韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2016.55.1.73
2016. 2. 제 55권, 제 1호, 73–89.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2016, Vol. 55, No. 1, 73–89.

중학생들의 수학적 문제제기 유형과 전략 분석

주홍연(단국대학교 대학원)
한혜숙(단국대학교)†

Ⅰ. 서론

“새로운 발상과 도전으로 창의성을 발휘하는 인재” (교육과학기술부, 2011, p. 1)를 육성하는 것은 21세기 국내 수학 교육 현장에서 중요한 교육목표가 되었다. 역사적으로 수학의 진보는 창조적인 상상력에서 시작되었으며, 이런 창의성은 새로운 문제(질문) 또는 가능성을 제기해 보거나 예전의 문제를 다른 시각에서 바라보면서 길러질 수 있다(Ellerton & Clarkson, 1996). 그러나 전통적인 수학 교수-학습에서는 대부분의 학생들에게 교사 또는 교과서에서 제시된 문제만을 해결하도록 요구해 왔으며, 특히 이런 학생들은 다양한 방법으로 문제를 스스로 제기해보는 기회를 거의 갖지 못하고 있다(Silver, 1994). 새로운 문제를 제기하는 것은 문제해결만큼이나 수학적 사고에 있어서 본질적인 요소이며, 수학 교수-학습의 핵심적인 규준으로 강조되어야 한다(Freudenthal, 1973; Polya, 1954). 이에 여러 수학교육학자들은 수학적 문제해결 능력과 더불어 수학적 문제제기 능력의 발달을 중요 이슈로 다루며 교육적으로 중요시 하고 있다 (Bonotto, 2013).

수학적 문제제기 활동에 의한 다양한 교육적 효과는 여러 연구자들에 의해 보고되어졌다. 특히, 수학적 문제제기는 학생들의 문제해결력 향상과 밀접한 관련성을 가지고 있으며(Brown & wlater, 1990; Cai & Hwang, 2002; Ellerton, 1986; English, 1997; Kilpatrick, 1987; Leung, 1996, 1997; Rosenshine, Meister, & Chapman, 1996; Silver, 1994, 1997), 수학 학습에 대한 자신감 제고와 수학적 개념 이해 및 수학적 사고 발달(확장)에 큰 효과가 있는 것으로 나타났다(Cai & Cifarelli 2005; English 1997, 1998). 또한 Silver, Kilpatrick, & Schlesinger(1990)는 문제제기가 창의성 향상의 효과적인 수단이 될 수 있으며, 특히 Torrance(1974)의 연구가 기반이 된 수학적 창의성 요소(유창성, 융통성, 독창성)와 관련된 연구에서 다양하게 활용되고 있다고 언급하였다 (Yuan & Sriraman, 2010).

이렇듯 문제제기의 중요성과 교육적 효과를 고려해볼 때, 국내・외 교육과정에서 수학적 문제제기의 중요한 역할을 강조하고 권고하는 것은 자연스러운 일이다. 예를 들어, NCTM(2000)은 수학의 내・외적인 다양한 상황 속에서 흥미로운 문제를 만들어 볼 것을 학생들에게 권고하고 있고, 수학적 추측(가정)을 만들어 탐구・조사해보고 문제 제기를 통해 기존의 문제를 확장하거나 일반화시키는 방법을 학습시켜야한다고 강조하고 있다. 또한, 우리나라의 2009 개정 수학과 교육과정에서도 수학적 문제해결력 신장을 위해 문제제기 활동을 교수-학습에서 강조해야 한다고 제시하였다. 그러나 수학 교육-학습과정에서 문제제기는 문제해결을 위한 수단으로 간주되면서 그 자체로서의 중요성이 다소 소홀히 여겨지는 경향이 있다(한혜숙, 주홍연, 2014). 따라서 수학적 문제제기를 교수-학습의 수단이면서 동시에 목표로 간주하고, 대다수의 학생들이 스스로 문제를 만들고 탐구할 수 있는 기회를 모든 영역에서 강조하는 것이 필요할 것이다(Kilpatrick, 1987).

학교 수학에서 수학적 문제해결에 관한 연구는 오랜 역사를 가지고 꾸준히 진행되어 왔으나, 이와는 상대적으로 수학적 문제제기는 새로운 연구 분야로서 더 심도있고 다양하고 연구가 시도될 필요가 있다(Cai & Hwang, 2002; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994). 특히 Kilpatrick(1987)은 문제제기에 관한 연구자들의 높은 관

* 접수일(2015년 7월 20일), 수정일(1차: 2015년 9월 2일, 2차: 2015년 11월 6일), 게재확정일(2016년 2월 19일)
* ZDM분류: C73
* MSC2000분류: 97D40
* 주제어: 수학적 문제제기, 문제제기 전략, 문제제기 유형
† 교신저자

심에도 불구하고 교육과정 및 교수-학습의 방법적인 면에서 문제제기를 포괄적으로 심도 있게 설명하지 못하고 있고, 수학적 문제제기에 관한 체계적인 연구가 부족하다고 지적하였다. 따라서 수학적 문제제기가 학교 현장에서 보다 적극적으로 적용되기 위해서는 문제제기 활동이 적용된 구체적인 교수-학습 모델을 개발하거나 문제제기를 적용한 수업 적용 사례를 제공하는 것이 중요하다. 그러나 문제제기 수업과 관련된 선행연구들을 보면, 주로 'What-If-Not' 전략에서 제안하는 5가지 단계를 적용한 수업을 실시하고, 비교집단과 실험집단 간 학업성취도 또는 창의성의 변화(효과)를 관찰한 연구가 대부분이다(이상원, 2005; 전미라, 허혜자, 1998; 한옥동, 박혜숙, 1997). 이상원(2005)의 연구에서는 'What-If-Not' 전략 이외에도 결과 변경에 의한 문제제기 방법, 임의 문제제기 방법 등을 수업에 적용하고 있으나, 수업 자료에 제시된 문제제기 전략을 학생들이 단순히 연습할 수 있도록 구성되어 있어 학생들 스스로 다양한 전략을 활용하여 문제제기를 하는데 제한적일 수 있다. 또한 도종훈(2007)과 박미미, 이동환, 이경화, 고은성(2012)도 문제제기와 관련된 연구를 수행하였으나 그 연구에서는 문제제기 수업을 연구의 초점으로 두고 있는 것이 아니라 학생들의 수학적 개념 이해 또는 탐구 과정을 심도 있게 분석하기 위한 방법으로써 문제제기를 활용하고 있다. 따라서 문제제기를 교육 목표로 삼아 문제제기를 어떻게 수업에 적용할 것이며, 이런 문제제기 수업을 현장에 적용했을 때 학생들의 반응이 어떻게 되는가를 살펴보는 연구는 다소 부족하다.

이에 본 연구에서는 한혜숙, 주홍연(2014)이 중학교 1학년 통계 단원의 수업을 위해 개발한 문제제기 전략을 적용한 수업 지도안을 활용하여 실제 수업을 실시한 후, 중학생들의 문제제기 유형과 문제제기 전략을 파악하고자 한다. 본고에 제시된 연구 결과들은 학교 수업에서 수학적 문제제기 활동을 적용한 교수-학습 내용을 설계하는데 하나의 사례가 될 것이며, 학생들의 반응에 대한 교사들의 지도 방법을 안내하고, 더 나아가서는 문제제기 활동에 대한 평가의 방향성을 결정하는데에도 도움을 줄 것이라 기대한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 문제제기의 정의

문제제기(problem posing)는 문제 형식화하기(problem formulation), 문제 생성하기(problem generation), 문제 발견하기(problem finding) 등과 같이 다양한 용어로 명명되고, 여러 연구자들에 의해 다양하게 정의되어져 왔다(Dillon, 1982, Duncker & Lees, 1945; Kilpatrick, 1987; Leung, 1993, Silver & Cai, 1996). 그러나 일반적으로 문제제기는 ①주어진 상황(또는 경험, 주어진 문제)에서 새로운 문제를 만들어내는 것과 ②완전히 새로운 상황에서 문제를 만들어내는 것이라는 두 가지 의미를 포함하고 있다(Silver & Cai, 1996). 이것은 Silver(1994)가 문제제기를 ①기존 문제의 재구성(재형식화)(reformulation)과 ②새로운 문제의 생성(generation)이라는 두 가지 측면에서 언급했던 것과 유사한 맥락이다. 기존 문제를 형식화하거나 재구성하는 측면에서의 문제제기는 복잡한 문제를 해결하는 과정에 발생될 수 있는 것으로 주어진 문제를 더 잘 해결하려는 목적이 전제가 된다(Silver, 1994). Duncker(1945)는 주어진 문제(초기 문제)로부터 문제를 계속적으로 재구성하여 문제해결에 이르는 것으로 문제제기를 설명하기도 하였다. 문제제기 자체를 초점으로 두고 그 의미를 바라본다면, 주어진 문제의 해결을 목적으로 두기 보다는 어떤 상황(또는 경험)으로부터 새로운 문제를 만들어내는 것을 목적으로 볼 수 있다. 이런 문제제기는 특정 문제의 해결과는 상관없이 자연스러운 상황에서 문제를 제기하는 것을 의미한다(Silver, 1994).

이런 두 가지 관점을 모두 고려해볼 때, Stoyanova와 Ellerton(1996)은 수학적 문제제기를 "수학적 경험에 기초하여 학생들이 구체적인 상황에 대한 개인적인 해석을 구성하고 이런 상황으로부터 의미 있는(즉 자명하지 않는) 수학적인 문제를 형식화하는 과정(절차)이다."(p. 518)라고 포괄적으로 정의하고 있다.

