韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2016.55.1.21
2016. 2. 제 55권, 제 1호, 21-39.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2016, Vol. 55, No. 1, 21-39.

한국과 미국 6학년 학생들의 직관적 사고에 의한 수학 문제해결 분석[1)]

이대현(광주교육대학교)

I. 서론

수학의 역사를 통해 알 수 있는 사실은 논리가 수학 발달에 주된 역할을 수행해 왔지만, 수학 발명에 원동력이 되었던 것은 직관이었다는 것이다(Poincaré, 1908). 그래서 많은 학자들은 수학과 수학교육에서 논리와 더불어 직관의 중요성을 강조하고 있는 것일 것이다(Burton, 1999; Fischbein, 1987; Hadamard, 1945; Poincaré, 1908; Wilder, 1967).

학교 수학에서도 논리적 문제해결을 중시하고 있지만, 직관에 의한 통찰은 문제해결의 실마리나 해결책을 발견하는 과정에서 중요한 역할을 한다. 그럼에도 학교 수학은 규칙이나 법칙, 원리를 가르치고 일련의 예와 연습문제를 통해 이해가 이루어지기를 기대하고 있다(Janvier, 1981). 이러한 수학 교실 문화는 학생들에게 논리 위주의 수학 탐구를 하나의 관습으로 형성하도록 하였고, 이로 인해 직관에 의한 문제해결에서는 상대적으로 낮은 성취 수준을 보이기도 한다(이대현, 2010).

학생들의 인지적 발달 과정과 직관의 중요성에 비추어 초등 수학에서는 연역적인 전개 방식보다는 구체적인 경험이나 실험과 같은 조작 활동을 통해 수학 개념과 원리, 법칙을 가르치는 것이 적절하다. 실제로 우리의 교육과정에서도 도형 개념의 이해 과정에서는 예와 예가 아닌 것을 인식하고 분류하는 활동을 통하여 직관적으로 인식하도록 제안하고 있다(교육과학기술부, 2011). 그렇지만 우리나라 교육과정에서 직관을 통한 교육 내용의 구현 정도는 전반적으로 미비하다는 분석 결과가 제시되어 있다(이대현, 2010). 직관에 의한 문제해결 능력은 수학적으로 우수한 학생들의 특성으로 제시되기도 하는바(Krutetskii, 1976), 학생들의 문제해결력의 신장을 위해 직관에 의한 문제해결에도 관심을 가질 필요가 있다.

그런데 직관은 그 자체의 특성으로 인해 수학 문제해결에서 긍정적인 영향과 부정적인 영향을 끼치기도 한다(Fischbein, 1987). 직관은 대상이나 사실을 즉각적으로 인식하는 과정에서 문제해결의 실마리를 발견하여 단축된 사고로 문제를 해결할 수 있게 하는 긍정적인 기능을 가지고 있다. 그렇지만 한번 수용된 사실을 유지하려는 직관의 특성으로 인해 새로운 사실의 수용을 거부하여 문제해결에 부정적인 영향을 끼치기도 한다(강미광, 2008). 이런 사례는 '무한'개념과 관련된 수학의 역사(신현용, 이경언, 2010)와 학생들의 수학 문제해결 과정을 통해서도 쉽게 찾을 수 있다.

이러한 사실들은 '학생들이 수학 문제를 해결할 때 어느 정도 직관에 의존하여 사고하는가?'를 파악할 필요성을 제기한다. 특히 수학 문제해결 과정에서 직관의 영향으로 이루어지는 직관적 사고에 의한 영향과 이에 의한 문제해결의 정도를 분석할 필요성을 제기한다.[2)] 직관적인 해결과 논리적인 해결이 가능한 문제해결의 경우에 직관적 문제해결 방법은 즉각적이고 단축된 사고 방법으로 인해 논리적인 해결 방법보다 쉽고 빠르게 답을 얻을 수 있다. 그렇지만 직관적 사고에 치중하여 고집된 사고

* 접수일(2015년 9월 16일), 수정일(1차: 2015년 10월 19일, 2차: 2015년 11월 18일, 3차: 2015년 11월 28일), 게재확정일(2015년 12월 17일)
* 2015년 9월 투고, 2015년 12월 심사 완료.
* ZDM 분류 : C33
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : 문제해결, 직관, 직관적 사고, 논리적 사고, 알고리즘, 반직관적 해결, 전직관적 해결, 직관적 해결
1) 본 논문은 2015학년도 광주교육대학교 학술연구비 지원에 의해 연구되었음

2) '직관'과 '직관적 사고'는 유사어로 혼용하여 사용되기도 하지만, 판단이나 추리 등의 사유 작용을 거치지 아니하고 대상을 즉각적으로 파악하는 작용이나 인지를 '직관'으로, 분석·비교·종합 등 논리적 수순을 밟지 않고 결론을 이끌어가는 형태의 사고를 직관적 사고로 구분하기도 한다(교육공학사전, 1972). 본 연구에서는 수학적 사실의 직관적인 인지나 인식에 관한 사고 작용을 지칭할 경우에는 '직관'을, 수학적 문제해결 과정이나 수학적 탐구 과정에서 일어나는 수학적 사고 활동과 관련해서는 '직관적 사고'로 명명하였다.

에 얽매이게 되면 문제의 핵심 구조를 간과하게 됨으로써 오류를 일으킬 수도 있다.

따라서 학생들의 직관적 사고에 의한 문제해결의 경향을 파악함으로써 직관적 사고에 의한 문제해결 교육의 현 상황을 파악할 수 있으며, 교육에 시사점을 도출할 수 있을 것이다. 특히 교육 문화와 환경이 다른 나라 학생들의 직관적 사고에 의한 문제해결의 경향을 파악하는 것은 교육의 문화와 환경, 그리고 방식에 따라 직관적 사고에 의한 문제해결에도 차이가 있는지? 유사한 점이 있는가를 파악함으로써 직관적 사고에 의한 문제해결에 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

이에 본 연구에서는 한국과 미국의 6학년 학생들을 대상으로 알고리즘에 의한 해결과 직관적 사고에 의한 해결이 가능한 문제를 활용하여 직관적 사고에 의한 수학 문제해결 과정을 비교・분석해 보고자 한다. 본 연구를 통하여 두 나라 학생들이 수학 문제를 해결할 때 어떤 문제해결 방법을 주로 선호하고 활용하는가에 대한 정보를 파악하고, 수학 문제해결 교육에 시사점을 도출하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

수학에서 순전히 논리적이기만 한 발명은 없으며, 직관적인 정신이 내재되어야 하고 이것은 논리적 작업을 위한 출발점이 되었다. 그래서 수학자들은 발명의 첫 과정에서는 직관적이었다가, 발견한 내용을 발표할 때에는 논리적으로 선회했던 것이다(Hadamard, 1945; Poincaré, 1908). 수학의 발명 과정에서 나타나는 직관과 논리의 상보성 문제는 학교 수학에서 학생들이 수학 문제를 해결하는 과정에서도 유사하게 나타날 수 있다.

