

통신 지연을 갖는 고차 적분기시스템의 출력 피드백 일치

Output Feedback Consensus of High-order Integrators with a Communication Delay

이 성 렬[★]

Sungryul Lee[★]

Abstract

This paper addresses the output feedback consensus problem for high-order integrators under a directed network with a communication delay. In order to solve this problem, the dynamic output feedback controller is proposed. Also, by using Lyapunov-Krasovskii functional, it is shown that the existence of the proposed consensus controller can always be guaranteed even in the presence of an arbitrarily large communication delay.

요 약

본 논문은 통신 지연을 가지는 방향 네트워크로 연결된 고차 적분기시스템의 출력 피드백 일치문제를 다룬다. 이 문제를 해결하기 위하여 기존의 저이득 제어기에 설계변수를 추가한 새로운 동적 출력 피드백 제어기를 제안한다. 또한, 제안한 제어기의 존재성이 임의로 큰 통신지연이 존재하는 경우에도 항상 보장됨을 증명한다.

Key words : high-order integrators, consensus, communication delay, directed graph, output feedback

* Dept. of Control & Robotics Engineering, Kunsan National University

★ Corresponding author

Email: 2sungryul@kunsan.ac.kr, Tel: 063-469-4687

※ This paper was supported by research funds of Kunsan National University

Manuscript received Nov.8 ,2016; revised Dec. 23, 2016 ; accepted , Dec.23, 2016

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

1. 서론

다개체 시스템의 일치문제는 제어분야에서 가장 활발히 연구되고 있는 분야중의 하나이다. 다개체 시스템의 일치문제는 무인항공기의 편대비행, 무인자동차의 주행제어, 센서 네트워크, 등 다양한 분야에 응용 가능한 핵심기술이기 때문에 매우 중요하다[1]. 지금까지 선형 다개체 시스템의 일치제어는 매우 광범위하게 연구되어져 왔다 [2][3]. 이후, 이러한 연구결과들은 적응 일치, 출력피드백 일치, 비선형 다개체 시스템의 일치문제 등으로 확장되고 있다[4][5][6]. 한편, 다개체시스템의 각 개체는 통신 네트워크를 통하여 이웃한

개체로부터 일치 제어에 필요한 상태 정보를 수집하기 때문에 네트워크에서 통신지연이 발생하면 제어기의 안정성을 보장하지 못한다. 따라서, 일치 제어기 설계문제에서 통신지연에 대한 보상 기술은 매우 중요한 주제이다. 지금까지 통신지연이 존재하는 다개체 시스템의 일치 문제에 관한 대부분의 논문들은 기존의 시간지연 시스템의 제어방법중의 하나인 선행행렬부등식 기반의 제어방법을 제안하고 있다[7][8][9][10]. 그러나 이러한 접근방법의 가장 큰 단점은 선행행렬부등식의 해의 존재성을 보장하는 통신지연의 최대값이 매우 제한적이라는 것이다. [11]에서는 고차적분기 시스템에 대하여 임의의 통신지연이 존재하는 경우에도 안정성을 보장하는 일치제어기를 제안하였다. 그러나, 양방향 네트워크인 경우에만 적용가능하고 상태피드백 기반의 제어기라는 단점이 존재한다. 본 논문에서는 [11]의 결과를 확장하여 통신지연을 갖는 방향 네트워크로 연결된 고차 적분기시스템의 일치 문제를 다룬다. 기존의 논문과는 다르게 선행행렬부등식을 사용하지 않고 시간지연의 효과를 보상해주는 새로운 이득행렬을 갖는 출력 피드백 기반의 동적제어기를 제안한다. 또한, 제안한 출력피드백 일치제어기는 통신지연의 상한값이 알려진다면 임의로 큰 통신지연이 존재하는 경우에도 일치 문제를 해결할 수 있음을 증명한다. 마지막으로 모의실험을 통하여 제안한 방법의 유효성을 입증한다.