2. 수학적 문제제기 활동의 분류

Silver(1994)는 문제제기가 문제해결과정과 밀접한 관련이 있다고 주장하면서 문제해결의 시점에 따라 문제제기를 3단계로 분류하며, 각 단계의 특징에 대해서 다음과 같이 기술하였다.

1단계: 문제해결 전(Prior-problem solving) 문제제기

이 단계에서의 문제제기 활동은 문제해결에 목적을

두지 않고 특정 소재나 상황(스토리, 그림, 표, 다이어그램 등)으로부터 자유롭게 문제를 제기하는데 목적이 있다.

2단계: 문제해결 중(Within-problem solving) 문제제기

이 단계에서의 문제제기 활동에서는 주어진 문제를 해결하고자 하는 목적이 더욱 뚜렷해지는데 주어진 문제의 해결을 위하여 기존의 문제를 자신에게 익숙한 문제로 재구성하거나, 문제를 쉽게 해결하기 위해 의도적으로 문제의 목표와 조건을 변화시켜 문제제기를 하는 경우가 해당된다.

3단계: 문제해결 후(After-problem solving) 문제제기

이 단계에서의 문제제기 활동은 문제해결의 경험을 새로운 문제 상황에 적용해 보거나 조건을 바꾸어 문제를 제기하는 활동이다. 이 단계는 Polya(1957)의 문제해결의 마지막 단계인 '반성하기(looking back)' 단계에서의 문제제기나 Brown과 Walter(1990)가 강조하였던 'What-if', 'What-if-not' 전략을 활용한 문제제기가 포함된다.

Stoyanova와 Ellerton(1996)은 문제제기 활동을 문제제기의 상황에 따라 자유로운 상황(Free situation)에서의 문제제기, 반구조화된 상황(Semi-structured situation)에서의 문제제기, 구조화된 상황(Structured situation)에서의 문제제기로 구분하였다. 먼저, 자유로운 상황(Free situation)에서의 문제제기 활동은 학생들이 제약 없이 자유롭게 문제제기를 하는 활동을 의미한다고 하였고, 반구조화된 상황(Semi-structured situation)에서의 문제제기는 학생들에게 열린 상황을 제공하고 그 상황에 대한 구조(structure)를 탐색하게 한 후, 이전 수학적 경험으로부터 형성된 지식, 능력, 개념, 관계성 등을 활용하여 문제제기를 하도록 하는 활동을 의미하며, 구조화된 상황(Structured situation)에서의 문제제기는 (주어진) 특정 문제에 기반을 둔 문제제기 활동으로 이미 해결했던 문제를 재구성하거나 주어진 문제에 대한 질문이나 조건을 바꾸어 문제제기를 하는 활동을 의미한다고 하였다.

이처럼 문제제기 활동을 분류하는 것은 문제제기 활동에 대한 다양한 이해를 가능케 하며, 문제제기 활동에 대한 교수-학습의 설계 및 평가와 관련하여 이론적 근거로써 충분히 활용될 수 있다.

3. 학생들의 수학적 문제제기 유형의 분류

Leung(2013)은 학생들이 제기한 문제를 (1)문제가 아닌 것, (2)수학 문제가 아닌 것, (3)풀이 불가능한 것, (4)문제의 조건이 불충분한 것, (5)문제로서 충분한 것과 같이 5가지 범주로 분류할 수 있음을 제안하였다. [표 1]은 Leung(2013)이 제안한 5가지 문제제기 유형에 대한 특징을 나타낸다.

[표 1] Leung(2013)의 문제제기 유형의 특징
[Table 1] Descriptions of problem posing types by Leung(2013)

문제제기 유형	특징
(1) 문제가 아닌 경우	단순한 설명 또는 문장에 지나지 않으며 문제로 볼 수 없음
(2) 수학 문제가 아닌 경우	문제는 맞지만 수학 문제가 아님
(3) 풀이가 불가능한 경우	문제에 제시된 조건(정보)을 활용해서는 문제 풀이가 불가능함
(4) 문제의 조건이 불충분한 경우	조건(정보)이 추가된다면 문제가 충분히 해결될 수 있음
(5) 문제로서 충분한 경우	문제로서 충분한 조건을 가지고 있으며 문제 풀이가 가능함

4. 수학적 문제제기 전략

Silver, Mamona-Downs, Leung, & Kenney(1996)는 교사들을 대상으로 그들이 활용하는 문제제기 전략과 제기된 문제 사이의 관계성을 알아보는 연구를 실시하였다. 그들은 문제제기 전략을 목표(문제에서 구하고자 하는 것) 조작하기(Goal manipulation)와 조건(문제에서 주어진 것) 조작하기(Constraint manipulation)로 구분하고 있다. 목표 조작하기 전략은 문제에서 주어진 조건이나 가정은 변형시키지 않고, 문제의 목표(또는 구하고자 하는 것)만을 변형시키는 것으로 이는 Brown과 Walter(1990)의 수용하기(Accept the given) 전략에 해당한다고 하였고, 조건 조작하기 전략은 주어진 문제의 조건 또는 가정을 체계적으로 조작하여 새로운 문제를 만드는 것으로 Brown과 Walter(1990)의 도전하기(Challenging the given) 전략에 해당한다고 하였다(Silver et al., 1996).

또한 그들은 각 개인의 문제제기 과정에서 나타나는 근원적인 인지적 과정을 파악하기 위하여 각 개인이 제

기한 여러 문제들 사이에서 관계성을 파악하기도 하였는데, 제기한 문제들 사이의 관계성을 ‘연쇄’, ‘체계적인 변화’, ‘대칭성’, ‘What-if-not’의 4가지 유형으로 구분하였다. 그들이 제안한 4가지 유형의 관계성에 대해서 보다 구체적으로 살펴보면, 첫째, ‘연쇄’는 문제에 제시된 한 가지 조건과 관련하여 연쇄적으로 문제를 만드는 것으로 일반화를 이끌어내는 관계의 구조이거나 또는 먼저 제기된 문제가 후속 문제를 해결하기 위해 뒷받침되는 관계 구조를 포함하는 경우이다. 둘째, ‘체계적인 변화’는 한 쌍의 문제가 있을 때, 그 문제들 사이에 변하는 조건과 변하지 않는 조건이 구조적으로 존재하는 경우이다. 특히, ‘체계적인 변화’가 ‘연쇄’와 다른 것은 조건을 변화시키는 목적이 문제의 일반화 또는 문제해결을 위한 구조적 논리성을 가질 필요가 없다는 것이다. 셋째, ‘대칭’ 유형은 문제에서 구하고자 하는 것과 주어진 것을 대칭적으로 서로 맞바꾸어 새로운 문제를 만드는 경우이다. 넷째, ‘what-if-not’ 유형은 문제 내의 암시적이거나 또는 분명히 제시되어진 가정들을 변화시키는 것으로 “만약 ~하면 어떻게 되는가?”의 형태로 제약된 조건들을 자유롭게 변화시켜가면서 다양한 문제를 제기하는 경우이다.

[표 2]는 Silver 외(1996)의 연구에서 사용된 문항의 일부와 관계성 유형의 예시이다.

[표 2] Silver 외(1996)에서 사용된 BBM 문항 및 문제제기의 관계성 유형의 예

[Table 2] The billiard ball mathematics(BBM) task and examples of clusters of related problems(Silver et. al., 1996).

사용된 문항		사각형의 당구대에는 각 모서리마다 A, B, C, D 4개의 포켓이 있다. 처음 A포켓에서 45° 각도로 출발한 당구공이 벽에 부딪힐 때마다 45°로 튕겨져 나갈 때, 최종적으로 4개의 포켓 중 하나에서 멈춘다.
예시	연쇄	2×4 당구대에서는 당구공이 어느 포켓에서 멈출까? 3×6 당구대에서는 당구공이 어느 포켓에서 멈출까? 4×8 당구대에서는 당구공이 어느 포켓에서 멈출까? 세로가 가로의 2배가 될 때 당구공은 어느 포켓에서 멈출까?
	체계적 변화	당구대의 크기와 마지막으로 당구공이 멈추는 포켓은 어떤 관계가 있는가? 당구대의 크기와 당구공이 벽에 부딪히는 횟수는 어떤 관계가 있는가?
	대칭	당구공이 벽에 부딪히는 횟수와 마지막으로 멈추는 포켓이 문제에 주어졌을 때, 당구대의 크기는? 당구대의 크기가 주어졌을 때, 당구공이 벽에 부딪힌 횟수와 마지막으로 멈추는 포켓의 위치는?
	What-if-not	만약 당구공이 45° 각도가 아닌 다른 각도로 튕겨나간다면? 만약 당구공이 A포켓이 아닌 다른 포켓에서 출발하였다면?

이처럼 문제제기를 하는 인지적 과정에서의 특정 방법(목표 조작하기-Brown & Walter(1990)의 수용하기, 조건 조작하기-Brown & Walter(1990)의 도전하기)과 제기된 문제들 사이의 관계성(연쇄, 체계적 변화, 대칭성, What-in-not)들은 문제를 제기하는 전략이라고도 할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 Brown과 Walter(1990)의 문제제기 전략과 Silver 외(1996)가 제안한 문제 사이의 관계성을 참고하여 [표 3]과 같이 문제제기 전략에 관한 분석틀을 구성하였다.