학교 수학과 관련된 직관은 직관적 사고라는 측면에서 여러 연구가들에게 관심의 대상이었고, 교육 연구에서 다른 용어와 마찬가지로 직관은 다양한 의미로 해석되어지고 있다. 그렇지만 직관은 즉각성(immediacy)이라는 특징을 가지고 있다는 견해는 공통된 현상이기도 하다(Fischbein, Tirosh, Melamed, 1981). 즉각성은 문제의 조건이나 구조에 대한 통찰을 바탕으로 즉각적인 판단에 이르게 하며, Gauss가 초등학교 시절에 1부터 100까지의 자연수 합을 순식간에 해결해 내었던 일화는 즉각적인 판단으로 해결책에 도달하는 즉각성의 효과를 볼 수 있다(이대현, 2006).

직관에 대한 논의가 긍정적인 면과 부정적인 면에서 다루어졌듯이, 즉각적인 판단을 통한 직관적 사고에 의한 문제해결은 두 가지 측면을 동시에 고려해야 한다. 먼저, 수학 문제해결에서 직관적 사고는 문제 구조에 대한 즉각적인 통찰과 이해를 바탕으로 문제해결책을 즉각적으로 발견하기도 한다. 이런 경우에 알고리즘적인 해결은 직관적 해결에 비해 상대적으로 힘든 과정이 될 수 있다. 마치 ‘디오판투스의 묘비 문제’를 해결하기 위하여 문제에 제시된 분수들을 살피고 분모의 최소공배수를 구해서 일거에 답을 구하는 것과 문제의 조건에 맞는 연립방정식을 세워 답을 구하는 예를 생각하면 쉽게 이해가 된다.

그렇지만 직관적 사고는 즉각적인 판단 결과로 인해 오류를 일으키는 원인이 되기도 한다. 우리는 한 번 수용한 사실을 강하게 믿으려는 확신을 가진다. 예를 들어 수학의 중요한 개념인 무한 개념의 경우에 현대 수학에서 다루는 무한 개념은 ‘무한히 증대될 수 있는 것의 총체가 완결되어 실제로 존재함’을 의미하는 Cantor의 실무한 개념이다. 그렇지만 우리가 인식하는 무한은 ‘단지 아무리 많은 대상이 이미 존재하든 관계없이 새로운 대상을 창조하는 끝없는 가능성’만을 나타내는 잠재적 무한 개념이다(이대현, 2001). 그런데 실무한 개념은 많은 모순과 인식에 어려움을 초래하며, 학교교육을 통해서도 쉽게 수용하기 어려운 반직관적(counter-intuitive)인 개념이 되고 있다. 이러한 개념에 대한 인식 정도는 연령이나 교수 과정을 통해서도 변하지 않고 일관되게 나타난다는 특징이 있다(Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979). 따라서 즉각적인 판단에 다른 직관적 사고에 의한 문제해결에서는 자신의 문제해결 과정을 점검할 수 있는 메타인지적 사고 과정이 개재되어야 한다.

수학 문제해결 과정에서 이러한 현상은 직관의 특징과 관련 있는데, Fischbein(1987)이 제시하는 8가지의 특징은 우리의 신념으로 강하게 형성되어 문제해결 과정에 때로는 긍정적으로, 때로는 부정적으로 영향을 끼치게 된다. 이들 특징으로 자명성(self-evidence)은 주어진 진술이 어떤 증명이나 정당화가 필요 없이, 그 자체로 옳다고 느끼게 하는 직관의 근본적 특징이다. 이로 인해

두 직선이 만날 때 생기는 맞꼭지각의 크기는 증명할 필요성도 느낄 이유가 없이 같다는 것을 인식한다. 내재적 확실성(intrinsic certainty)은 주어진 진술을 확실한 것으로 받아들이게 하는 특징이며, 외삽성(extrapolativeness)은 어떤 결론에 도달하기 위해 같은 무한히 행동을 반복하여 적용 범위를 자연스럽게 확장해 가는 특징이다. 또한 전체성(globality)은 주어진 전체 요소 중 일부를 무시하고 전체적인 구조에 주목하는 특징을 의미한다.

한번 형성된 직관이 매우 견고하여 오랜 동안 지속되는 특징인 강제성과 직관적으로 인식된 사실이 개인의 추론 과정에서 절대적이고 유일한 판단으로 지속적인 영향을 주는 고집성도 있다. 암묵성(implicitness)은 개인이 의식하지 않는 어떤 규칙을 암묵적으로 적용하려는 특징이며, 이론적 성격(theory status)은 직관을 통해 인식된 사실을 일반적인 사실로 인식하게 된다는 특징이다. 이러한 여러 특성으로 인해 직관은 수학 문제해결에서 영향을 끼치게 되는 것이다. 일례로 행동을 무한히 반복하여 적용의 범위를 확장해 가는 특징인 외삽성은 잠재적 무한 개념의 인식에는 도움이 되지만, 실무한 개념을 수용하는 데에는 장애가 되기도 한다.

따라서 직관적 사고와 관련된 학생들의 문제해결 과정에 대한 분석은 직관적 사고에 의해 나타나는 두 가지의 상반된 측면에서 분석하는 것이 적절하다. 먼저, 직관적 사고에 의해 즉각적으로 해결이 가능한 문제를 활용하여 직관적 문제해결 정도를 파악할 수 있다. 또한 즉각적인 판단의 결과로 인해 오류를 일으키는 직관적 사고에 의한 오류 정도를 살펴볼 필요가 있는데, 이를 반직관적(counter-intuitive) 문제해결이라 할 수 있다. 특히 반직관적 문제해결은 문제의 특징적 요소에 즉각적 반응하여 나타나는 오류로, 예측 가능한 '장애'의 특징을 가진다.

전직관적(pre-intuitive) 문제해결은 반직관적 문제해결과는 달리, 직관적 사고에 의해 즉각적으로 문제해결을 시도하지만 문제에 대한 통찰의 결여로 답을 얻지 못하여 실패하는 경우를 의미한다(이대현, 2014). 이에 덧붙여, 학생들은 수학 문제를 해결할 때 알고리즘에 의존하여 논리적 사고에 치중하는 경향을 가지기도 한다. 이런 면에서 수학 문제를 해결하는 상황에서 학생들의 사고 과정은 크게 [표 1]과 같이, 알고리즘을 활용한 논리적 사고의 의존하는 측면과 즉각적인 판단에 의해 문제해결을 시도하는 직관적 사고에 의한 두 가지 측면으로 문제해결 수준을 구분할 수 있을 것이다.