II. 본론

본 논문에서는 다음과 같은 고차 적분기시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + Bu_i(t), \\ y_i(t) &= Cx_i(t), i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x_i(t) \in R^n, u_i(t) \in R, y_i(t) \in R$ 는 각각 i 번째 개체의 상태변수, 제어입력, 출력을 나타낸다. 행렬 $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times 1}, C \in R^{1 \times n}$ 는 다음과 같은 상수행렬이다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0 \ \dots \ 0). \quad (2)$$

개체들 사이의 통신 네트워크는 방향(directed) 그래프 $G=(V,E,A)$ 를 이용하여 표현한다.

$V=\{1, \dots, N\}$ 는 노드의 집합이고 $E \subset V \times V$ 는 에지의 집합이다. $A=(a_{ij}) \in R^{N \times N}$ 는 방향 그래프 G 의 인접(Adjacency) 행렬을 나타낸다. $L=(l_{ij}) \in R^{N \times N}$ 은 G 의 라플라시안(Laplacian) 행렬을 나타낸다. 그래프 이론과 관련된 용어 정의는 [2]를 참고하라. 다음에서 본 논문의 주요결과를 증명하기 위해 필요한 가정 및 보조정리를 소개한다.

가정1: 방향 그래프 G 는 directed spanning tree를 포함한다.

보조정리1[12]: 가정1이 성립한다고 가정하자. 그러면, 다음 식 (2)를 만족시키는 비특이 행렬 T 가 항상 존재한다.

$$T^{-1}LT = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} \\ 0_{(N-1) \times 1} & L_{22} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times (N-1)} \\ 1_{N-1} & I_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

위식에서, $1_{N-1} = (1, \dots, 1)^T \in R^{N-1}$, $I_N \in R^{N \times N}$ 은 단위행렬을 나타내고 $0_{1 \times (N-1)} \in R^{1 \times (N-1)}$ 은 영행렬을 나타낸다. L_{12}, L_{22} 는 적당한 크기를 갖는 행렬이다. 더욱이, L_{22} 의 고유값은 라플라시안 행렬 L 의 0 아닌 고유값과 같다.

보조정리2[13]: 식 (1)의 행렬 A, B 와 상수 $\epsilon \in (0, 1]$ 에 대하여 다음 식 (4)를 만족시키는 유일한 행렬 $P_\epsilon = P_\epsilon^T > 0$ 가 항상 존재한다.

$$A^T P_\epsilon + P_\epsilon A - P_\epsilon B B^T P_\epsilon + \epsilon I_n = 0 \quad (4)$$

위 식에서 $I_n \in R^{n \times n}$ 는 단위행렬이다. 더욱이, 행렬 P_ϵ 은 다음을 만족시킨다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon = 0, P_\epsilon B B^T P_\epsilon \leq n \epsilon P_\epsilon \quad (5)$$

각 개체는 식 (6)과 같이 통신지연이 존재하는 네트워크를 통하여 이웃한 개체로부터 단지 출력 정보만을 받을 수 있다고 가정한다.

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} (y_j(t-\tau) - y_i(t-\tau)) \quad (6)$$

위 식에서 $\tau > 0$ 는 알려진 통신지연을 나타내고 임의로 큰 값을 가질 수 있다.

정의1: 다개체 시스템 (1)에 대하여 출력 피드백 일치 문제는 모든 초기조건 $x_i(0), \zeta_i(0)$ 과 모든 $i=1, \dots, N-1$ 에 대하여 다음 식 (7)을 만족시키는

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|\zeta_i(t) - \zeta_j(t)\| = 0 \quad (7)$$

아래 식 (8)과 같은 동적 출력피드백 제어기를 설계하는 문제로 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_i(t) &= A_C \zeta_i(t) + B_C v_i(t), \\ u_i(t) &= C_C \zeta_i(t), i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

위 식에서 $\zeta_i(t) \in R^n$, A_C, B_C, C_C 는 이득행렬이다.

