이라 하면, $x$와 $x^*$을 양 끝점으로 하는 $l''$의 두 부분 선분 안에 $D$의 외부점 $y$와 $y^*$이 각각 들어가므로 $l''$과 $D$의 교집합은 두 개 이상의 선분의 합이 된다. 이는 영역 $D$가 카이퍼-볼록이라는 것에 모순이므로 (i)을 만족하지 않는 모든 카이퍼-볼록 영역은 (ii)를 만족함이 증명되었다. □

위 증명을 잘 살펴보면 우리는 $D$가 열린 집합이 아닐 경우 정리 4.4가 성립하지 않음을 알 수 있다. 즉, 어떤 카이퍼-볼록집합 $D$ 안에는 서로 대칭인 두 점을 포함하는 직선과 포함하지 않는 직선이 동시에 있을 수 있다. 예를 들어, Figure 3과 같은 유형의 카이퍼-볼록집합 $D = \{[x, y, z] \,|\, y \geq 0, z \geq 0\}$를 살펴보자. $y = z$에 의해 정의된 직선 $l_1$은 $D$의 대척쌍 $[-1, 0, 0]$과 $[-1, 0, 0]^* = [1, 0, 0]$을 포함하고, $x = 0$에 의해 정의된 직선 $l_2$는 $D$ 안에 대척인 쌍을 하나도 포함하지 않는다(Figure 3 참조).

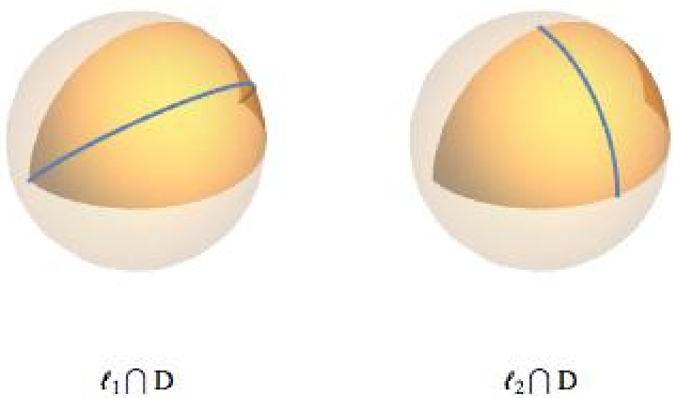


Figure 3. Example of a Kuiper-convex set which shows that theorem 4.4 does not hold; 정리 4.4가 성립하지 않는 카이퍼-볼록집합의 예

$\mathbb{S}^n$의 임의의 부분집합은 그 안에 대척쌍을 포함하거나 전혀 포함하지 않거나 둘 중 하나이다. 이로부터 카이퍼-볼록 영역 $D$가 대척쌍을 전혀 포함하지 않는 경우에는 정리 4.4의 (ii)를 만족하게 되며, 그렇지 않은 경우 (i)을 만족하게 됨을 알 수 있다. 그러므로 카이퍼-볼록집합을 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 살펴보기로 하자:

**정의 4.2:** 카이퍼-볼록집합 $D$ 안에 서로 대칭인 두 점을 포함하는 경우 $D$를 **m-type 카이퍼-볼록**이라 하고 그렇지 않은 경우 **m′-type 카이퍼-볼록**이라 한다.

이 정의와 정리 4.4로부터 우리는 임의의 $m$-type 카이퍼-볼록 영역을 만나는 모든 직선은 그 영역 안에 대척쌍을 포함하므로 다음을 바로 알 수 있다:

- $m$-type볼록 영역($m'$-type볼록 영역) $D$의 내부를 통과하는 $k(< n)$ 차원 부분 구면 $S$

에 대해서 $D \cap S$ 는 $k$ 차원 $m$-type 볼록 영역($m'$-type볼록 영역)이다.

이러한 성질로부터 우리는 카이퍼-볼록 영역을 분류하는 데 중요한 역할을 하는 다음 도움정리를 증명할 수 있다.

**도움정리 4.5:** 모든 카이퍼-볼록 영역 $D \subset \mathbb{S}^n$ 는 다음을 만족한다.

*(i)* $D$가 *m-type*이면 $\mathbb{S}^n$ 의 모든 $k(< n)$ 차원 부분 구면과 만난다.