[표 1] 문제해결의 수준 구분(이대현, 2014, p. 694)
[Table 1] Sorting of Problem solving stages

논리적 사고	알고리즘(algorithm)에 의한 해결
직관적 사고	반직관적(counter-intuitive) 사고에 의한 해결
	전직관적(pre-intuitive) 사고에 의한 해결
	직관적(intuitive) 사고에 의한 해결

그런데 수학자들의 발명 과정이 순전히 논리적이거나 직관적인 것이 아닌 것처럼(Poincaré, 1908), 학생들의 문제해결을 순전히 논리적이거나 직관적인 것으로 양분하기에는 어려움이 있을 수 있다. 그렇지만, 본 논문에서는 학생들이 제시한 문제해결 과정과 최종 결과를 바탕으로 크게 논리적 해결과 직관적 해결로 구분하고, 직관적 사고에 의한 문제해결은 직관적 문제해결과 전직관적 문제해결 및 반직관적 문제해결로 분석하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상 및 방법

본 연구를 위해 한국과 미국의 6학년 학생들을 연구 대상으로 선정하였다. 한국 학생들은 G광역시에서 2개 초등학교를 임의로 표집하고, 표집된 학교에서 각각 한 학급씩 표집한 학급의 학생들이었다. 이러한 과정을 통해 표집된 학생들은 모두 57명이었다.

또한 미국의 학생들은 California 주 Los Angeles 카운티의 Alhambra 지역에서 1개 중학교(6학년부터 중학교 과정임)를 임의로 표집하였고, 그 학교에서 표집된 2개 학급의 학생들로 모두 60명이었다. 이들은 히스패닉계 56.9%, 아시안 31.9%, 백인 5.6%, 기타 5.6%로 구성되어, 여러 인종의 학생들이 혼합된 학급이었다. 따라서 표집된 연구 대상이 두 나라 학생들을 대표할 수는 없다는 한계가 있다. 그렇지만 본 연구의 목적이 교육 문화와 환경이 다른 두 나라 학생들의 직관적 사고에 의한

[표 2] 검사 문제의 내용(출처)
[Table 2] The Content of Survey Problems(references)

	문제 내용
1	이웃한 짝수와 홀수의 차가 1임을 활용하여 1에서 100까지의 (짝수 합-홀수 합)을 직관적으로 구할 수 있는가?(재구성 문제)
2	인수 5의 개수를 활용하여 1에서 15까지 수를 곱했을 때 끝에 연달아 나타나는 0의 개수를 직관적으로 구할 수 있는가?(이대현, 최승현, 2011)
3	원에 내접하는 정사각형을 회전시켜 정사각형의 넓이를 직관적으로 구할 수 있는가?(이대현, 2001; 이대현, 최승현, 2011; 한영수(역), 1994)
4	정사각형의 각 꼭짓점과 마주보는 변의 중점을 이어 만든 도형에서 도형 조각을 이동(등적변형)하여 넓이를 직관적으로 구할 수 있는가?(경익선(역), 1997)
5	‘$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots < 1$’이라는 반직관적 문제해결이 나타나는가?(Fischbein, Tirosh, Melamed, 1981)
6	‘자연수의 개수가 짝수의 개수보다 많다.’는 반직관적 문제해결이 나타나는가?(Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979)
7	‘둘레의 변화 없이 직사각형을 비스듬히 눕히면 넓이는 변하지 않는다.’는 반직관적 문제해결이 나타나는가?(이대현, 2001; 이대현, 최승현, 2011)
8	‘폭과 길이가 같은 구부러진 도형이 일직선으로 이루어진 도형의 넓이보다 넓다.’는 반직관적 문제해결이 나타나는가?(Fischbein, 1987)

문제해결의 정도와 경향을 파악하는 것에 주안점을 두기 때문에 교육의 방식이나 문화에 따라 직관적 사고에 의한 문제해결에도 차이가 있는지? 유사한 점이 있는가를 파악할 수 있을 것이다. 또한 두 나라의 학생들이 수학 문제를 해결할 때 어떤 문제해결 기법을 주로 선호하고 활용하는가에 대한 정보도 파악할 수 있을 것으로 기대된다. 한편, 본 연구를 위하여 연구 목적에 맞는 검사지를 제작하였고, 이를 활용하여 결과를 분석하였다.

2. 검사도구 및 자료 분석

본 연구에서는 학교 수학 내용과 관련하여 검사 대상자들의 수준과 교육과정에 적합한 내용 중에서 직관적으로, 또는 논리적으로 해결 가능한 문제를 제작하는데 초점을 두었다. 검사 문제 제작을 위해 선행연구와 문제해결 문헌에 제시된 문제 중에서 연구 대상과 연구 목적에 부합하도록 재구성하였으며, 알고리즘에 의한 해결부터 직관적 판단에 의한 해결이 가능한 문제를 선정하는데 중점을 두었다.

검사 문제는 모두 8문제로, 1-4번 문제는 논리적인 해결보다 직관적 사고에 의한 해결로 정답을 쉽게 구할 수 있는 문제였고, 5-8번 문제는 직관적으로 판단하여 즉각적으로 답을 했을 경우에 오류가 발생할 수 있는 문제였으며, 특히 5번과 6번 문제는 무한 직관과 관련된 문제였다.

검사지의 타당성 정도를 확인하기 위해 초등 수학교육 담당 현장 교사 5인과 두 차례의 논의를 거쳐 내용타당도를 확보하였다. 또한 California 주립대학 수학교육 전공 학과에 재직 중인 영어권 수학교육 전문가와의 3차례 협의를 거쳐 영문 검사지를 동일하게 번역하여 제작하였다. 각 문제에 대한 정보는 [표 2]와 같다. 자료 분석에서는 학생들이 해결한 검사지를 바탕으로 먼저 정답의 유무를 파악하였고, 답의 유형을 범주화하여 분석하였다.

3. 연구 절차

본 연구에서는 검사 문제를 먼저 제작하였고, 연구 내용에 적합한 연구대상을 추출하였다. 검사 과정에서는 연구대상 학생들이 40분 동안 충분한 시간 안에서 자신이 선택한 해결 방법으로 문제를 해결하도록 하였다. 다음으로는 검사 결과를 분석하고 사고과정에 대한 정확한

정보를 파악하였다. 마지막으로 분석이 이루어진 연구 결과를 바탕으로 학생들이 수학 문제를 해결하는 과정에서 보인 문제해결 정도와 수준을 파악하고, 이를 바탕으로 학교 교육에 시사점을 도출하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 전체적인 문제해결 결과 분석

이 절에서는 한국과 미국의 6학년 학생들을 대상으로 실시한 검사 결과를 바탕으로, 두 나라 학생들의 문제해결 정도를 전체적으로 분석하였다. 결과 분석에서는 정답과 오답으로 구분하여 정답률을 산출하였으며, 그 결과는 [표 3]과 같다.