본 논문의 목표는 유한하지만 임의의 크기를 가질 수 있는 통신지연 $\tau > 0$ 에 대하여 식 (1)의 출력 피드백 일치문제를 해결하는 식 (8)의 형태를 가지는 출력 피드백 제어기를 설계하는 것이다.

III 주요결과

다개체 시스템 (1)에 대한 출력 피드백 일치 문제를 풀기 위하여 다음과 같은 일치 제어기를 제안한다.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_i(t) &= A \zeta_i(t) + D_\theta H(v_i(t) - C \zeta_i(t)), \\ u_i(t) &= -\alpha B^T P_\epsilon K_\theta \zeta_i(t), i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

위 식 (9)에서 $D_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \dots, \theta^n)$ 와 $K_\theta = \text{diag}(\theta^n, \theta^{n-1}, \dots, \theta)$ 는 이득행렬이고 상수 $\theta \in (0, 1]$ 는 설계변수이다. P_ϵ 는 식 (4)의 해이다. 상수 $\epsilon \in (0, 1]$ 는 설계변수이다. 이득행렬 H 는 $A - HC$ 가 Hurwitz하도록 선택한다. 상수 α 도 설계 변수이다. α, ϵ, θ 의 설계방법은 보조정리 5와 정리 1의 증명과정에서 제시할 것이다. 먼저, 주요 결과를 증명하는데 필요한 보조정리를 제시하겠다.

보조정리3: 라플라시안 행렬 L 의 0아닌 고유값을 $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ 으로 정의하자. 그러면 $U^{-1}L_{22}U = \Delta$ 를

만족시키는 비특이 행렬 U 가 존재한다. 여기서, 행렬 Δ 는 상부 삼각(upper triangular)행렬이고 그것의 대각요소는 $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ 이다.

증명: 보조정리 1에서 L_{22} 의 고유값은 라플라시안 행렬 L 의 0아닌 고유값과 같다는 사실을 고려하면 위 정리는 선형대수로부터 쉽게 유도된다.

보조정리4: 행렬 A 를 $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ 으로 정의하자. 어떤 행렬 $M, N \in R^{2n \times 2n}$ 에 대하여 행렬 $I_{N-1} \otimes M + \Delta \otimes N$ 가 Hurwitz하다는 사실과 $I_{N-1} \otimes M + A \otimes N$ 가 Hurwitz하다는 것은 동가이다.

증명: 행렬식의 성질을 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \det(I_{N-1} \otimes M + \Delta \otimes N) \\ = \prod_{i=1}^{N-1} \det(M + \lambda_i N) = \det(I_{N-1} \otimes M + A \otimes N) \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)으로부터 $I_{N-1} \otimes M + \Delta \otimes N$ 의 고유값과 $I_{N-1} \otimes M + A \otimes N$ 의 고유값은 같음을 알 수 있다. 이 사실을 고려하면 정리의 결과는 쉽게 증명된다.

보조정리5: $i=1, \dots, N-1$ 에 대하여 다음과 같은 선형시스템을 고려해보자.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -\alpha B B^T P_\epsilon \\ \lambda_i H C & A - H C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i1}(t) \\ x_{i2}(t) \end{pmatrix} \quad (11)$$

그러면, $\epsilon \in (0, \epsilon^*], \alpha \in (0, \alpha^*]$ 를 만족시키는 임의의 ϵ, α 에 대하여 시스템 (11)을 지수 함수적으로 안정하게 만드는 ϵ^*, α^* 가 항상 존재한다.

증명: $\alpha^* = 1/(2 \min_i \text{Re}(\lambda_i))$ 으로 정의하면 [2]의 정리4의 증명과 비슷하므로 생략함.

정리1: 다개체 시스템 (1)이 가정 1을 만족시킨다고 가정하자. 그러면, 임의의 $\tau > 0$ 에 대하여 제어기 (9)가 다개체 시스템 (1)의 출력피드백 일치문제를 해결하도록 하는 설계변수 α, ϵ, θ 가 항상 존재한다.