[표 3] 문제제기 전략에 관한 분석틀

[Table 3] Analysis frameworks for problem posing strategies

Brown & Walter(1990)의 문제제기 전략		본 연구의 문제제기 전략 분석틀			Silver 외(1996)의 제기된 문제 사이의 관계성
수용하기		목표 수정	연쇄	단계형	연쇄
				일반화	
도전하기	조건 수정	조건 수정	대칭		대칭
			체계적인 변화		체계적인 변화
	가정 수정	가정 수정	What-if-not		What-if-not

본 연구의 문제제기 전략 분석틀은 기본적으로 ‘목표 수정’, ‘조건 수정’, ‘가정 수정’의 3가지 요소로 구성하였으며, 제기된 문제들 사이의 관계성을 파악하기 위해서는 ‘연쇄’(단계형, 일반화), ‘대칭’, ‘체계적 변화’, ‘What-if-not’으로 구분하여 분석을 실시하였다. 특히 ‘목표 수정’, ‘조건 수정’, ‘가정 수정’의 문제제기 전략 요소들은 문제제기의 관계성 유형에 따라 활용 여부가 달라질 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 참여자

경기도 용인시에 소재한 C중학교 1학년 전체 7개 학급 중 무작위로 추출된 4개 학급(A학급 28명, B학급 30명, C학급 31명, D학급 31명)에 속한 총 120명의 학생이 본 연구에 참여하였다. 현장 적용 과정은 수학교사로 5년 이상의 근무 경력을 가진 본 연구의 연구진 중 한 명이 직접 수행하였다. 통계 단원을 평가 내용으로 포함했던 C중학교 1학년 학생들의 1차 지필평가(중간고사)의 전체 평균 점수는 60.7점이었고, 연구에 참여한 4개 학급의 지필평가 평균은 각각 A학급 62.1점, B학급 56.3점, C학급 61.9점, D학급 62.4점으로 나타났다. 일원분산분석(ANOVA) 결과에 의하면 A, B, C, D 네 학급의 지필평가 점수 간에는 통계적으로 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다(F=.325, p=.807).

2. 문제제기 전략을 적용한 수업 자료

본 연구에서는 중학교 1학년 '확률과 통계' 영역의 '도수분포와 그래프' 단원(줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형을 이해하고 해석할 수 있다)의 교수-학습을 위하여 한혜숙, 주홍연(2014)이 개발한 문제제기 전략을 접목한 수업 지도안[1] 및 지도안을 토대로 학생 활동지를 구성하여 수업 자료로 활용하였다. 학생 활동지는 [부록]에 첨부하였다.

한혜숙, 주홍연(2014)은 Silver(1994)가 제시했던 문제해결 시점에 따른 문제제기 활동과 Stoyanova와 Ellerton(1996)이 제안한 문제제기 상황에 따른 문제제기 활동을 접목하여 수업 지도안을 개발하였다. 그들이 개발한 지도안은 크게 도입, 전개, 정리의 3단계로 구성되었고, 각 단계의 핵심적인 교수-학습 활동에 대해서 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

먼저, 도입 단계에서 '학습 목표'는 '실생활 소재를 활용한 문제제기 활동을 통하여 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형, 도수분포표에서의 평균, 상대도수 등의 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.' 로 설정하였다. 이 수업은 통계 수업의 마무리 단계로서 통계 단원에서 배웠던 학습 내용을 실생활에 적용하는데 그 목적을 두고 있다.

[그림 1] 교수-학습 지도안에서 제시된 실생활 소재(한혜숙, 주홍연, 2014. p. 59)

[Fig. 1] Real-life artifacts involved in the lesson plan(Han & Joo, 2014, p. 59)

'실생활 소재 제시' 단계에서는 [그림 1]과 같이 우리 주변에서 흔히 볼 수 있는 자료(예를 들어, 피자집 메뉴, 마트 할인 쿠폰, 광고 전단지, 신문의 기상예보, 주간 TV가이드 등)를 학생들에게 제시하여 문제제기 활동을 유도하도록 구성하였다. 학생들은 실생활 자료를 탐구하면서 친구 또는 교사와 함께 자연스럽게 대화할 수 있으며, 이런 가운데 학습의 흥미를 갖고 동기 부여를 받을 뿐 아니라 자신의 경험담을 이야기하고 서로 질문하면서 문제제기 활동을 이어갈 수 있을 것으로 보여진다. 이 단계에서 교사는 실생활 자료를 통해 이루어지는 발문, 대답, 논의가 반드시 수학적인 내용이 아니더라도 이를 인정해주고, 학생들이 문제 상황에 몰입하여 자기문제화가 이루어지도록 유도할 것을 학습자료 및 유의점 항목에서 강조하고 있다.

전개 단계는 [그림 2], [그림 3]과 같이 '문제해결 전 문제제기 활동', '문제해결 중 문제제기 활동', '문제해결 후 문제제기 활동'의 3단계로 구성되었다.

1) 수업 지도안의 전체적인 내용은 한국수학교육학회에서 발행하는 2014년도 연보(수학학습 지도 원리와 적용)의 제3장(문제제기와 수학수업, pp. 68~71)에 제시되어 있다.

[그림 2] 수업의 전개 단계에서 문제제기 활동
[Fig. 2] problem posing activities in development stage

<table>
<tr><th rowspan="2">지도 단계</th><th rowspan="2">학습흐름 및 관련이론</th><th colspan="2">교수·학습활동</th><th rowspan="2">학습자료 및 유의점</th></tr>
<tr><th>교사</th><th>학생</th></tr>
<tr><td>전개</td><td>문제 해결 전 (Prior-problem solving) 문제 제기 활동</td><td>◆ 상황에 대한 자유로운 문제제기
· 문제해결 전 문제제기는 구체적 대상 또는 제시된 상황에 대해서 자유롭게 문제를 제기하는 것을 말한다. 다음과 같은 질문의 예를 통해 학생들이 질문을 만들어 보고, 이를 친구들이 대답하는 활동을 유도한다.
(예)
- 어떤 음식을 제일 좋아하니?
- 어떤 음식이 제일 잘 팔리고 어떤 음식이 제일 안 팔릴까?
- 이 음식점의 메뉴를 가지고 어떤 문제를 만들 수 있을까?</td><td>· 교사가 제시한 실생활 소재를 바탕으로 여러 가지 질문 또는 문제를 자유롭게 만들어 본다.
· 자신이 만든 문제를 친구들과 공유하고 이를 함께 풀어보면서 상황에 대해 깊이 있는 이해를 한다.</td><td>· 학생들이 만들어낸 질문 또는 문제는 문제가 아닌 것 수학 문제가 아닌 것 풀이가 불가능한 것도 있을 수 있으나 본 수업의 문제해결 전 문제제기 활동에서는 상황에 대한 이해가 가장 중요한 목적임으로 다양한 질문을 통해 의사소통이 활발하게 이루어 질 수 있도록 격려한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">전개</td><td rowspan="2">문제 해결 중 (within-problem solving) 문제 제기 활동</td><td>◆ (반구조화)구조화된 문제제기
· 아래와 같은 문제를 제시한다.
다음은 광고 전단지의 일부이다.