[표 3] 문제해결 분석 결과
[Table 3] The result of analysis on the problem solving

구 분		정답자(정답률: %)	
		한국(57명)	미국(60명)
직관적	1	36(63.2)	3(5.0)
	2	24(42.1)	3(5.0)
	3	24(42.1)	17(28.3)
	4	26(45.6)	7(11.7)
	평균	27.5(48.2)	7.5(12.5)
반직관적	5	5(8.8)	1(1.7)
	6	9(15.8)	3(5.0)
	7	1(1.7)	3(5.0)
	8	25(43.9)	10(16.7)
	평균	10.0(17.5)	4.25(7.1)

먼저, 직관적 사고에 의한 문제해결 정도를 파악하기 위한 1-4번 문제에 대한 한국 학생들의 평균 정답률은 48.2%를 차지하였고, 모든 문제에 대해 40%이상의 정답률을 보였다. 특히 알고리즘에 의한 해결이 용이한 1번 문제에서 높은 정답률을 나타내었다. 이 영역에 대한 미국 학생들의 평균 정답률은 12.5%를 나타냈으며, 문제 3을 제외하고는 아주 낮은 정답률을 나타내었다. 한국과 미국 학생들의 정답률에서는 한국 학생들이 모든 문제에서 높은 정답률을 나타내었다.

반직관적 사고에 의한 문제해결 정도를 파악하기 위한 5-8번 문제에 대한 한국 학생들의 평균 정답률은 17.5%를 차지하였으며, 전반적으로 모든 문제에 대해 낮은 정답률을 보였다. 무한에 관한 5-6번 문제에서는 잠재적 무한 개념에 의한 반직관적 사고에 의해 낮은 정답률을 보였으며, 7번 문제의 경우에는 문제 구조에 대해 면밀한 검토과정이 없이, 학교 수학에서 배운 친숙한 원리를 그대로 적용함으로써 많은 오답자가 나타났다. 이 영역에 대한 미국 학생들의 평균 정답률도 7.1%로 낮게 나타났으며, 그 경향은 한국 학생들의 결과와 유사하였다. 따라서 반직관적 사고의 영향을 받는 문제에서 학생들이 보여준 결과는 교육 환경이나 문화가 그 결과에 큰 영향을 주지 않는다는 것을 나타낸다.

한편, 다른 변인들을 고려하지 않고 문제의 두드러진 요소에 주목하는 직관의 전체성에 의한 영향을 다룬 7, 8번 문제의 경우에 7번 문제의 낮은 정답률에 비해, 8번 문제의 경우에서는 등적변형의 개념을 활용·적용함으로써 43.9%의 정답률을 보였다. 7번 문제의 경우에는 둘레의 길이가 같기 때문에 넓이가 같다고 판단하였으며, 그 경우에 평행사변형의 넓이를 구하는 원리의 발견 과정에서 활용한 등적변형의 원리를 통해 직사각형으로 변형한 경험을 그대로 적용하는 결과가 나타났다. 따라서 두 문제의 경우에 등적변형과 같이 동일한 원리일지라도 문제에 적용되는 상황에 따라 결과가 다르게 산출되며, 이에 학생들은 문제해결 과정에서 적용한 원리에 대해 주의깊게 점검하는 메타인지 과정이 필요함을 알 수 있다.

본 연구에서 나타난 한국과 미국 학생들 간의 정답률의 차이는 학년 수준은 다르지만 TIMSS(Trends in International Mathematics and Science Study) 2011의 수학 성취도에서 한국 초등학교 4학년이 2위(평균: 605점), 중학교 2학년이 1위(평균: 613점)를 한 반면에, 미국 초등학교 4학년은 11위(평균: 541점), 중학교 2학년은 9위(평균: 509점)를 한 차이와 같이(김수진 외 4, 2013), 한국 학생들의 더 나은 결과를 나타낸다. 마찬가지로, 본 연구에 나타난 두 나라 학생들의 결과 분포는 만 15세 학생들을 대상으로 실시한 OECD 학업성취도 국제비교 연구(PISA: Programme for International Student Assessment) 2012에 나타난 한국과 미국 학생들 간의 현저한 차이와도 유사하다(송미영 외 7, 2014). 이러한 결과는 직관적 사고에 의한 문제해결과 같이 수학 문제해결의 여러 하위 요소들에 대하여 교육문화와 환경이

다른 나라 학생들 간의 유사성과 차이점 및 그 원인 등에 대한 비교분석 연구의 필요성을 제기한다. 이러한 연구들은 학생들의 수학 문제해결력 신장을 위한 기초 자료가 될 수 있을 것이다.

2. 직관적 사고에 의한 문제해결 결과 분석

이 절에서는 학생들의 직관적 사고에 의한 문제해결 방법을 비교·분석하였다. 이를 위해 정답률과 문제해결에 나타난 특징 및 전형적인 문제해결 방법을 예시하여 분석하였다. 또한 분석에서는 유사한 내용 범주에 속하는 두 문제를 함께 분석하였다.

1) 문제 1, 2의 결과 분석

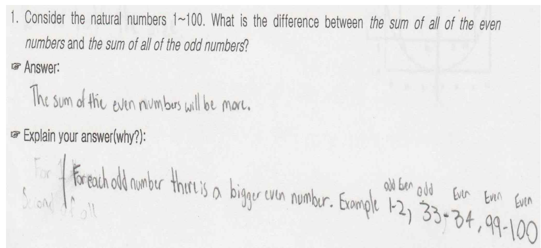
문제 1과 2는 '수와 연산' 영역에 관련하여 직관적 사고에 의한 해결 가능성을 묻는 문제였다. 본 검사에서 실시한 문제 1, 2에 대한 분석 결과는 [표 4]와 같다.