증명: 먼저 $\xi_i(t) = (x_i^T(t), \zeta_i^T(t))^T$ 으로 정의하고 식 (1), (6), (9)를 고려하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= \begin{pmatrix} A & -\alpha BB^T P_c K_\theta \\ 0 & A - D_\theta HC \end{pmatrix} \xi_i(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ D_\theta H \end{pmatrix} v_i(t) \\ y_i(t) &= (C \ 0) \xi_i(t) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $\xi(t) = (\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_N^T)^T$ 으로 정의하면 식 (12)는 다음처럼 행렬 형태로 정리된다.

$$\dot{\xi}(t) = (I_N \otimes \bar{A})\xi(t) + (L \otimes \bar{B})\xi(t-\tau) \quad (13)$$

위 식에서 각 행렬은 다음 식처럼 정의한다.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & -\alpha BB^T P_c K_\theta \\ 0 & A - D_\theta HC \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_\theta HC & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

보조정리1의 행렬 T 의 정의로부터 그것의 역행렬은 다음과 같다.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times (N-1)} \\ -1_{N-1} & I_{N-1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

다음과 같은 상태변환을 이용하면

$$\bar{\xi}(t) = (T^{-1} \otimes I_n)\xi(t) \quad (16)$$

식 (13)은 다음처럼 변환된다.

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = (I_N \otimes \bar{A})\bar{\xi}(t) + (T^{-1} L T \otimes \bar{B})\bar{\xi}(t-\tau) \quad (17)$$

식 (15)로부터 다음 사실을 얻을 수 있다.

$$\bar{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) - \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_N(t) - \xi_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (18)$$

위 식에서 $z(t) = (z_1^T(t), \dots, z_{N-1}^T(t))^T$ 이다. 식 (18)을 이용하면 식 (17)은 다음처럼 2개의 서브시스템으로 분해될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= \bar{A}\xi_1(t) + (L_{12} \otimes \bar{B})z(t-\tau) \\ \dot{z}(t) &= (I_{N-1} \otimes \bar{A})z(t) + (L_{22} \otimes \bar{B})z(t-\tau) \end{aligned} \quad (19)$$

식 (18)을 고려하면, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t)\| = 0$ 가 만족되면

$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_i(t) - \xi_1(t)\| = 0$ 이 성립한다. 이것은, 다음 식 (20)의 점근적 안정도를 증명하면

$$\dot{z}(t) = (I_{N-1} \otimes \bar{A})z(t) + (L_{22} \otimes \bar{B})z(t-\tau) \quad (20)$$

식 (1)의 출력피드백 일치문제가 해결됨을 의미한다. 따라서, 식 (20)의 점근적 안정도를 증명하겠다. 먼저, 뉴턴-라이프니츠 법칙을 이용하면 식 (20)은 다음처럼 변환된다.

$$\dot{z}(t) = (I_{N-1} \otimes \bar{A} + L_{22} \otimes \bar{B})z(t) - (L_{22} \otimes \bar{B}) \int_{t-\tau}^t \dot{z}(s) ds \quad (21)$$

다시, 다음과 같은 좌표변환을 고려해보자.

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= (I_{N-1} \otimes \bar{\Sigma})z(t), \\ \bar{\Sigma} &= \text{diag}(\Sigma, \Sigma), \Sigma = \text{diag}(\theta^{-1}, \dots, \theta^{-n}) \end{aligned} \quad (22)$$

식 (22)에 의하여 식 (21)은 다음처럼 변환된다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}(t) &= (I_{N-1} \otimes \bar{\Sigma} \bar{A} \bar{\Sigma}^{-1} + L_{22} \otimes \bar{\Sigma} \bar{B} \bar{\Sigma}^{-1})\bar{z}(t) \\ &\quad - (L_{22} \otimes \bar{\Sigma} \bar{B} \bar{\Sigma}^{-1}) \int_{t-\tau}^t \dot{\bar{z}}(s) ds \end{aligned} \quad (23)$$