(1) 제시된 자료를 보고 도수분포표를 만들어라.
(2) (1)의 도수분포표를 보고, 평균을 구하여라. (단, 십의 자리에서 반올림하여 백의 자리까지 나타내라.)
· 제시된 문제를 해결하기 전에 이 문제와 유사한 문제를 해결한 경험이 있는지를 묻고 그 문제를 만들어 해결할 수 있도록 유도한다. 또는 문제해결을 위해 좀 더 학생 스스로 풀기 쉬운 문제를 만들어 보고, 이를 해결하도록 돕는다.
· 자신이 만든 문제를 다른 친구들에게 제시해 보고 이를 서로 해결해 볼 수 있도록 한다.
· 최종적으로 주어진 문제를 해결하고 그 과정을 서술하도록 유도한다.</td><td>· 제시된 문제를 확인하고 이전에 이와 유사한 문제를 해결했던 경험을 토대로 쉽고 간단한 문제를 만들어 보고, 이를 친구들과 서로 교환하여 해결해 보자.
(예)
6, 7, 7, 8, 3, 6, 7, 10, 8, 3 의 자료를 보고 도수분포표를 만들어라.
6, 7, 7, 8, 3, 6, 7, 10, 8, 3 의 평균을 구하여라.
· 문제제기 활동을 바탕으로 주어진 문제를 해결하고, 그 과정을 자세히 서술한다.</td><td rowspan="2">· 도수분포표에서의 평균을 구할 때 계산이 복잡한 경우에는 계산기의 활용을 권장한다.
· 문제해결 중 문제제기는 주어진 문제의 해결을 목적으로 하고 있다. 따라서 제시된 문제는 학생들에게 어느 정도 어려움을 느낄 수 있는 문제를 선정하는 것이 좋다. 즉 학생들의 성취도에 따라 문제의 난이도가 다른 문제를 제시하는 것이 문제해결 중 문제제기를 이끌어내는 좋은 방법이다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">(주어진 문제에 대한 풀이)
(1)<table><tr><th>가격(100원)</th><th>도수(개)</th></tr><tr><td>30^{이상} ~ 40^{미만}</td><td>3</td></tr><tr><td>40 ~ 50</td><td>0</td></tr><tr><td>50 ~ 60</td><td>0</td></tr><tr><td>60 ~ 70</td><td>5</td></tr><tr><td>70 ~ 80</td><td>3</td></tr><tr><td>80 ~ 90</td><td>2</td></tr><tr><td>90 ~ 100</td><td>1</td></tr><tr><td>합계</td><td>14</td></tr></table>(2)
$\frac{3500\times3+6500\times5+7500\times3+8500\times2+9500\times1}{14}=\frac{92000}{14}=\frac{46000}{7}$
답 : 약 6600원</td></tr>
<tr><td>전개</td><td>문제 해결 후 (after-problem solving) 문제 제기 활동</td><td>◆ '반성하기(looking back)' 단계의 문제제기
('What-if-not'전략을 활용한 문제제기)
· 제시된 실생활 소재와 위의 문제해결 과정을 바탕으로 새로운 문제를 만들 수 있도록 유도한다.
예)
-문제해결의 '반성하기' 단계의 문제제기
(1) 광고전단지를 보고 도수분포표를 만들어라.
(2) (1)의 도수분포표를 보고, 평균을 구하여라.
(3) 실제 주어진 자료의 평균과 도수분포표를 보고 구한 평균을 비교하여라.
-'What-if-not'전략을 활용한 문제제기
광고 전단지를 보고 줄기와 잎 그림을 만들어라.
광고 전단지를 보고 히스토그램을 만들어라.
광고 전단지를 보고 도수분포다각형을 만들어라.
광고 전단지를 보고 만든 도수분포표의 일부가 오염되어 보이지 않는다. 계급값이 8500원인 계급의 상대도수가 0.25일 때, 보이지 않는 부분의 도수를 각각 구하여라.</td><td>· 문제를 해결한 후, 제시된 실생활 소재와 문제해결 과정의 경험을 바탕으로 새로운 문제를 만들어 본다.
· 주어진 문제와 유사한 문제, 난이도가 높은 문제, 주어진 조건을 변경하거나 문제의 목적을 다르게 한 문제 등 다양한 문제를 만들어 보고, 이를 친구들에게 제시해 본다.
· 학생끼리 서로의 문제를 제시하고 풀어보는 활동을 통해 자신이 새로 만든 문제가 이상이 없는지 검토해본다.</td><td>· 문제해결 후 문제제기 활동은 모둠활동으로 이루어질 수 있다. 모둠별로 만든 문제를 다른 모둠이 해결하거나 새로 만든 문제의 오류를 찾아내는 토론 과정을 통해 의사소통능력을 기르고, 적절히 보상을 해주면서 학습 흥미와 자신감을 높이고, 성취의 경험을 할 수 있다.
· 학생들이 새로 만든 문제를 통해 자기평가, 동료평가, 교사평가가 이루어질 수 있다. 특히, 교사는 평가기준으로 개별(또는 모둠별)로 제기된 문제를 '문제가 아닌 것', '수학 문제가 아닌 문제', '해결이 불가능한 문제', '문제의 조건이 불충분한 문제', '문제로서 충분한 문제' 으로 나누어 평가 점수를 부여할 수 있다.</td></tr>
</table>

[그림 3] 지도안의 전개 단계(한혜숙, 주홍연, 2014, pp. 69-71)
[Fig. 3] Development stage of lesson plan(Han & Joo, 2014, pp. 69-71)

먼저, '문제해결 전 문제제기' 단계는 Polya의 문제해결과정에서 '문제 이해' 단계와 그 맥락이 유사한 활동으로 구성하였는데 학생들은 주어진 특정 문제를 해결하는 것에서 좀 더 자유롭게 문제제기를 할 수 있도록 하였다. 즉 학생들은 음식 메뉴판을 가지고 자유롭게 문제를 제기해 볼 수 있다. 이 단계에서의 문제제기 활동은 주어진 문제에 대한 해결을 주된 목적으로 두기 보다는 앞으로 해결하고자 하는 문제 및 문제 상황에 대한 이해와 더불어 문제해결에 대한 흥미, 동기 유발, 수학의 실용적 가치 인식 등에 초점을 둔 것으로 보여진다. '문제해결 중 문제제기' 단계에서는 주어진 특정 문제(광고 전단지에 제시되어 있는 정보를 활용하여 도수분포표를 만들고, 평균을 구하기)의 해결을 위해 좀 더 구체적이고 구조화된 상황 속에서 문제제기가 이루어질 수 있도록 학습 활동이 구성되어 있다. 즉, 해결해야 하는 문제의 풀이를 위해서 학생 자신에게 익숙하거나 또는 난이도가 낮은 문제로 문제를 제기할 수 있도록 제안하고 있다. 이것은 Polya의 문제해결 과정에서 구체적인 문제해결을

위한 계획, 실행 단계의 활동에 좀 더 초점을 두는 단계로 볼 수 있다. 마지막으로 '문제해결 후 문제제기' 단계는 주어진 문제해결에 대한 반성과 검토의 과정이면서 동시에 기존의 문제해결을 바탕으로 이를 수정・재구성함으로써 새로운 문제를 제기하는 활동이 포함되어 있다. 'What-if-not' 전략을 활용하여 학생들이 다양한 문제제기를 할 수 있도록 제안하고 있다. 이 단계에서 학생들은 기존 문제의 해결과정에 대한 검증 및 수행 연습을 할 수 있을 뿐 아니라, 새로운 문제 상황에 대한 탐색, 추론, 일반화의 기회를 갖게 됨으로써 사고의 확장에 도움을 받을 수 있을 것이다.

정리 단계는 실생활 소재를 활용한 다양한 문제제기 활동을 통하여 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형, 도수분포표에서의 평균, 상대도수 등을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있음을 학생들에게 인식시켜 주고, 수업에서 활용된 광고 전단지 이외에 다른 실생활 자료를 활용한 문제제기 활동을 과제로 제시해 줌으로써 학생 스스로 수학화를 경험하게 하고, 새로운 문제 상황에 도전할 수 있도록 구성되었다.

3. 수업 절차

한혜숙, 주홍연(2014)이 개발한 수업 지도안 및 학생 활동지에 대한 현장 적용은 2015년 2월 5일부터 2015년 2월 12일까지 1주간 총 3차시의 수학 수업 시간을 통하여 진행되었다. 수업의 내용은 1차시 '도수분포와 그래프 단원의 총정리', 2차시 '수학적 문제제기 활동에 대한 설명 및 실습', 3차시 '수학적 문제제기 활동 수업'으로 구성되었으며, 특히 '수학적 문제제기 활동 수업'의 경우에는 예비연구를 통해 수정・보안된 학생 활동지를 활용하여 수업을 실시하였다.

4. 자료 수집 및 분석 방법

학생들의 문제제기 유형 및 전략을 분석하기 위하여 3차시의 수업 동안 활용하였던 학생 활동지를 모두 수집하였고, 연구자가 작성한 수업 기록지 또한 분석을 위한 참고 자료로 활용하였다. 학생들의 문제제기 유형 및 전략을 분석하기 위하여 Leung(2013), Brown과 Walter(1990), Silver 외(1996)의 연구 결과를 바탕으로 개발된 [표 4]와 같은 분석틀을 활용하여 문제제기 유형 및 전략에 대한 빈도 분석을 실시하였다.

자료 분석 과정에는 C대학 수학교육과 교수 1명, 중학교 수학교사 1명, 수학교육 전공 박사과정 대학원생 1명이 참여하였다. 1차적으로는 수집된 자료의 약 20%에 대해 개별 분석을 실시한 후 문제제기 유형 및 전략에 대한 분석자간 일치도를 확인하였다. 1차 분석 결과 문제제기 유형에 관한 분석에서는 세 분석자가 모두 동일한 분석 결과를 나타냈으나, 문제제기 전략에 대한 분석에서는 분석자간 불일치가 되는 부분이 발견되어 이에 대한 논의가 이루어졌다. 분석 방법에 대한 최종 합의를 통해서 2차 개별 분석이 실시되었다. 각 문항에서 문제제기 전략에 대한 분석자간의 일치도를 알아보기 위하여 "일치도 통계[2]"(성태제, 2006, p. 205)를 구하였다. 각 문항에 대한 3명의 분석자간 일치도 통계의 평균은 [표 5]와 같이 모두 .85이상이므로 분석자간 일치도가 높다고 볼 수 있다. 그러나 분석자간 불일치가 발생된 문항에 대해서는 세 명의 분석자가 추가적인 논의를 거쳐서 최종 합의를 도출하였다.

[표 4] 문제제기 유형과 문제제기 전략에 관한 분석틀
[Table 4] Analysis framework for problem posing types and strategies

문제제기 유형[3]	문제제기 전략[4]
문제가 아닌 경우 (Not a problem : NP)	목표 수정 (Goal manipulation : GM)
수학 문제가 아닌 경우 (Non-Math : NM)	
풀이가 불가능한 경우 (Impossible : IM)	가정 수정 (Assumption manipulation : AM)
문제의 조건이 불충분한 경우 (Insufficient : IN)	조건 수정 (Condition manipulation : CM)
문제로서 충분한 경우 (Sufficient : SU)	

2) 성태제, 시기자(2006)는 일치도 통계란 "관찰자가 관찰대상의 행위나 수행결과에 점수를 부여하기 보다는 어떤 유목이나 범주로 분류할 때 관찰자 간의 분류 일치도를 추정하는 방법"(p. 205)이라고 기술하였다.

3) 문제제기 유형의 분석코드는 NP, NM, IM, IN, SU를 사용하였다.

4) 문제제기 전략의 분석코드는 GM, AM, CM을 사용하였으며, 경우에 따라 CH(연쇄), SY(대칭)를 사용하기도 하였다.