[표 4] 문제 1, 2의 분석 결과
[Table 4] The result of analysis on problem 1, 2

<table>
<tr><th colspan="2">구분</th><th colspan="2">정답률(%)</th><th colspan="4">오답률(%)</th></tr>
<tr><th colspan="2">분석 유형</th><th>알고리즘</th><th>직관적</th><th>알고리즘</th><th>전직관적</th><th colspan="2">무응답</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="2">한</td><td>50.9</td><td>12.3</td><td>22.8</td><td>1.7</td><td colspan="2">12.3</td></tr>
<tr><td colspan="2">63.2</td><td colspan="4">36.8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">미</td><td>1.7</td><td>3.3</td><td>3.3</td><td>26.7</td><td>23.3</td><td>41.7</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.0</td><td colspan="4">95.0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="2">한</td><td>24.6</td><td>17.5</td><td>40.4</td><td>1.7</td><td colspan="2">15.8</td></tr>
<tr><td colspan="2">42.1</td><td colspan="4">57.9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">미</td><td>5.0</td><td>0</td><td>71.6</td><td>11.7</td><td colspan="2">11.7</td></tr>
<tr><td colspan="2">5.0</td><td colspan="4">95.0</td></tr>
</table>

문제 1에 대해서 한국 학생들은 알고리즘에 의한 정답률이 50.9%로, 직관적 사고에 의한 해결한 12.3%보다 월등히 높게 나타났다[3]. 이러한 경향은 오답자의 분포에서도 알고리즘에 의한 해결 과정에서 오류를 일으킨 비율이 상대적으로 높게 나타나 전체적으로 알고리즘에 의한 해결 방법을 추구하는 경향이 높은 것으로 나타났다. 이것은 '짝수의 합과 홀수의 합의 차'를 구하는 문제의 구조에 치중하여 각각의 합을 계산하고, 차를 구하는데 알고리즘을 활용한 결과로 해석된다.

이 문제에 대하여 미국 학생들의 알고리즘에 의한 정답률은 1.7%로 1명, 직관적 사고에 의한 정답률은 3.3%로 2명만이 정답을 하여 아주 낮은 정답률을 보였다. 오답자의 분포에서는 짝수와 홀수의 분포에 주목했지만, [그림 1]과 같이, 결과를 분명하게 얻지 못한 전직관적 수준의 문제해결을 한 학생들이 많았다.



[그림 1] 미국 학생의 문제 1 응답
[Fig. 1] The American student's answer of pro. 1

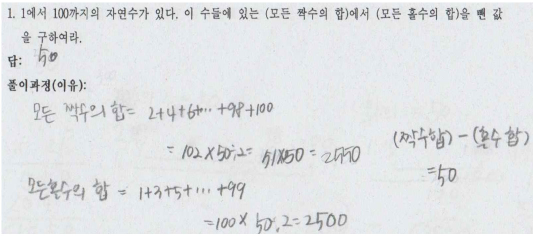
특히 [표 4]에서 무응답 칸의 41.7%는 문제에 제시된 'What is the difference between the sum of all of the even numbers and the sum of all of the odd numbers?'에서 두 수의 '차이(difference)'라는 단어를 '비유사성, 의견의 불일치, 구별'처럼 비수학적인 의미로 해석하여 '짝수들의 합은 짝수', '홀수들의 합은 짝수' 등과 같이 반응을 한 비율을 나타낸다. 이것은 모든 수학 영어 교과서에 '차이(difference)'를 '하나의 수에서 다른 수를 뺄 때 얻는 값'으로 표현되어 있음에도 불구하고 이러한 현상이 나타나, 문제해결에서 용어 문제를 고려할 필요를 제기한다(Chapin, O'Connor & Anderson, 2013).

전체적으로 문제 1번에 대하여 한국 학생들의 정답률은 63.2%를, 미국 학생들의 정답률은 5.0%를 나타내어 두 나라의 학생들 간에 정답률에서 큰 차이를 나타내었다. 이것은 한국 학생들이 직관적 사고에 의한 정답률보다 알고리즘에 의한 정답에서 높은 분포를 보인 것에서 한국의 계산 교육의 영향과 미국 학생들의 수학 용어 교육에서 차이를 반영한다고 볼 수 있다.

구체적으로 학생들의 반응을 살펴보면, 문제 1에 나타난 한국 학생의 알고리즘에 의한 문제해결과 직관적인 문제해결의 대표적인 예시는 [그림 2], [그림 3]과 같다.

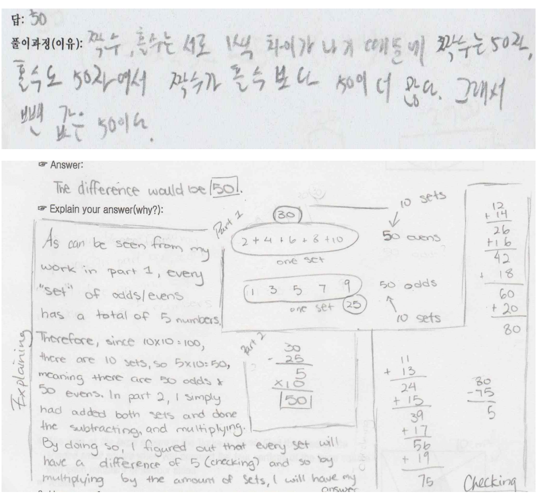
3) 본 연구에서는 학습이나 경험의 결과로 형성된 제2직관에 의한 문제해결도 직관적 수준의 문제해결로 간주하였다.

이 문제에서 알고리즘에 의한 전형적인 해결 방법은 [그림 2]와 같이, 가우스 방법을 활용하여 짝수와 홀수와 각각의 합을 각각 구하여 그 차를 계산한 경우였다.



[그림 2] 한국 학생의 문제 1 응답(1)
[Fig. 2] The Korean student's answer of pro. 1(1)

또한 직관적 사고에 의한 문제해결 방법은 [그림 3]과 같이, 이웃하는 두 수간의 차이가 1임에 착안하여 문제해결의 결과를 즉시 얻은 경우였다. 또 한 예로, 미국 학생의 방법은 처음 10개의 수들에서 짝수들의 합과 홀수들의 합의 차이가 5임을 알고, 이러한 수의 구조를 적용하여 50을 구한 경우였다. 이들 두 방법 모두 1에서 100까지의 짝수들과 홀수들의 수 구조에 착안하여 문제의 해를 즉각적으로 구할 수 있는 방법으로 간주된다.



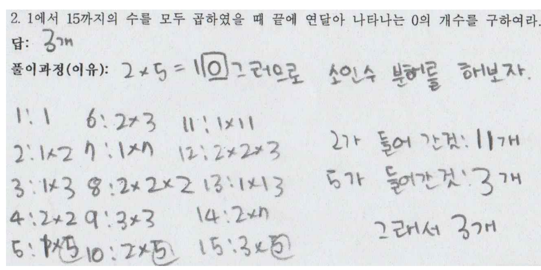
[그림 3] 한국과 미국 학생의 문제 1 응답(2)
[Fig. 3] The Korean and American student's answer of pro. 1(2)

다음으로 문제 2에 대해서 한국 학생들은 알고리즘에 의한 정답률이 24.6%, 직관적 사고에 의한 정답률이 17.5%로 나타나 알고리즘에 의한 정답률이 직관적 사고에 의한 정답률보다 높게 나타났다. 그리고 알고리즘을 활용하려는 경향은 오답자의 분포에서도 높게 나타나 전체적으로 알고리즘에 의한 해결 방법을 추구하는 경향이 높은 것으로 나타났다.