행렬 A, B, C 의 구조적 단순성을 이용하면 다음 사실을 증명하는 것은 어렵지 않다.

$$\begin{aligned} \Sigma A \Sigma^{-1} &= \theta A, \\ \Sigma B B^T P_c K_\theta \Sigma^{-1} &= \theta B B^T P_c \\ \Sigma D_\theta H C \Sigma^{-1} &= \theta H C \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)을 이용하면 식 (23)은 식 (25)처럼 정리된다.

$$\dot{\bar{z}}(t) = \theta (I_{N-1} \otimes \hat{A} + L_{22} \otimes \hat{B})\bar{z}(t) - \theta (L_{22} \otimes \hat{B}) \int_{t-\tau}^t \dot{\bar{z}}(s) ds \quad (25)$$

위 식에서 다음처럼 정의한다.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & -\alpha B B^T P_c \\ 0 & A - H C \end{pmatrix}, \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H C & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

보조정리 3에 의하여 $U^{-1}L_{22}U = \Delta$ 를 만족시키는 비특이 행렬 U 가 존재한다. 이를 이용하여 다음과 같은 좌표변환을 고려해보자.

$$\delta(t) = (U^{-1} \otimes I_{2n}) \bar{z}(t) \quad (27)$$

식 (27)을 이용하면 식 (25)는 다음처럼 변환된다.

$$\dot{\delta}(t) = \theta(I_{N-1} \otimes \hat{A} + \Delta \otimes \hat{B})\delta(t) - \theta(\Delta \otimes \hat{B}) \int_{t-\tau}^t \dot{\delta}(s) ds \quad (28)$$

보조정리 5를 이용하여 $\epsilon \in (0, \epsilon^*], \alpha \in (0, \alpha^*]$ 을 만족하도록 설계하면 $\hat{A} + \lambda_i \hat{B}$ 는 Hurwitz하다. 이 사실과 보조정리 4를 이용하면 $I_{N-1} \otimes \hat{A} + \Delta \otimes \hat{B}$ 도 또한 Hurwitz함을 쉽게 알 수 있다. 따라서, 선형이론으로부터 어떠한 상수 $a > 0$ 에 대하여 다음 식을 만족시키는 양한정 대칭행렬 Φ 가 항상 존재한다.

$$(I_{N-1} \otimes \hat{A} + \Delta \otimes \hat{B})^T \Phi + \Phi (I_{N-1} \otimes \hat{A} + \Delta \otimes \hat{B}) = -a I_{2n(N-1)} \quad (29)$$

이제 식 (28)의 안정도 해석을 위하여 다음과 같은 Lyapunov-Krasovskii 함수를 고려해보자.

$$V(t) = \delta^T(t) \Phi \delta(t) + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\beta}^t \|\dot{\delta}(\alpha)\|^2 d\alpha d\beta \quad (30)$$

식 (30)의 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \theta \delta^T(t) [(I_{N-1} \otimes \hat{A} + \Delta \otimes \hat{B})^T \Phi + \Phi (I_{N-1} \otimes \hat{A} + \Delta \otimes \hat{B})] \delta(t) \\ &\quad - 2\theta \delta^T(t) \Phi (\Delta \otimes \hat{B}) \int_{t-\tau}^t \dot{\delta}(s) ds \\ &\quad + \dot{\delta}^T(t) \delta(t) - \int_{t-\tau}^t \|\dot{\delta}(\alpha)\|^2 d\alpha \end{aligned} \quad (31)$$