[표 5] 각 문항에 대한 분석자간 일치도 통계의 평균
[Table 5] Interrater agreement of problem posing strategies

	분석자1	분석자2
분석자2	0.94	–
분석자3	0.88	0.91

문제제기 유형에 관한 분석은 문제해결 전, 중, 후 문제제기 단계별로 각각 이루어졌으나, 문제제기 전략에 관한 분석은 문제해결 후 문제제기 단계에서만 이루어졌다. 이는 기존의 선행연구(Brown & Walter, 1990; Silver et al., 1996)가 특정 문제를 해결하도록 한 후 그와 관련된 문제제기를 요청하고, 이를 통해 제기된 문제에서 문제제기 전략을 분석하고 있어 본 연구에서도 그러한 방법을 적용하였다.

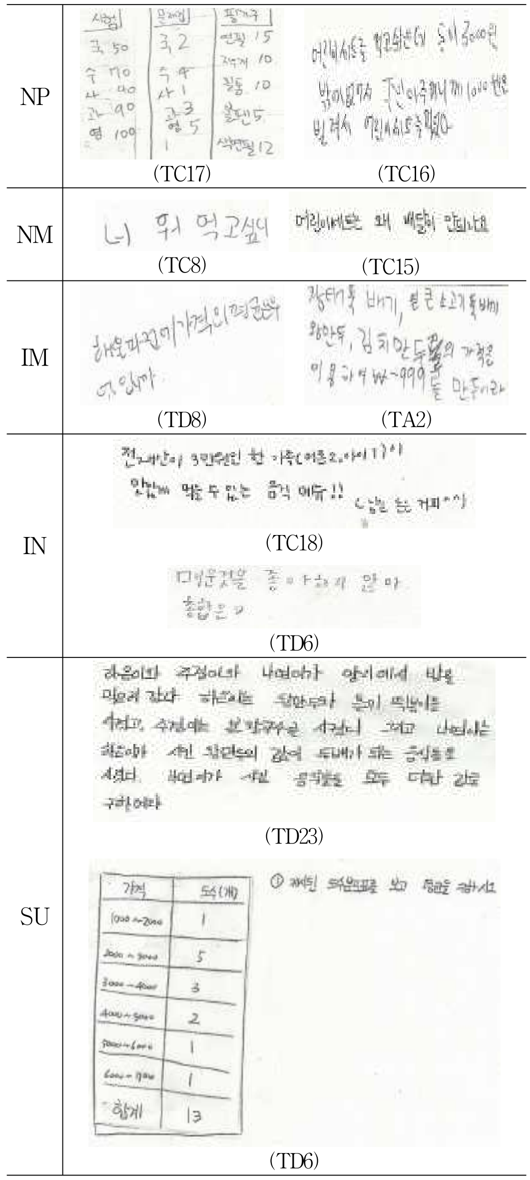
Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 학생들의 문제제기 유형 및 전략 분석

1) 문제제기 유형

본 연구에 참여한 120명의 중학교 1학년 학생들이 제기한 문제를 본 연구의 분석틀(문제가 아닌 경우:NP, 수학 문제가 아닌 경우:NM, 풀이가 불가능한 경우:IM, 문제의 조건이 불충분한 경우:IN, 문제로서 충분한 경우:SU)을 통해 분석한 결과 5가지 유형이 모두 나타났다.

[그림 4]는 학생들이 제시한 문제제기 유형의 5가지 범주에 대한 대표적인 사례들이다. 각 사례들을 구체적으로 살펴보면, 첫째, '문제가 아닌 경우'는 시험, 문제집, 필기구의 가격에 대해 자료만 단순히 제시하거나(TC17[5]) 음식점에서 어린이세트를 먹었다는 단순 설명만을 기술하는 것(TA16)과 같이 문제로 보기 어려운 경우이다. 둘째, '수학 문제가 아닌 경우'는 무엇을 묻는 문제의 문장 형식은 갖추고 있으나 무엇을 먹을지(TC8), 배달은 되는지(TC15) 등의 수학적 지식과의 관련성이 없는 경우가 이에 해당한다. 셋째, '풀이가 불가능한 경우'에는 해물파전 가격의 평균을 물어보고 있으나(TD8) 전단지에서 이 메뉴가 유일하기 때문에 평균을 구하는 것이 개념적으로 맞지 않고, 또 다른 사례(TA2)의 경우에는 양수인 음식 가격으로 '₩-999'인 음수를 만들 수 없기 때문에 이것은 풀이가 가능하지 않은 문제제기라 할 수 있



[그림 4] 문제제기 유형의 예
[Fig. 4] Examples of problem posing types

5) 연구 참여자는 분석 유형(문제제기유형(T), 문제제기전략(S)), 학급명(A, B, C, D), 번호(1, 2, 3…)의 순으로 코드화하였다(예, TC17-문제제기유형 분석, C학급, 17번 학생).

다. 넷째, '문제의 조건이 불충분한 경우'는 '맛있게 먹을 수 있는'(TC18) 또는 '매운 것'(TD6) 등의 수학적으로 분명하지 않는 조건들을 문제에 제시함으로써 좀 더 분명한 문제해결을 위해 조건을 수정 또는 추가할 필요가 있는 경우이다. 마지막 '문제로서 충분한 경우'는 위에 제시된 사례들(TB23, TB24)처럼 가정, 조건, 목표가 분명하고 문제해결이 충분히 가능한 경우에 해당된다. 문제제기 유형의 분석은 [표 6]과 같이 문제해결 전, 중, 후 단계별로 학생들이 제기한 문제를 분석의 대상으로 삼아 각 단계별 분석이 이루어졌다. '문제해결 전 문제제기' 단계에서는 전체 응답자의 2.5%(3명)만이 무응답을 주어 나머지 117명의 학생들이 제기한 125개의 문제에 대한 분석이 이루어졌다. 문제해결 단계 중 이 단계에서 '무응답'의 비율이 현저히 낮게 나타났는데, 이는 문제해결 전 문제제기 활동은 문제의 이해 뿐 아니라 문제 상황에 대한 흥미와 동기를 유발시키고 있음을 추측할 수 있다.

'문제해결 중 문제제기' 단계에서는 전체 응답자의 20%(24명)가 무응답을 주어 96명이 제기한 96개의 문제를 분석의 대상으로 삼았다. '문제해결 후 문제제기' 단계에서는 전체 응답자의 40.8%(49명)가 무응답을 주어 71명의 학생들이 제기한 81개의 문제를 분석의 대상으로 삼았다. 이 단계에서 무응답 비율이 가장 높게 나타났는데 이는 연구에 참여한 학생들이 문제를 해결하고 나서 새로운 문제를 제기해야 할 필요성을 느끼지 못하거나 새로운 문제를 제기하는데 어려움을 겪고 있음을 보여주는 결과이기도 하다. 따라서 학생들이 문제제기 후 문제제기 활동에 보다 친숙해질 수 있도록 반성 단계에서 수학적 문제제기 활동을 보다 풍부하게 제공할 필요가 있으며, 반성 단계에서의 문제제기 활동의 중요성 또한 인식할 수 있도록 안내할 필요가 있다. 또한 학생들이 수학 문제로서 충분한 문제제기를 할 수 있도록 자유로운 상황, 반구조화된 상황, 구조화된 상황에서 문제제기 활동을 자주 접할 수 있도록 다양한 문제제기 상황을 제공할 필요가 있으며, 문제제기 분석틀을 근거로 하여 학생들의 문제제기 활동 결과를 평가하고 피드백을 제공해 준다면 학생들의 수학적 문제제기 능력을 함양시키는데 도움이 될 수 있을 것이다.

[표 6] 각 단계별 문제제기 응답 빈도
[Table 6] Frequency of posed problems in each problem posing stage

	문제제기	무응답	총합
문제해결 전 문제제기	117 (97.5)	3 (2.5)	120 (100)
문제해결 중 문제제기	96 (80)	24 (20)	120 (100)
문제해결 후 문제제기	71 (59.2)	49 (40.8)	120 (100)

각 단계별 문제제기 유형의 분석 결과는 [표 7]과 같이 각 단계별로 5가지 문제제기 유형이 모두 나타났다.

각 단계별 분석 결과를 보다 구체적으로 살펴보면, '문제해결 전 문제제기' 단계에서 문제제기 유형은 '문제로서 충분한 경우'(79.2%), '수학 문제가 아닌 경우'(12.8%), '문제가 아닌 경우'(4%), '문제의 조건이 불충분한 경우' (3.2%), '풀이가 불가능한 경우'(0.8%) 순으로 나타났다. '문제로서 충분한 경우' 유형의 비율이 약 80%정도로 가장 높게 나타났으나 학생들이 제기한 대부분의 문제들은 교사가 제시한 실생활 자료(전단지)와 관련하여 음식의 가격(최대값, 최솟값), 특정 음식의 총합, 음식의 개수를 묻는 비교적 난이도가 낮은 간단한 문제들이었다. 또한 '수학 문제가 아닌 경우' 유형의 비율이 문제해결 중, 후 문제제기 활동 단계와 비교하여 상대적으로 높게 나타났는데, 이는 문제해결에 목적을 두지 않고 자유롭게 문제제기를 할 수 있는 '문제해결 전 문제제기' 활동의 특징(자유로운 상황에서의 문제제기)과 관련이 있다고 볼 수 있다.