이 문제에 대하여 미국 학생들은 알고리즘에 의한 정답률이 5.0%, 직관적 사고에 의한 정답률이 0%로 나타나, 정답자 3명만이 알고리즘을 활용하여 정답을 하였다. 한국 학생들과 마찬가지로 알고리즘에 의한 오답률이 높게 나타나는 경향이 있었다.

전체적으로 문제 2번에 대하여 한국 학생들의 정답률은 42.1%를, 미국 학생들의 정답률은 5.0%를 나타내어 두 나라의 학생들 간에 정답률에서 큰 차이를 나타내었다. 이 문제도 1번 문제와 마찬가지로, 한국 학생들이 미국 학생들보다 계산 영역에서 높은 결과를 나타내었다.

문제 2의 경우에 전형적인 알고리즘에 의한 문제해결은 1에서 15까지의 수들을 직접 곱하는 과정을 통해 끝에 나타나는 0의 개수를 세는 것이었고, 직관적 수준의 문제해결은 1에서 15까지의 수중에서 5를 인수로 가지고 있는 수를 찾아 답을 한 경우였다. 오답에서는 직접 계산을 시도하였지만, 계산 결과 값이 커지면서 중도에 계산을 포기하거나, 계산과정에서 오류를 나타낸 경우가 많았다.

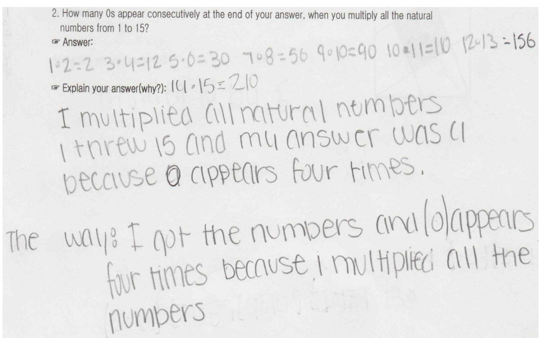


[그림 4] 한국 학생의 문제 2 응답
[Fig. 4] The Korean student's answer of pro. 2

문제 2에 대한 한국 학생들의 직관적인 문제해결의 대표적인 예시는 [그림 4]와 같다. 이 학생의 경우에는 2와 5의 곱의 결과에서 끝에 0이 나타난다는 것을 파악하

고 문제를 해결하였는데, 선행학습의 결과로 얻은 '소인수분해'라는 용어를 사용하고 있지만, 1에서 15까지의 수 중에서 5라는 인수가 들어 있는 수를 헤아려서 답을 했음을 알 수 있다.

문제 2에 대한 미국 학생의 알고리즘에 의한 문제해결의 대표적인 예시는 [그림 5]와 같다. 이 학생의 경우에는 1에서 15까지의 모든 수들을 곱하여 4개의 0이 나타난다고 오답을 하였다. 그렇지만 실제 계산 과정에서는 모든 수를 곱한 것이 아니라, 이웃하는 두 수의 곱만으로 0이 나타나는 것을 확인한 것으로 나타나, 0이 나타나는 수의 구조를 파악하기 시작한 것으로 보이며, 문제해결에서는 10을 2번에 걸쳐 계산함으로써 오류가 발생하였다.



[그림 5] 미국 학생의 문제 2 응답
[Fig. 5] The American student's answer of pro. 2

문제 1, 2번의 경우에 전체적으로 한국 학생들이 미국 학생들보다 높은 정답률을 나타내어, '수와 연산' 영역에서 한국 학생들이 나은 결과를 나타내고 있다. 그렇지만 정답자 분포에서는 전반적으로 알고리즘에 의한 해결을 시도한 비율이 높게 나타났는바, 이러한 현상은 학교교육에서 그 원인을 찾을 수 있을 것으로 판단된다. 따라서 이에 대한 추후 연구가 필요하며, 알고리즘 수준의 문제해결뿐만이 아니라 직관적 수준의 문제해결에도 관심을 가져야 할 필요성을 제기한다.

2) 문제 3, 4의 결과 분석

문제 3과 4는 '도형 및 측정' 영역에 관련된 직관적 사고에 의한 해결 가능성을 묻는 문제였다. 본 검사에서 실시한 문제 3, 4에 대한 분석 결과는 [표 5]와 같다.

[표 5] 문제 3, 4의 분석 결과
[Table 5] The result of analysis on problem 3, 4

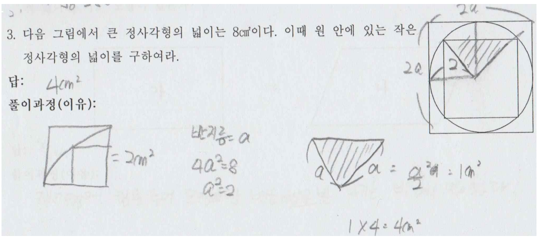
구분		정답률(%)		오답률(%)		
분석유형		알고리즘	직관적	알고리즘	전직관적	무응답
3	한	21.1	21.1	8.7	17.5	31.6
		42.1		57.9		
	미	0	28.3	0	45.0	26.7
		28.3		71.7		
4	한	0	45.6	0	22.8	31.6
		45.6		54.4		
	미	0	11.7	0	48.3	40.0
		11.7		88.3		

먼저, 문제 3에 대해서 한국 학생들은 알고리즘에 의한 정답률과 직관적 사고에 의한 정답률이 21.1%로 같게 나타났다. 이것은 '도형 및 측정' 영역의 경우에 알고리즘에 의한 시도뿐만이 아니라, 문제에 주어진 시각적인 표현이 직관적인 문제해결을 시도하도록 이끈 것으로 파악된다. 이러한 경향은 오답자의 경우에 문제에 주어진 그림을 변형하려고 시도했으나, 결론에 이르지 못한 전직관적 사고에 의한 문제해결 정도가 상당히 나타난 것에서도 유추할 수 있다. 마찬가지로, 미국 학생들은 직관적 사고에 의한 정답률이 28.3%로 나타났으며, 알고리즘에 의한 해결은 나타나지 않았다. 오답에서도 문제에 주어진 그림에서 답을 추정하려는 전직관적 사고에 의한 문제해결의 경향이 높게 나타났다.

전체적으로는 문제 2번에 대하여 한국 학생들의 정답률은 42.1%를, 미국 학생들의 정답률은 28.3%를 나타내어 두 나라의 학생들 간에 정답률에서 많은 차이를 나타내었다. '수와 연산' 영역과 마찬가지로, 이 영역의 문제에 대해서도 한국 학생들이 미국 학생들보다 높은 결과를 나타내었다.