*(ii)* $D$가 $m'$*-type*이면 $D$와 만나지 않는 $n-1$ 차원 부분 구면이 존재한다.

**증명.** (i) 우선 $k = n-1$일 때 먼저 보이자. $D$와 만나지 않는 $n-1$ 차원 부분 구면 $S = \mathbb{S}^{n-1}$ 이 존재한다고 가정하면 $D$는 $S$를 경계로 하는 한 쪽의 열린 반구에 있게 되므로, $D$ 상의 임의의 점의 대척점은 $S$를 경계로 하는 다른 쪽 반구에 있게 되어 $D$가 $m$-type이라는 데 모순이 된다.

이제 $S_k$가 $D$와 만나지 않는 $k(< n-1)$ 차원 부분 구면이라 하면, $S_k$를 포함하면서 $D$와 교점을 갖는 $k+1$ 차원 부분 구면 $S_{k+1}$을 선택하면, $D_{k+1} = D \cap S_{k+1}$는 $k+1$ 차원 $m$-type 카이퍼-볼록 영역이다. 그런데 $D_{k+1}$은 $S_k$를 만나지 않으므로 $S_{k+1}$의 열린 반구에 들어가게 되고, 이는 $D_{k+1}$의 어떤 점 $p$의 대척점도 $D_{k+1}$에 들어가지 않으므로 $D_{k+1}$가 $m$-type 카이퍼-볼록 영역이라는 데 모순이 된다.

(ii) $D$가 $m'$-type이면 대척쌍을 포함하지 않으므로 $D$의 임의의 점 $p$의 대척점 $p^*$는 $D$의 여집합 $D^c$ 안에 있다. 그런데 $D$가 열린 집합이므로 $D$ 안에 쏙 들어가는 닫힌 공(ball)이 존재하고 이 공의 대척점들의 집합은 $D^c$에 들어가는 닫힌 공이다. 이러한 $D^c$ 안에 있는 공의 반지름을 점점 키워나가면 $D$의 경계에 있는 한 점 $q$에서 접하는 공 $B$를 찾을 수 있다. 이제 $S$를 $q$에서 공 $B$에 접하는 $n-1$ 차원 부분 구면이라 하면 $D$는 $S$를 경계로 하는 두 열린 반구 중 $B$가 속한 반구와 다른 쪽의 열린 반구에 들어감을 보이면 (ii)의 증명이 끝난다.

$q$를 지나는 모든 직선들의 합집합을 취하면 $\mathbb{S}^n$을 덮으며, 이러한 직선들 중 $S$에 있지 않은 직선은 모두 $B$의 내부와 만난다. 그런데 $D$가 대척쌍을 포함하지 않는 볼록집합이므로 직선과의 교집합은 반원보다 짧은 선분이 된다. $q$를 지나는 직선 중 $D$를 만나는 직선은 $S$에 있지 않으므로 모두 $B$의 내부와 만나며, $D$와의 교집합은 $q$를 끝점으로 하고 $q^*$를 포함하지 않는 선분이다. 그러므로 이러한 직선들과 $D$의 교집합은 $B$와 반대쪽에 있는 열린 반구 안에 들어감을 알 수 있으며 이는 $D$가 이 열린 반구에 있음을 의미한다. □

**따름정리 4.6:** $\mathbb{S}^n$ 의 부분집합 $D$는 다음을 만족한다.

*(i)* $D$가 *m-type* 카이퍼-볼록 영역이면 모든 직선과 만난다.

*(ii)* $D$가 $m'$*-type* 카이퍼-볼록 영역이라는 것은 $D$가 아핀-볼록 영역이라는 것과 동치이다.[14)]

**증명.** (i) 도움정리 4.5의 (i)의 $k=1$에 해당한다.

(ii) 도움정리 4.5의 (ii)에 의해 $D$가 $m'$-type 카이퍼-볼록 영역이면 $D$와 만나지 않는 $n-1$ 차원 부분 구면이 존재하므로 $D$는 이 부분 구면을 경계로 하는 한 쪽의 열린 반구에 들어있으며 이는 $D$가 아핀-볼록 영역임을 말한다. 역으로 $D$가 아핀 영역이면, 정리 3.1에 의해 아핀-볼록 영역은 카이퍼-볼록 영역이고, $D$와 만나지 않는 $n-1$ 차원 부분 구면 $S=\mathbb{S}^{n-1}$이 존재하므로 $D$는 $m'$-type 카이퍼-볼록 영역이다. □

지금까지 살펴본 바에 의해 우리는 다음을 알 수 있다:

- $m$-type볼록 영역의 여집합은 $m'$-type 볼록집합이다.
- $m'$-type볼록 영역의 여집합은 $m$-type 볼록집합이다.