[표 7] 단계별 문제제기 유형의 빈도
[Table 7] Frequency of problem posing types in each problem posing stage

	NP	NM	IM	IN	SU	총합[6]
문제해결 전 문제제기	5 (4.0)	16 (12.8)	1 (0.8)	4 (3.2)	99 (79.2)	125 (100)
문제해결 중 문제제기	2 (2.1)	2 (2.1)	1 (1.0)	5 (5.2)	86 (89.6)	96 (100)
문제해결 후 문제제기	4 (4.9)	5 (6.2)	2 (2.5)	5 (6.2)	65 (80.2)	81 (100)

6) 한 학생이 한 단계의 문제제기 활동에서 여러 개의(2개 이

‘문제해결 중 문제제기’ 단계에서의 문제제기 유형은 ‘문제로서 충분한 경우’(89.6%), ‘문제의 조건이 불충분한 경우’(5,2%), ‘문제가 아닌 경우’(2.1%), ‘수학 문제가 아닌 경우’(2.1%), ‘풀이가 불가능한 경우’(1.0%) 순으로 나타났다. 특히, ‘문제로서 충분한 경우’ 유형의 비율이 문제해결 전, 후 문제제기 단계와 비교하여 가장 높게 나타났는데, 이는 자유로운 또는 개방적인 상황 보다는 (반)구조화된 상황, 즉 주어진 특정 수학적 개념(도수분포표, 평균)과 관련하여 문제를 제기하도록 안내했을 때 학생들이 보다 적절하게 문제제기를 하는 것을 알 수 있다.

‘문제해결 후 문제제기’ 단계에서 문제제기 유형은 ‘문제로서 충분한 경우’(80.2%), ‘수학 문제가 아닌 경우’(6.2%), ‘문제의 조건이 불충분한 경우’(6,2%), ‘문제가 아닌 경우’(4.9%), ‘풀이가 불가능한 경우’(2.5%) 순으로 나타났다.

2) 문제제기 전략

문제제기 전략의 분석은 ‘문제해결 후 문제제기’ 단계에서 학생들이 제기한 총 81개의 문제를 대상으로 이루어졌다. 문제제기 전략의 분석은 [표 4]의 분석틀을 활용하였으나 2가지 이상의 전략을 활용한 문제들도 발견되어 [표 8]과 같이 1가지 전략, 2가지 전략, 3가지 전략으로 나누어 각각 분석하였고, 2가지 전략을 동시에 활용한 경우는 ‘목표 수정+가정 수정’, ‘가정 수정+조건 수정’, ‘목표 수정+조건 수정’의 3가지 경우로 나타났다.

전체 문제의 47%가 1가지 문제제기 전략을 활용한 문제였고, 이 중 ‘가정 수정’ 전략을 활용한 문제의 비율이 가장 높았고, 그 다음으로는 ‘조건 수정’, ‘목표 수정’ 순으로 나타났다.

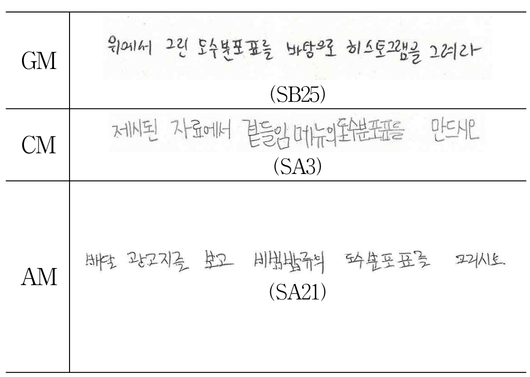
[표 8] 문제제기 전략의 빈도

[Table 8] Frequency of problem posing strategies

GM	CM	AM	GM+AM	GM+CM	AM+CM	GM+AM+CM	분석 불가7)	총합
7 (8.6)	12 (14.8)	19 (23.5)	13 (16.0)	8 (9.9)	2 (2.5)	4 (4.9)	16 (19.8)	81 (100)
38(47)			27(33.3)				16(19.8)	

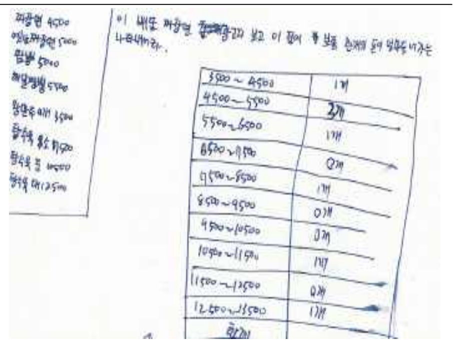
[그림 5]는 1가지 전략만을 사용하여 문제를 제기한 학생들의 대표적 사례들을 나타낸 것이다. 이 사례들을 자세히 살펴보면, 첫째, ‘목표 수정’ 전략의 경우 제시된 특정 문제와 비교해볼 때, 문제의 가정과 조건은 동일하지만 평균이 아닌 ‘히스토그램’을 그리도록 문제의 목표를 수정하여 문제를 제기한 경우이다(SB25). 둘째, ‘조건 수정’ 전략의 경우는 도수분포표를 만들어야 하는 문제의 목표는 기존 문제와 동일하지만, 조건을 ‘곁들임 메뉴’로만 제한하여 문제를 제기한 경우이다(SA3). 즉 문제의 목표는 기존 문제와는 동일하지만 문제의 조건을 수정하여 문제를 제기한 것이다. 셋째, ‘가정 수정’의 경우에는 ‘조건 수정’의 사례와 유사해보이지만, 기존 문제에 제시되어 있는 배달광고지의 일부가 아닌 ‘문제해결 전 문제제기’ 활동에서 제시된 배달광고지 중에 ‘비빔밥류’로 문제의 가정 자체를 바꾸거나(SA21), 아예 배달광고지를 학생 스스로 만들어 문제를 제기한 경우(SC3)이다. 기존 문제의 조건을 수정하는 것 이외에 제시되어 있지 않았던 조건(예를 들어, 음식의 가격)을 추가하는 경우에도 문제의 가정을 수정한 것으로 분석하였다.

전체 문제의 33.3%가 2가지 이상의 문제제기 전략을 활용한 문제들이었는데, ‘목표 수정+가정 수정’ 전략을 활용한 문제의 비율이 가장 높게 나타났고, 그 다음으로는 ‘목표 수정+조건 수정’, ‘가정 수정+조건 수정’ 순으로 나타났다. 3가지 문제제기 전략이 모두 활용된 문제는 4.9%로 그 비율이 매우 낮았다.



상) 문제제기를 한 사례들이 있어 제기된 문제의 총 수는 문제제기에 참여한 학생의 수 보다 많은 경우가 있다.

7) 이 경우는 학생들이 제기한 문제가 ‘문제가 아닌 경우’, ‘수학문제가 아닌 경우’의 문제유형이거나 기존 문제와 거의 유사한 문제일 경우에 해당된다.

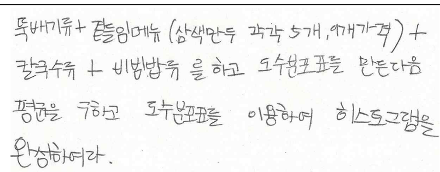
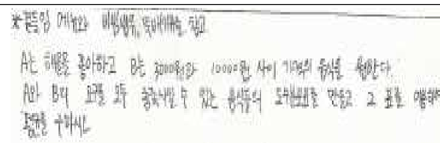
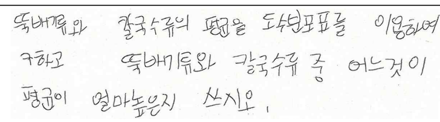
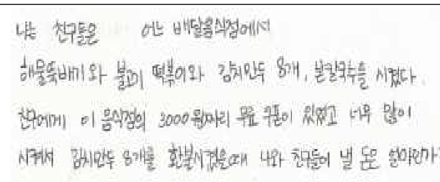


(SC3)

[그림 5] 1가지의 문제제기 전략을 활용한 예
[Fig. 5] Examples of problem posing using one strategy

[그림 6]은 2가지 이상의 문제제기 전략을 사용하여 문제를 제기한 대표적인 사례들이다. 예를 자세히 살펴보면, 첫 번째, '목표 수정+가정 수정'의 사례는(SB18) 기존 문제의 조건(뚝배기류, 곁들임 메뉴, 칼구수류)에 '비빔밥류'를 추가하여 문제의 가정을 바꾸고, 도수분포표와 평균을 구하는 것 이외에 '히스토그램'을 나타내도록 문제의 목표를 수정하여 문제를 제기한 경우이다. 두 번째, '가정 수정+조건 수정'의 사례는(SD1) 기존 문제의 조건이었던 '뚝배기류, 곁들임메뉴, 칼국수류'에서 '곁들임메뉴, 뚝배기류'로 조건을 수정하고, '비빔밥류', '해물을 좋아하고', '3000원 10000원 사이의 가격의 음식'이라는 기존 문제의 가정 수정(추가)을 통해 문제를 제기한 경우이다. 세 번째, '목표 수정+조건 수정'의 사례는(SA25) 기존 문제의 조건에서 '뚝배기류와 칼국수류'로 조건을 수정하고, 문제의 목표를 '뚝배기류'와 '칼국수류'의 평균을 각각 구하여 이를 비교하는 문제로 제기한 경우이다. 마지막으로 '가정 수정+조건 수정+목표 수정'의 사례는(SC25) 기존 문제에 제시되었던 조건에서 '해물뚝배기, 불고기떡볶이, 김치만두, 본칼국수'로 문제의 조건을 수정하고, '3000원 무료 쿠폰'과 '김치만두' 환불이라는 가정 수정(추가)도 겸하면서, 구하고자 하는 문제의 목표를 평균 구하기에서 지불 금액 구하기로 바꾸어 문제제기를 한 경우이다.