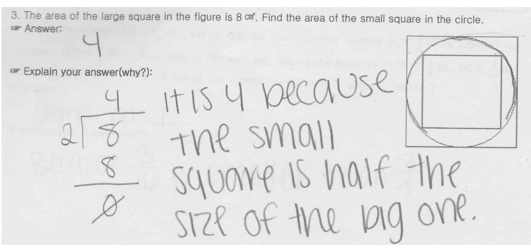
문제 3에 나타난 한국 학생들의 알고리즘에 의한 문제해결의 대표적인 예시는 [그림 6]과 같다. 이 학생의 경우와 같이 알고리즘에 의한 문제해결에서는 시각적 표현에서 넓이를 구할 수 있는 요소를 추출하여 분석적으

로 접근하여 해결하였다. 특히 [그림 6]의 경우에는 문제해결 수단으로 상급 학교의 교육내용인 제곱수의 개념을 활용한 특징이 있다.



[그림 6] 한국 학생의 문제 3 응답
[Fig. 6] The Korean student's answer of pro. 3

문제 3에 대한 미국 학생의 직관적 사고에 의한 문제해결의 대표적인 예시는 [그림 7]과 같다. 이 학생의 경우에는 그림에 나타난 정보로부터 작은 정사각형의 넓이는 큰 정사각형의 넓이의 반이라는 것을 즉각적으로 파악하여 해결한 것으로 해석할 수 있다.



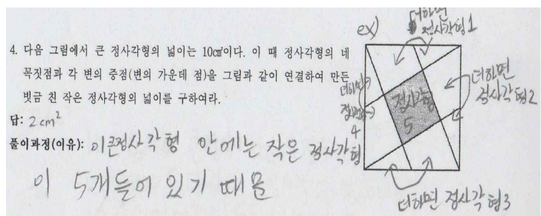
[그림 7] 미국 학생의 문제 3 응답
[Fig. 7] The American student's answer of pro. 3

다음으로 문제 4에 대해서 한국 학생들의 정답자들은 모두 직관적 사고에 의해 정답을 하였으며, 정답률은 45.6%였다. 이 문제의 경우에 알고리즘에 의한 정답자는 한 명도 발견되지 않았는데, 문제의 구조가 알고리즘 시도가 어려운 것으로 그 이유를 들 수 있다. 그리고 이것은 직관적 사고에 의한 문제해결 경험을 위한 문제 개발에서 한 가지 유형으로 제시할 수 있다는 시사점을 얻을 수 있다. 오답자의 분포에서도 문제에 주어진 그림을 변형하려고 시도했으나, 결론에 이르지 못한 전직관적 사고에 의한 문제해결 정도가 높게 나타났으며, 무응답의 비율도 높게 나타났다.

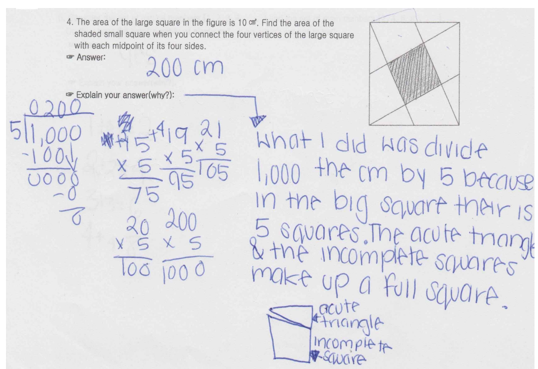
이 문제에 대하여 미국 학생들은 직관적 사고에 의한 정답률이 11.7%로 나타났으며, 알고리즘에 의해 해결을 한 학생은 나타나지 않았다. 오답에서도 문제에 주어진 그림에서 답을 추정하려는 전직관적 사고에 의한 문제해결의 경향이 높게 나타났다.

전체적으로는 문제 2번에 대하여 한국 학생들의 정답률은 42.1%를, 미국 학생들의 정답률은 11.7%를 나타내어, 두 나라 학생들 간에 정답률에서 큰 차이를 나타내었다. 3번 문제와 마찬가지로, 이 영역의 문제에 대해서도 한국 학생들이 미국 학생들보다 높은 결과를 나타내었다.

문제 4에 대해 한국 학생이 제시한 직관적 사고에 의한 정답의 예시는 [그림 8]과 같다. 이 학생의 경우에는 정사각형의 내부에 나누어진 영역을 재구성함으로써 빗금 친 부분의 넓이가 큰 정사각형의 5분의 1이 됨을 즉각적으로 발견했음을 알 수 있다.



[그림 8] 한국 학생의 문제 4 응답
[Fig. 8] The Korean student's answer of pro. 4



[그림 9] 미국 학생의 문제 4 응답
[Fig. 9] The American student's answer of pro. 4

문제 4에 대한 미국 학생의 직관적 사고에 의한 문제해결의 대표적인 예시는 [그림 9]와 같다. 이 학생의 경우에는 큰 정사각형의 넓이를 1000으로 제시하여 계산에서는 오류를 보이고 있지만, 완전하지 않은 정사각형(Incomplete square)에 예각삼각형(acute triangle)을 붙임으로써 완전한 정사각형(full square)으로 만들 수 있다는 것에 착안하여 문제를 해결했음을 알 수 있다.

문제 3, 4번의 경우에 전체적으로 한국 학생들이 미국 학생들보다 높은 정답률을 나타내어, '도형 및 측정' 영역에서 한국 학생들이 더 나은 결과를 나타내고 있다. 그리고 응답자 분포에서는 직관적 사고에 의한 문제해결을 시도한 비율이 전반적으로 높게 나타났다. 이것은 문제의 구조에 따라 알고리즘에 의한 해결뿐만이 아니라, 직관적 사고에 의한 문제해결 지도의 가능성과 직관적 사고 교육의 방향을 제기한다.

3. 반직관적 사고에 의한 문제해결 결과 분석

이 절에서는 반직관적 사고에 의한 학생들의 문제해결 방법을 비교・분석하였다. 비교・분석에서는 두 나라 학생들의 문제해결 방법에 따른 정답률을 비교하고, 각 나라의 문제해결에서 나타난 특징을 분석하였다. 또한 분석에서는 유사한 내용의 범주에 속하는 두 문제를 함께 연관 지어 분석하였다.

1) 문제 5, 6의 결과 분석

본 검사에서 실시한 문제 5, 6에 대한 분석 결과는 [표 6]과 같다. 특히 문제 5와 6은 무한 개념과 관련된 반직관적 사고에 의해 해결 가능성을 묻는 문제였다.