또한 $D\subset\mathbb{S}^n$가 카이퍼-볼록 영역일 때 다음 여러 명제들은 서로 동치이며 모두 $D$가 $m$-type 카이퍼-볼록 영역임을 나타낸다.

- $D$는 모든 직선과 만난다.
- $D$는 모든 $k(<n)$ 차원 부분 구면과 만난다.
- $D$와 만나는 모든 직선은 $D$ 안에 서로 대척인 두 점을 포함한다.
- $D$ 안에 서로 대척인 두 점을 포함한다.

$m'$-type 카이퍼-볼록 영역은 아핀-볼록 영역이므로, 앞 장의 분류에 따르면 열린반구이거나 $C^a$- 볼록 영역 또는 $C^b$- 볼록 영역이다. 이 중 적당한 아핀공간에서 유계가 될 수 있는 것이 $C^a$- 볼록 영역이다. 이러한 $C^a$- 볼록 영역들은 그들의 닫힘도 유계인 아핀-볼록집합이므로 다음을 증명할 수 있다.

**도움정리 4.7:** $D$가 $C^a$- 볼록 영역일 때, 외부 영역 $D'=\mathbb{S}^n-\bar{D}$은 $m$*-type* 카이퍼-볼록 영역이다.

**증명.** $D'$의 임의의 두 점 $p,q$를 지나는 직선 $l$을 생각하자. $l$이 $\bar{D}$를 만나지 않는다면 $p$와 $q$를 지나는 선분이 $D'$ 안에 있음은 분명하다. $l\cap\bar{D}\neq\emptyset$이라면 $l\cap\bar{D}$은 닫힌 선분이다($\bar{D}$가 아핀-볼록이므로). 그러므로 $l\cap\bar{D}$는 $p$와 $q$를 잇는 $l$의 두 부분 선분 중 하나에 완전히 들어가게 되며, 나머지 부분 선분이 $D'$에 쏙 들어간다. $D'$ 위의 임의의 두 점을 잇는 선분이

14) 모든 $m'$-type 카이퍼-볼록집합이 아핀-볼록집합인 것은 아님에 주의하라. 아핀-볼록이 아닌 $m'$-type 카이퍼-볼록집합이 존재한다. 예를 들어, 닫힌 반구에서 경계에 있는 반원보다 큰 선분을 제거한 집합이 그러하다.

$D'$ 안에 있음을 증명하였으므로 $D$의 외부 영역 $D'$은 카이퍼-볼록이다. $D'$가 $m$-type임은 자명하다. □

그렇다면 $C^b$- 볼록 영역의 외부 영역은 어떠한지 알아보자.

**도움정리 4.8:** $D$가 $C^b$- 볼록 영역일 때, 외부 영역 $D' = \mathbb{S}^n - \bar{D}$은 카이퍼-볼록 영역이 아니다.

**증명.** $D'$이 카이퍼-볼록 영역이라고 가정하자. $D'$이 $m'$-type이라면, $D$와 $D'$ 둘 다 아핀-볼록 영역이므로 $D$와 $D'$은 열린 반구가 되어야 하며, 이는 $D$가 $C^b$-영역이라는 데 모순이 된다.

이제 $D'$이 $m$-type 카이퍼-볼록 영역이라고 가정하는 경우에도 모순이 생김을 보이자. $D$가 $C^b$-영역이므로 경계에 서로 대척인 두 점 $\{r, r^*\}$을 갖는다. $D$ 위의 다른 한 점 $x$와 $r, r^*$를 지나는 직선을 $l$이라 하면, $l \cap \bar{D}$는 $r$과 $r^*$를 양 끝점으로 하는 선분이 되므로 $l \cap D' = l \cap (\bar{D})^c$는 서로 대척인 두 점을 가질 수 없다. 이는 $m$-type 카이퍼-볼록 영역과 만나는 모든 직선은 서로 대척인 두 점을 포함한다는 사실에 모순이다. □