Young과 Jensen의 부등식을 이용하면 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} &-2\theta \delta^T(t) \Phi (\Delta \otimes \hat{B}) \int_{t-\tau}^t \dot{\delta}(s) ds \\ &\leq \frac{\theta a}{2} \|\delta(t)\|^2 + \frac{2\theta}{a} \|\Phi (\Delta \otimes \hat{B})\|^2 \left\| \int_{t-\tau}^t \dot{\delta}(s) ds \right\|^2 \\ &\leq \frac{\theta a}{2} \|\delta(t)\|^2 + \frac{2\theta \tau}{a} \|\Phi (\Delta \otimes \hat{B})\|^2 \int_{t-\tau}^t \|\dot{\delta}(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (32)$$

식 (28)의 양변에 놈(norm)을 취하고 제곱한 후 삼각부등식과 Jensen의 부등식을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\dot{\delta}^T(t) \delta(t) \\ &\leq 2\tau \theta^2 \|I_{N-1} \otimes \hat{A} - \Delta \otimes \hat{B}\|^2 \|\delta(t)\|^2 \\ &\quad + 2\tau \theta^2 \|\Delta \otimes \hat{B}\|^2 \left\| \int_{t-\tau}^t \dot{\delta}(s) ds \right\|^2 \\ &\leq 2\tau \theta^2 \|I_{N-1} \otimes \hat{A} - \Delta \otimes \hat{B}\|^2 \|\delta(t)\|^2 \\ &\quad + 2\tau^2 \theta^2 \|\Delta \otimes \hat{B}\|^2 \int_{t-\tau}^t \|\dot{\delta}(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (33)$$

식 (29),(32),(33)을 이용하면 식 (31)은 다음처럼 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \left(-\frac{a\theta}{2} + 2\tau \theta^2 \|I_{N-1} \otimes \hat{A} - \Delta \otimes \hat{B}\|^2 \right) \|\delta(t)\|^2 \\ &\quad + \left(\frac{2\tau \theta}{a} \|\Phi (\Delta \otimes \hat{B})\|^2 + 2\tau^2 \theta^2 \|\Delta \otimes \hat{B}\|^2 - 1 \right) \\ &\quad \cdot \int_{t-\tau}^t \|\dot{\delta}(s)\|^2 ds \end{aligned} \quad (34)$$

여기서, $\dot{V}(t) < 0$ 를 만들기 위하여 다음식이 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} &-\theta \left(\frac{a}{2} - 2\tau \theta \|I_{N-1} \otimes \hat{A} - \Delta \otimes \hat{B}\|^2 \right) < 0 \\ &\frac{2\tau \theta}{a} \|\Phi (\Delta \otimes \hat{B})\|^2 + 2\tau^2 \theta^2 \|\Delta \otimes \hat{B}\|^2 - 1 < 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$\hat{A}, \hat{B}, P, \Delta$ 는 주어진 상수행렬이고 통신지연 $\tau > 0$ 는 유한한 크기를 가지므로 설계변수 $\theta \in (0, 1]$ 를 충분히 작게 감소시킨다면 식 (35)를 항상 만족시킬 수 있다. 따라서, 식 (28)은 점근적으로 안정하고 이것은 식 (1)의 출력피드백 일치문제가 해결되었음을 의미한다.

IV. 모의 실험

본 논문에서 제안한 설계 방법의 유효성을 증명하기 위하여 다음과 같은 다개체 시스템을 고려해보자

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + Bu_i(t), i = 1, \dots, 4 \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [10 \ 0] \\ x_i(t) &= (x_{i1}(t) \ x_{i2}(t) \ x_{i3}(t))^T \in R^3 \end{aligned} \quad (36)$$

다개체 시스템의 통신 네트워크는 그림1처럼 [2]에서 사용한 것과 같다. 그림 1의 라플라시안 행렬은 다음과 같다.