2가지 이상의 전략을 활용한 경우(33.3%)보다 1가지 전략을 활용한 문제(47%)가 다소 많은 것으로 나타났는데 이는 학생들이 문제를 제기할 때 여러 가지 가능성을 염두 해 두기 보다는 한 가지 측면에서 문제를 제기를 하는 경향을 보여주는 결과이기도 하다. 이밖에 전체 문제의 약 20%의 경우는 분석이 불가능한 것으로 나타났는데 이러한 문제들은 기존 문제와 매우 유사하거나, 문제가 아닌 경우, 또는 수학 문제가 아닌 경우였다. 이러한 결과로부터 문제제기의 의미를 제대로 이해하지 못하거나 문제제기 전략의 사용에 어려움을 겪고 있는 학생들이 존재함을 추측할 수 있다.

GM + AM	 (SB18)
AM + CM	 (SD1)
GM + CM	 (SA25)
AM + CM + GM	 (SC25)

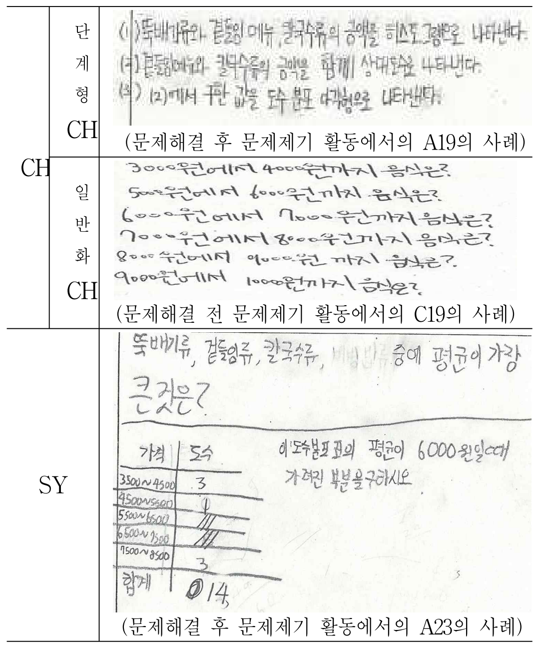
[그림 6] 2가지 이상의 문제제기 전략을 사용한 예
[Figure 6] Examples of problem posing using two or three strategies

본 연구자들은 Silver 외(1996)가 수행했던 것과 같이 학생들이 문제를 제기하는 과정에서의 인지적 전략을 파악하기 위하여 특정 문제제기 단계에서 한 학생이 2개 이상의 문제를 제기한 경우 제기한 문제들 사이에서의 관계성에 대한 분석 또한 시도하였다. 그러나 본 연구에 참여한 대부분의 학생들이 각 단계에서 1개 이하의 문제

를 제기한 경우가 많아 관계성에 대한 분석은 총 9개의 사례를 대상으로 수행되었다. 관계성에 대한 분석은 [표 3]의 분석틀을 활용하였으나 '연쇄'의 경우 '단계형 연쇄'와 '일반화 연쇄'로 구분하여 분석을 실시하였다. 분석 결과를 간략하게 살펴보면, 9개의 사례에서 '연쇄'(단계형 연쇄와 일반화 연쇄)와 '대칭'의 사례는 발견되었으나 '체계적인 변화'와 'What if not'의 전략을 활용한 사례는 없었다. 이는 분석 대상의 수가 너무 적어 비롯된 결과일 수도 있으므로 이러한 결과를 일반화 하는 것은 적절하지 못하나 본 연구자들은 문제제기 과정에서의 인지적 전략의 예시를 보여주기 위하여 9개 사례의 분석에 대한 결과를 본 논문에 제시하는 바이다. [그림 7]은 '단계형 연쇄', '일반화 연쇄', '대칭'에 관한 대표적인 사례들이다.

이 사례들을 자세히 살펴보면, 우선 '단계형 연쇄'의 경우에는(A19) 먼저 제기된 문제를 해결해야만 다음 문제를 쉽게 해결할 수 있는 관계 구조를 포함하는 것으로 첫 번째 '히스토그램' 그리기에서, 두 번째 '상대도수' 구하기, 그리고 마지막에는 '상대도수분포다각형' 그리기와 같이 연쇄적으로 문제의 목표를 수정하면서 문제 제기를 하는 경우이다. 특히, '연쇄'는 '문제해결 전 문제제기' 활동에서 1번, '문제해결 후 문제제기' 활동에서 7번 확인되었는데, 후자의 경우에는 모두 '단계형 연쇄'로 분석되었다. '문제해결 전 문제제기' 활동 결과 중에서 C19 사례의 경우는 유일하게 '일반화 연쇄'의 가능성을 보여주고 있었다. '일반화 연쇄'는 앞선 문제의 조건을 수정하면서 문항들 사이의 일반화를 이끌어내는 관계 구조를 나타내고 있는 경우이다. 마지막으로, '대칭'의 경우(A23)는 1개의 사례로 나타났고, 그 사례에서는 첫 번째 문제의 목표였던 평균 구하기를 두 번째 문제의 조건으로 제시하고 도수분포표의 가려진 부분을 구하는 문제로 만듦으로써 문제의 조건과 목표를 서로 맞바꾸어 문제를 제기하는 경우이다.

'연쇄'나 '대칭'과 같이 문제를 제기하는 과정에서 적절한 인지적 전략을 활용하여 문제를 제기하는 것은 단순히 문제의 목표, 조건, 가정만을 수정하여 문제제기하는 것보다 기존의 문제를 완벽하게 파악해야 하고, 일반화(추론과정), 단계적 문제해결(심화과정), 비교대조와 같은 문제 사이의 논리적 구조를 학생들이 심도 있게 고려해야하기 때문에 더 높은 수준의 사고를 필요로 한다. 따라서 학생들이 다양한 문제제기 전략을 활용하고 더 높은 수준의 수학적 문제제기 능력을 기르기 위해서는 학생들이 수학 문제의 구조를 파악할 수 있도록 지도하는 것이 강조되어야 한다. 학생들이 주어진 문제에 대한 구조를 파악한다면 문제의 목표, 가정, 조건을 (독립적으로 또는 동시에) 자유롭게 조작하면서 논리적인 관계 구조 속에서 다양한 문제를 제기할 수 있게 될 것이고, 더 나아가 학생들은 하나의 기저 문제에서 출발하여 문제제기를 통해 추론 과정, 즉 일반화 또는 증명과 같이 난이 수준이 높은 문제를 스스로 해결할 수 있는 방법을 탐색하는 경험을 하게 될 것이다.



[그림 7] '단계형 연쇄', '일반화 연쇄', '대칭'의 예
[Figure 7] Examples of problem posing using chain and symmetry strategies

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 수학적 문제제기를 적용한 수업을 실시한 후에 학생들이 제기한 문제에 대한 분석을 통해서 문제제기 유형과 전략에 대해서 살펴보았다. 본 연구 결

과를 토대로 다음과 같은 결론 및 시사점을 도출할 수 있었다.

첫째, 본 연구에 참여한 학생들이 제기한 문제의 유형은 Leung(2013)의 연구에서와 같이 '문제가 아닌 경우', '수학문제가 아닌 경우', '풀이가 불가능한 경우', '문제의 조건이 불충분한 경우', '문제로서 충분한 경우'의 5가지 유형이 모두 나타났다. 문제제기 유형의 분석은 문제해결 전, 중, 후 문제제기 활동의 단계별로 이루어졌는데 구조화된 상황으로 갈수록 '무응답'을 하는 학생들의 비중이 커지는 것을 확인할 수 있었다. 즉 자유로운 상황에서는 '수학문제가 아닌 경우'의 문제제기 유형이 다수 확인되었으나, 대부분의 학생들이 문제제기를 하려고 노력하고 있었다. 이와 반대로 제시된 문제를 토대로 (반)구조화된 상황에서 학생들에게 문제제기를 요구하였을 때에는 문제 만들기를 어려워하거나, 문제를 해결하고 나서 새로운 문제를 제기해야 하는 필요성을 느끼지 못해 다수의 학생들이 문제제기를 포기하는 것을 볼 수 있다. 따라서 교사는 문제제기 활동을 단계별로 적용하는데 있어 학생들에게 각각의 활동들이 주는 목적과 필요성을 문제해결과 관련하여 안내할 필요가 있다. 또한 본 연구에서 제시된 문제제기 유형의 분석틀을 학생들의 문제제기 활동의 평가 근거로 삼아 피드백을 해준다면 학생들의 수학적 문제제기 능력의 함양에 도움을 줄 것이다.

둘째, 문제제기 전략의 경우에는 목표 수정, 조건 수정, 가정 수정의 3가지 범주로 구분하여 분석을 실시하였는데 학생들은 문제제기 전략들을 각각 독립적으로 사용하거나 2가지 이상의 전략들을 동시에 사용하기도 하였다. 비록 본 연구에서는 문제제기 과정에서 한 가지 전략이 활용된 비율이 다소 높게 나타났으나, 학생들의 수학적 문제제기 능력을 더 높은 수준으로 끌어올리기 위해서는 문제제기 과정에서 단순히 한 가지 전략만을 사용하기 보다는 여러 가지 전략을 동시에 활용할 수 있는 능력을 기르도록 문제제기 교육이 이루어질 필요가 있다. 학생들이 문제제기 전략을 보다 자유롭게 활용할 수 있도록 하기 위해서는 무엇보다 수학 문제의 구조를 파악할 수 있는 안목이 형성되어야 하는데, 이를 위해서는 수학 교수-학습 내용이 단순히 주어진 문제의 해결을 넘어서서 학생들로 하여금 문제의 구조를 파악할 수 있도록 안내하는 활동 또한 강조될 필요가 있다.