실제로 $C^b$-영역인 $D = \{[x, y, z], | \, y > 0, z > 0\}$를 살펴보면, $y = -z$에 의해 정의된 직선 $l$과 $D' = \mathbb{S}^n - \bar{D} = \{[x, y, z], | \, y < 0 \quad \text{이거나} \quad z < 0\}$의 교집합은 $l - \{[-1, 0, 0], [1, 0, 0]\}$이다. 즉, $l \cap D'$이 두 선분으로 나눠지므로 $D$의 외부 영역 $D'$은 카이퍼-볼록 영역이 아니다. 그렇지만 $D^c$은 카이퍼-볼록집합이다. 그러므로 이 예는 닫힌 카이퍼-볼록집합의 내부가 카이퍼-볼록 영역이 아닐 수 있음을 또한 보여준다. 그러나 외부 영역이 대척쌍을 포함하지 않는 경우, 즉, $m$-type 카이퍼-볼록 영역의 외부 영역은 볼록임을 알 수 있는데 이를 증명하기 위하여 우선 $m'$-type 카이퍼-볼록집합에 대하여 알아보자:

**도움정리 4.9:** $\mathbb{S}^n$의 $m'$*-type* 카이퍼-볼록집합 $D$에 대하여 다음이 성립한다*:*

*(i)* $\mathbb{S}^n$의 임의의 아핀공간(열린 반구)과 $D$의 교집합이 그 아핀공간에서 볼록이다.

*(ii)* $D$의 내부는 카이퍼-볼록 영역이다.

*(iii)* $D$는 벤제크리-볼록이다.[15)]

**증명.** (i)$\mathbb{S}^n$의 임의의 아핀공간 $\mathbb{A}^n$에 대하여, $\mathbb{A}^n \cap D$이 아핀-볼록임을 증명하자. $p$와 $q$가 $\mathbb{A}^n \cap D$의 두 점이라 하면, $D$가 카이퍼-볼록이므로 $p$와 $q$를 잇는 선분이 $D$ 안에 존재한다. 그런데 $D$가 $m'$-type이므로 $p$와 $q$를 잇는 두 선분 중 대척점을 포함하지 않는 쪽 선분이 $D$ 안에 있어야 하므로 이 선분은 $\mathbb{A}^n \cap D$ 안에 있다. 임의의 두 점을 잇는 선분이 $\mathbb{A}^n \cap D$ 안에 있으므로 $\mathbb{A}^n \cap D$은 볼록임이 증명되었다.

15) 역은 성립하지 않는다. 예를 들어, 닫힌 반구에서 경계에 있는 열린 반원을 뺀 집합은 벤제크리-볼록이지만 $m$-type 카이퍼-볼록집합이다.

(ii) $D$의 내부 영역 $D^0$에서 임의의 두 점 $p, q$과 이 두 점을 포함하는 한 아핀공간 $\mathbb{A}^n$를 선택하자. (i)에 의해 $D' = D \cap \mathbb{A}^n$은 $p, q$를 내부점으로 하는 아핀-볼록집합이므로 $p, q$를 잇는 선분이 통째로 $D'$의 내부에 들어간다. $D^0$는 $D'$의 내부를 포함하므로 $p, q$를 잇는 선분이 $D^0$에 포함되고, 이는 $D^0$가 카이퍼-볼록임을 의미한다.

(iii) $D$가 카이퍼-볼록이므로 $D$ 안의 임의의 두 점 $p$와 $q$를 잇는 선분이 $D$ 안에 존재한다. 그런데 $D$가 $m'$-type이므로, $p$와 $q$는 대척점이 될 수 없고, 이 두 점을 잇는 두 선분 중 대척점을 포함하지 않는 쪽 선분이 $D$ 안에 있어야 한다. 이는 $D$ 안의 임의의 두 점을 잇는 최단곡선이 $D$에 있음을 의미하므로 $D$는 벤제크리-볼록이다. □

이제 볼록 영역 $D$의 외부 영역이 대척쌍을 포함하지 않는 경우, 즉 $D$가 $m$-type인 경우 외부 영역이 볼록임을 보이자. $\bar{D} = \mathbb{S}^n$인 경우, 즉 외부 영역이 공집합인 경우를 포함하여 다음을 증명할 수 있다:

**정리 4.10:** $\mathbb{S}^n$이 아닌 $n$ 차원의 $m$-*type* 카이퍼-볼록 영역은 $k(\leq n)$ 차원의 $C^a$- 볼록 영역의 닫힘의 여집합이다.

**증명.** $D \subset \mathbb{S}^n$가 $\mathbb{S}^n$이 아닌 $m$-type 카이퍼-볼록 영역일 때, (i) $\bar{D} \neq \mathbb{S}^n$인 경우와 (ii) $\bar{D} = \mathbb{S}^n$인 경우로 나누어 생각해 보자. $K$를 $D$의 여집합이라 하고 $l$을 $K$와 만나는 임의의 직선이라 하면, 따름정리 4.6의 (i)에 의해 $l$은 $D$도 만난다. $D$가 $m$-type 카이퍼-볼록 영역이므로 $l \cap D$는 서로 대척인 두 점을 포함하는 열린 선분이다. 이는 $l \cap K$이 서로 대척인 어떤 두 점도 갖지 않는 닫힌 선분임을 말해주므로 $K$가 $m'$-type 카이퍼-볼록집합임을 의미한다.
(i) ($\bar{D} \neq \mathbb{S}^n$인 경우) 이 경우는 도움정리 4.9에 의해 $K$의 내부점들의 집합 $K^0$가 $m'$-type 카이퍼-볼록 영역이므로 따름정리 4.6에 의해 $K^0$는 아핀-볼록 영역이다. 그런데 $K$가 서로 대척인 두 점을 전혀 갖지 않으므로 $K^0$는 $C^a$- 볼록 영역이고 $D = K^c = (\overline{K^0})^c$이다.

(ii) ($\bar{D} = \mathbb{S}^n$인 경우) 이 경우 $K$는 더 낮은 차원의 구면에 포함된다. $K$를 포함하는 가장 낮은 차원의 부분 구면공간이 $k$ 차원의 부분 구면 $\mathbb{S}^k$라고 하면, $\mathbb{S}^k$ 안에서의 $K$의 내부가 $\mathbb{S}^k$의 $C^a$- 볼록 영역이다. □

카이퍼는 정리 4.10의 증명과정 (i)에 나타나는 카이퍼-볼록 영역을 [10]에서 **C$^c$- 볼록 영역**이라 불렀다. (ii)의 경우를 **C$^d$- 볼록 영역**이라 부르기로 하면, $\mathbb{S}^n$과 $\mathbb{A}^n$(열린 반구) 이외의 모든 카이퍼-볼록 영역은 네 유형, 즉, $C^a$- 볼록 영역, $C^b$- 볼록 영역, $C^c$- 볼록 영역, $C^d$- 볼록 영역으로 분류된다(Figure 4 참조).

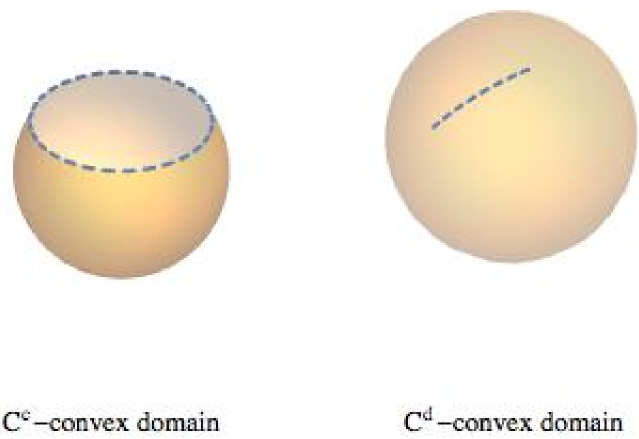


Figure 4. $C^c$-convex domains and $C^d$-convex domains; $C^c$-볼록 영역과 $C^d$-볼록 영역

## 5 요약 및 결론

우리는 이 논문에서 아핀공간에서 볼록집합의 정의로 사용할 수 있는 여러 명제를 적용해 봄으로써 구면상의 볼록성에 대한 여러 동일하지 않은 정의들을 살펴보았다. 특히 카이퍼-볼록성($C_D$-볼록성)은 다른 볼록성들과 다르게 다음과 같은 특이한 성질들을 가지고 있음을 보았다: [16]

- 볼록 영역의 여집합은 볼록집합이다.
- 볼록집합의 내부 영역이 항상 볼록인 것은 아니다.