$$L = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad (37)$$

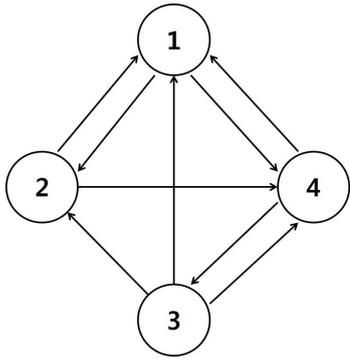


Fig. 1. Network topology
그림 1. 네트워크 토폴로지

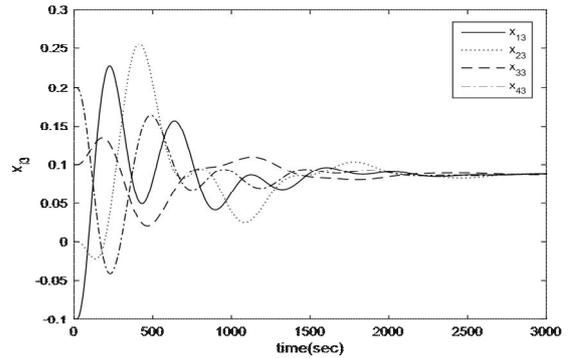


Fig. 4. The trajectories of $x_{i3}(t), i=1, \dots, 4$
그림 4. $x_{i3}(t), i=1, \dots, 4$ 의 그래프

그림 1의 그래프는 가정1을 만족시킨다. 따라서, 보조정리 5에 따라 $\alpha=0.15, \epsilon=0.01$ 으로 설정하고 Matlab을 이용하여 식 (4)를 풀면 다음을 얻는다.

$$P_\epsilon = \begin{pmatrix} 0.045 & 0.095 & 0.100 \\ 0.095 & 0.326 & 0.448 \\ 0.100 & 0.448 & 0.951 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

식 (35)를 이용하여 $\theta=0.01$ 으로 설정한다. 또한, 통신지연은 $\tau=10$ 으로 가정한다. 모의실험에 사용된 각 개체의 초기값은 $-\tau \leq t \leq 0$ 에서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (0 \ -3 \ -0.1)^T, x_2(t) = (1 \ -2 \ 0)^T \\ x_3(t) &= (2 \ -1 \ 0.1)^T, x_4(t) = (3 \ 0 \ 0.2)^T \\ \zeta_i(t) &= (0 \ 0 \ 0)^T, i=1,2,3,4 \end{aligned} \quad (39)$$

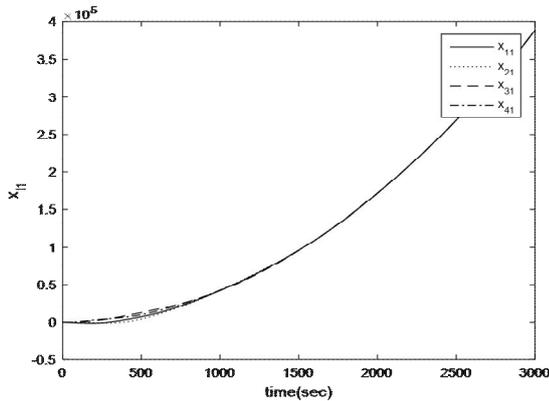


Fig. 2. The trajectories of $x_{i1}(t), i=1, \dots, 4$
그림 2. $x_{i1}(t), i=1, \dots, 4$ 의 그래프

그림 2,3,4은 각 개체의 상태변수의 그래프를 나타낸다. 그림에서 보듯이 매우 큰 네트워크 지연이 존재함에도 불구하고 모두 점근적으로 일치상태에 도달함을 볼 수 있다. 제어기의 상태변수 $\zeta_i(t), i=1,2,3,4$ 도 또한 일치상태에 도달하고 지면 관계상 결과는 생략하였다. 본 논문의 결과는 $\tau > 10$ 인 경우에도 정리 1에 따라 적용가능하다.

V. 결론

본 논문에서는 통신지연을 갖는 방향 네트워크로 연결된 고차 적분기 시스템의 출력피드백 일치문제를 해결하는 제어기를 제안하고 안정도를 증명하였다. 마지막으로 모의실험을 통하여 제안한 방법의 타당성을 입증하였다.