셋째, 본 연구에서는 한혜숙, 주홍연(2014)이 개발한 문제제기를 적용한 수업 지도안을 토대로 문제제기 수업을 수행하였다. 수업의 도입 단계에서 이루어진 '실생활 소재 제시' 활동에서는 전개 단계에서 이루어질 문제제기 활동과 관련된 다양한 실생활 소재(음식 광고 전단지, 메뉴판)를 활용하여 학생들 스스로 수학적인 내용을 탐구하는 활동이 포함되었는데, 이 활동은 학생들이 문제 상황에 몰입하고 문제 상황을 자기문제화 하는데 매우 효과적이었다. 그 결과로 학생들의 문제제기 활동이 매우 활발히 진행되는 것을 관찰할 수 있었다. 교사가 학생들이 해결하고자 하는 문제와 관련하여 다양한 자료를 제시해 준다면 이는 문제에 대한 학생들의 이해를 돕는데 효과적일 수 있으며(Silver, 1994), 학생들의 문제제기 활동을 이끌어내는 데에도 도움이 된다(Bonotto, 2013). 특히, Bonotto(2013)의 연구와 같이, 본 연구에서도 실생활 자료(artifacts)의 활용이 학생들의 문제제기 활동을 촉진시키는데 매우 유용한 도구가 된 것으로 나타났다. 따라서 학생들의 문제제기 활동에 대한 동기 유발 및 적극적인 참여를 위해서는 실생활 소재를 적절하게 활용하기를 제안한다.

국외에서 수행된 여러 선행연구 결과에 의하면 문제제기는 학생들의 수학적 문제해결력과 더불어 다양한 수학적 사고의 발달에도 도움이 되는 것으로 나타났다. 그러나 국내에서는 문제제기 활동의 효과성 측정과 관련된 연구는 아직 미흡한 실정이다. 따라서 향후에는 문제제기 활동(수업)이 학생들의 학업 성취도를 포함하여 문제해결능력, 추론능력, 의사소통능력 등과 같은 수학적 능력에는 어떤 영향을 미칠 수 있는지를 살펴보는 심층적인 연구도 시도되길 기대한다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 서울: 교육과학기술부.

The Ministry of Education, Science and Technology (2011). *Curriculum of mathematics department*. Seoul: Ministry of Education, Science and Technology.

도종훈 (2007). 학교수학에서 추측과 문제제기 중심의 수

학적 탐구 활동 설계하기. 수학교육 46(1), 69-79.

Do, J. (2007). Designing mathematical activities centered on conjecture and problem posing in school mathematics. *The Mathematical Education 46*(1), 69-79.

박미미, 이동환, 이경화, 고은성 (2012). 유추에 의한 문제제기 활동을 통해 본 통계적 개념 이해. 수학교육학연구 22(1), 101-115.

Park, M., Lee, D., Lee, K., & Ko, E. (2012). Understanding of statistical concepts examined through problem posing by analogy. *The Journal of Education Research in Mathematics 22*(1), 101-115.

성태제, 시기자 (2006). 연구방법론. 서울: 학지사

Seong, T. J., & Si, K. J. (2006). *Research methods*. Seoul: Hakjisa.

이상원 (2005). 문제제기 수업이 수학 문제해결력과 창의력에 미치는 효과. 수학교육 44(3), 361-374.

Lee, S. (2005). The effect of problem posing teaching on mathematical problem-solving ability and creativity. *The Mathematical Education 44*(3), 361-374.

전미라, 허혜자 (1998). 문제제기 전략을 강조한 수업과 학업성취도와의 관계분석: 방정식을 중심으로. 대한수학교육학회 논문집 8(2), 709-722.

Jeon, M. & Heo, H. (1998). A study of the effects of problem posing strategies on mathematics achievement. *Journal of the Korea society of Educational Studies in Mathematics 8*(2), 709-722.

한옥동, 박혜숙 (1997). 수학과 학습에의 문제제기 이론의 적용 효과 분석. 수학교육 36(1), 77-87.

Han, O. & Park, H. (1997). Analysis on the application effect of problem-posing in mathematics learning. *The Mathematical Education 36*(1), 77-87.

한혜숙, 주홍연 (2014). 문제제기와 수학수업. 황혜정, 김진호, 고호경, 서보억(편저), 수학학습 지도 원리와 적용 (pp. 53-74). 서울: 경문사.

Han, H. & Joo, H. (2014). Problem posing and mathematics teaching. In H. Hwang, J. Kim, H. Ko, & B. Seo (Eds.), Principles and practice for teaching and learning mathematics (pp. 53-74). Seoul: Kyungmoonsa.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics 83*(1), 37-55.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cai, J., & Cifarelli, V. (2005). Exploring mathematical exploration: How do two college students formulate and solve their own mathematical problems?. *Focus on Learning Problems in Mathematics 27*(3), 43-72.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 401-421.

Dillon, J. T. (1982). Problem finding and solving. *Journal of Creative Behaviour 16*, 97-111.

Duncker, K., & Lees, L. S. (1945). On problem-solving. *Psychological monographs, 58*(5), i.

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems: A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics 17*, 261-271.

Ellerton, N. F., & Clarkson, P. C. (1996). Language factors in mathematics teaching. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilparick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 987-1053). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem abilities. *Educational Studies in Mathematics 34*, 183-217.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education 29*(1), 83-106.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematical as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Leung, S. S. (1993). Mathematical Problem Solving:

The influence of task formats, mathematics knowledge, and creative thinking. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th International conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 33-40). Tsukuba, Japan.

Leung, S. S. (1996). Problem posing as assessment: Reflections and reconstructions. *The Mathematics Educator 1*(2), 159-171.

Leung, S. S. (1997). On the role of creative thinking in problem posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 97*(3), 81-85.

Leung, S. S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: Challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics 83*(1), 103-116.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning (2 vols)*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1957). *How to solve it (2nd ed.)*. New York: Doubleday.

Rosenshine, B., Meister, C., & Chapman, S. (1996). Teaching students to generate questions: A review of the intervention studies. *Review of Educational Research 66*(2), 181-221.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics 14*(1), 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 29*(3), 75-80.

Silver, E. A., Kilpatrick, J., & Schlesinger, B. (1990). *Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms.* New York: The College Board.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education 27*(3), 293-309.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Torrance, E. P. (1966). Torrance tests of creative thinking. Princeton: Personal Press.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2010). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem posing abilities. In B. Sriraman & K. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 5-28). Rotterdam: Sense Publishers.

The analysis of middle school students' problem posing types and strategies

Joo, Hongyun
Dankook University
E-mail : almighter@hanmail.net

Han, Hyesook†
Dankook University
E-mail : hanhs@dankook.ac.kr

The purpose of this study was to analyze middle school students' problem posing types and strategies. we analyzed problems posed by 120 middle school students during mathematics class focused on problem posing activities in various aspects. Students' posed problems were classified into five types: not a problem(NP), non-math(NM), impossible(IM), insufficient(IN), sufficient(SU) and each of the posed problems. Students used three kinds of problem posing strategies such as goal manipulation(GM), assumption manipulation(AM), and condition manipulation(CM), and in posing one problem, one or more than two strategies were used. According to the prior studies, problem posing can contributes to the development of students' problem solving ability, creativity, mathematical aptitude, and a broader understanding of mathematical concepts. However, we found that some students had difficulties in posing problems or limited understandings of that. We hope the results of the study contribute to encouraging problem posing activities in mathematics instruction.

* ZDM classification : C73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : mathematical problem posing, problem posing strategy, problem posing type, teaching and learning model
† The corresponding author

[부록] 문제제기 활동지

단원	확률과 통계 자료의 수집과 정리	학년 반		이름	

문항

◆ 아래 그림은 우리 주변에서 흔히 볼 수 있는 배달 광고지이다.

1. 위의 **배달 광고지를 활용**하여 **자유롭게 문제(또는 질문)를 만들어 봅시다.** 그리고 자신이 만든 문제를 친구들과 교환하고 누가 문제를 더 빨리 해결하는지 겨루어 봅시다.

내가 만든 문제	나의 풀이과정	친구의 풀이과정

2. 아래의 배달 광고지를 활용한 문제를 해결하기 위해서 **'평균' 개념**과 관련이 있는 **풀기 쉬운 문제를 만들어 봅시다.** 그리고 자신이 만든 문제를 친구들과 교환하고 누가 문제를 더 빨리 해결하는지 겨루어 봅시다.

★문제★ 배달 광고지의 일부이다. 물음에 답하시오.

(1) 제시된 자료를 보고 도수분포표를 만드시오.

(2) (1)의 도수분포표를 보고, 평균을 구하시오. (단, 십의 자리에서 반올림하여 백의 자리까지 나타내시오.)

'평균' 개념과 관련된 내가 만든 문제	나의 풀이과정	친구의 풀이과정

위의 주어진 ★문제★의 풀이과정을 자세히 서술하시오.

(1) 풀이과정 :

가격	도수(개)
합계	

(2) 풀이과정 :

3. 배달 광고지 전체를 보고, 2번에 제시된 **★문제★**와 관련된 문제를 다양한 방법을 활용하여 만들어봅시다. 그리고 자신이 만든 문제를 친구들과 교환하고 누가 문제를 더 빨리 해결하는지 겨루어 봅시다.

내가 만든 문제
나의 풀이과정
(풀이과정)
친구의 풀이과정
(풀이과정)