그렇지만 영역들만을 보았을 때는 이 볼록성들이 많은 부분 서로 동일함을 보았는데, $C_E$-볼록성은 카이퍼-볼록성과 동일하며, 나머지 모든 볼록성이 아핀-볼록성과 일치함을 알 수 있었다($\mathbb{S}^n$ 의 포함 여부를 제외하면). 그리고 아핀-볼록 영역이 아닌 모든 $n$ 차원 카이퍼-볼록 영역은 $\mathbb{S}^n$ 자신이거나 $\mathbb{S}^n$ 상의 유계인 $k(\leq n)$ 차원 아핀-볼록 영역의 닫힘의 여집합임을 보았다. 즉, 구면 상의 부분 영역(proper domain)이 카이퍼-볼록이라 함은 아핀-볼록이거나 유계인 아핀-볼록집합의 외부영역임을 증명하였다.

이 논문에서는 다루지 않았지만, 구면 상에서 집합의 볼록성을 정의하는 또 하나의 접근 방법 중의 하나는 다음 명제와 같이 아핀공간에서 볼록집합을 특성 짓는 명제를 통한 것이다:

모든 닫힌(열린) 볼록집합은 닫힌(열린) 반공간(half space)들의 교집합이다.

---

16) $C_E$-볼록성도 위 두 성질을 만족함을 보일 수 있다.

구면공간에서는 반공간을 반구로 대체하여 닫힌 (열린) 볼록집합을 정의할 수 있을 것이다. 위 명제를 그대로 사용할 경우 하나의 대척쌍으로 이루어진 두 점 집합이 볼록집합이 될 수 있으며, 이러한 경우를 제외하기 위해서는 연결 집합이라는 아핀공간에서는 저절로 성립하는 성질을 추가로 넣어 정의할 수도 있겠는데, 그럴 경우 이 볼록성은 벤제크리-볼록성과 닫힌 (열린) 집합에서 일치한다. 이렇게 다른 접근 방법을 통한 구면볼록성의 정의도 이 논문에서 취한 방법에 의한 정의와 사실은 크게 다르지 않을 것으로 보여지며, 결국은 상호간에 정의와 성질이 교차되는 정도일 것이다.

## References


1. G. Aubrun, M. Fradelizi, Two-point symmetrization and convexity, *Arch. Math.* 82 (2004), 282–288.
2. J. P. Benzécri, Sur les variétés localement affines et projectives, *Bull. Soc. Math. France* 88 (1960), 229–332.
3. F. J. Cobos et al, The width of a convex set on the sphere, *Proceeding of the 9th Canadian Conference on Computational Geometry*, Kingston, Ontarlo, Canada, Aug. 11-14, 1997.
4. D. Dekker, Convex regions in projective space, *The Amer. Math. Monthly* 62(6) (1955), 430–431.
5. O. P. Ferreira, A. N. Iusem, S. Z. Németh, Projections onto convex sets on the sphere, *Jour. Global Optimization* 57(3) (2013), 663–676.
6. J. de Groot, H. de Vries, Convex sets in projective space, *Compositio Mathematica* 13 (1956–1958), 113–118.
7. B. P. Haalmeyer, *Bijdragen tot de theorie der elementairoppervlakken*, Amsterdam, 1917.
8. L. Hörmander, *Notion of convexity*, Mordern Birkhäuser Classics, 1994.
9. H. Kneser, Eine Erweiterung des Begriffes "konvexe Körper", *Math. Ann.* 82 (1921), 287–296.
10. N. H. Kuiper, On convex locally projective spaces, Convegno Intern. Geom. Diff. Italy, 1953, 200–213.
11. K. Menger, Urtersuchugen über allgemeine Metrik, *Math. Ann.* 100 (1928), 75–163.
12. D. Minda, The hyperbolic metric and bloch constants for spherically convex regions, *Complex Variables* 5 (1986), 127–140.
13. R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Cambridge University Press, 1993.
14. E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. Teil III, *J. Reine Anrgew. Math.* 146 (1916), 1–52.
15. T. Todda, Convex sets in a real projective space and its application to computational geometry, manuscript.
16. T. Todda, Multi-convex sets in real projective spaces and their duality, manuscript.
17. J. H. C. Whitehead, Convex regions in the geometry of paths, *Differential geometry: The Mathematical Works of J. H. C. Whitehead*, (2014), 223–232.