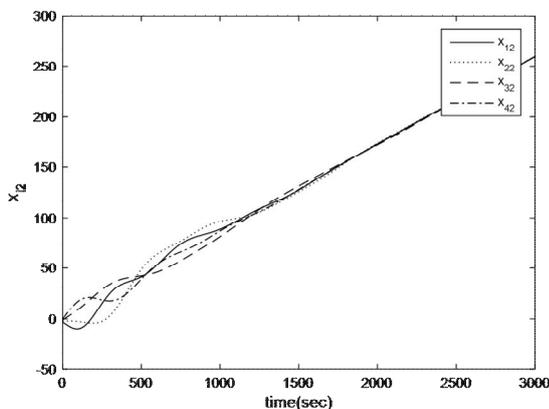


Fig. 3. The trajectories of $x_{i2}(t), i=1, \dots, 4$
그림 3. $x_{i2}(t), i=1, \dots, 4$ 의 그래프

References

- [1] R. Olfati-Saber, and R. Murray, "Consensus Problems in Networks of Agents With Switching Topology and Time-Delays," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533, 2004.
- [2] J. Seo, H. Shim, and J. Back, "Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: Low gain approach," *Automatica*, vol. 45, pp. 2659-2664, 2009.
- [3] P. Wieland, R. Sepulchre, and F. Allgöwer, "An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization," *Automatica*, vol. 47, pp. 1068-1074, 2011.
- [4] Z. Li, Z. Duan, G. Chen, and L. Huang, "Consensus of Multiagent Systems and Synchronization of Complex Networks: A Unified Viewpoint," *IEEE Trans. Circuits & Systems-I: Regular Papers*, vol. 57, no. 1, pp. 213-224, 2010.
- [5] H. L. Trentelman, K. Takaba, and N. Monshizadeh, "Robust Synchronization of Uncertain Linear Multi-Agent Systems," *IEEE Trans. On Automat. Contr.*, vol. 58, no. 6, June 2013, pp.1511-1523.
- [6] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and M. Fu, "Consensus of Multi-Agent Systems With General Linear and Lipschitz Nonlinear Dynamics Using Distributed Adaptive Protocols," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 58, no. 7, pp.1786-1791, 2013.
- [7] P. Lin, Y. Jia, and L. Li, "Distributed robust H infinite consensus control in directed networks of agents with time-delay," *Systems & Control Letters*, vol. 57, pp. 643 - 653, 2008.
- [8] Y.G. Sun and L. Wang, "Consensus of Multi-Agent Systems in Directed Networks With Nonuniform Time-Varying Delays," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1607-1613, 2009.
- [9] Y.G. Sun, L. Wang, and G. Xie, "Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays," *Systems & Control Letters*, vol. 57, pp. 175-183, 2008.
- [10] Y. Cui, and Y. Jia, " L_2 - L_∞ consensus control for high-order multi-agent systems with switching topologies and time-varying delays," *IET Control Theory & Applications*, vol.6, iss.12, pp.1933-1940, 2012
- [11] Sungryul Lee, "Consensus of High-Order Integrators With a Communication Delay," *j.inst.Korean.electr.electron.eng*, vol.19, no.4, pp. 520-525, 2015.
- [12] A. Isidori, L. Marconi, and G. Casadei, "Robust output synchronization of a network of heterogeneous nonlinear agents via nonlinear regulation theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.59, no.10, pp.2680-2691, 2014
- [13] B. Zhou and Z. Lin, "Consensus of high-order multi-agent systems with large input and communication delays," *Automatica*, vol. 50, no.2, pp. 452-464, 2014

BIOGRAPHY

Sungryul Lee (Member)



1996 : B.S. degree in Electronic Engineering, Yonsei University.

1998 : M.S. degree in Electrical & Electronic Engineering, Yonsei University.

2003 : Ph.D. degree in Electrical & Electronic Engineering, Yonsei University.

2003~2006 : Research Engineer, Samsung Electronics.

2007~ : Professor, Kunsan National University