문제 5의 경우에 한국 학생들의 정답자들은 알고리즘에 의한 해결에서 3.5%와 직관적 사고에 의한 해결에서 5.3%로 아주 낮은 정답률을 보였다. 반면에 오답률은 높게 나타났는데, 분수의 연산과 관련된 이 문제의 경우에 학생들은 알고리즘을 활용하여 계산이 가능한 일부분까지의 계산에서 얻은 결과를 바탕으로 선분들의 합이 1보다 작다고 답을 하거나, 계속 작아지는 분수를 더할지라도 1에는 미치지 못할 것이라는 잠재적 무한 개념에 의존하여 답을 한 경우의 비율이 높게 나타났다.

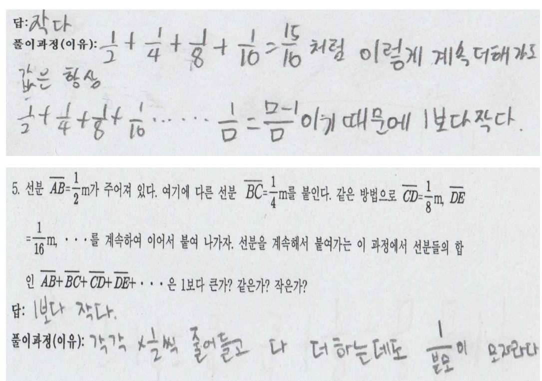
이 문제에 대하여 미국 학생들은 단 1명만이 직관적 사고에 의해 정답을 하였으며, 알고리즘에 의해 일부분까지 계산을 하다가 1보다 작다고 판단하거나, 무응답을 한 비율이 높게 나타났다. 전체적으로 문제 5번 문제의 경우에 두 나라 모두에서 낮은 정답률을 나타냈으며, 오답에서도 알고리즘에 의한 해결을 시도한 학생의 비율이 높게 나타났다.

[표 6] 문제 5, 6의 분석 결과

[Table 6] The result of analysis on problem 6, 7

구분		정답률(%)		오답률(%)		
분석 유형		알고리즘	직관적	알고리즘	반직관적	무응답
5	한	3.5	5.3	54.4	26.3	10.5
		8.8		91.2		
	미	0	1.7	36.7	10.0	51.6
		1.7		98.3		
6	한	0	15.8	0	80.7	3.5
		15.8		84.2		
	미	0	5.0	0	45.0	50.0
		5.0		95.0		

구체적으로 문제 5의 한국의 정답자 중에서 알고리즘에 의한 해결자 2명은 실 무한 개념을 이용하여 계산을 하여 답을 한 경우였고, 직관적 수준에 의한 해결자 3명은 분수 띠를 붙이는 과정을 계속 해나가면 1일 될 것이란 추측으로 답을 한 경우였다.

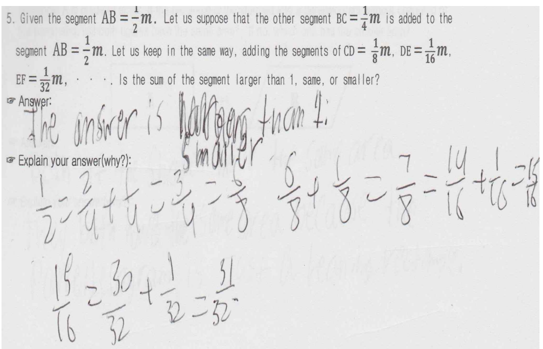


[그림 10] 한국 학생의 문제 5 응답

[Fig. 10] The Korean student's answer of pro. 5

문제 5에 나타난 한국 학생들의 알고리즘에 의한 문제해결과 전형적인 반직관적인 문제해결의 대표적인 예시는 [그림 10]과 같다. 오답자들은 알고리즘에 의해 분수들을 계속 더하는 과정을 몇 단계 시행하고, 그 결과에서 분자가 항상 분모보다 1이 부족하다는 사실을 기반으로 결과가 1보다 작다고 답을 하거나, [그림 10]과 같이 작아지는 분수를 계속 더하더라도 결국에는 1에 미치지 못할 것이라는 반직관적 사고에 의해 답을 한 경우가 나타났다.

문제 5에 대한 미국 학생의 알고리즘에 의한 문제해결의 대표적인 예시는 [그림 11]과 같다. 이 학생의 경우에는 계속해서 붙여지는 선분의 길이인 분수를 순차적으로 더하여 통분함으로써 결과가 1보다 작다는 것으로 답을 했음을 알 수 있다.

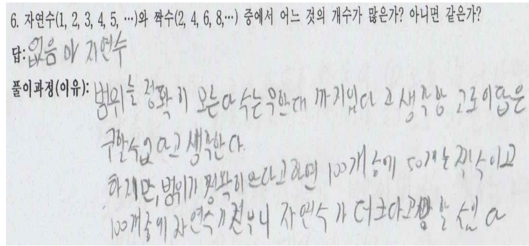


[그림 11] 미국 학생의 문제 5 응답

[Fig. 11] The American student's answer of pro. 5

다음으로 자연수와 짝수의 개수에 대해 묻는 문제 6의 경우에 한국 학생들의 정답자들은 15.8% 모두 직관적 사고에 의한 해결을 통해 정답을 하였지만, 그 비율은 낮았다. 반면에 오답률이 높게 나타났는데, 무한 개념의 경우에 유한에서 성립하는 성질을 무한으로 확장하여 적용하려는 직관의 외삽성의 특징에 강하게 귀속되어 있는 것으로 나타났다.

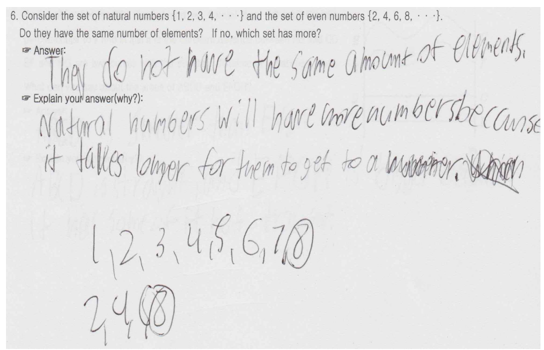
한편, 검사 대상 학생들은 잠재적 무한 개념에 종속되어 있지만, [그림 12]에 나타난 학생의 반응과 같이 잠재적 무한 개념에서 실 무한 개념으로 점진적으로 전이의 과정을 겪고 있는 것도 나타났다.



[그림 12] 한국 학생의 문제 6 응답

[Fig. 12] The Korean student's answer of pro. 6

이 문제에 대하여 미국 학생들은 3명만이 직관적 사고에 의해 정답을 하여 5.0%의 정답률을 보였으며, 반직관적 사고에 의한 문제해결과 무응답의 비율이 높게 나타났다.



[그림 13] 미국 학생의 문제 6 응답

[Fig. 13] The American student's answer of pro. 6

문제 6에 대한 미국 학생의 반직관적 사고에 의한 문제해결의 대표적인 예시는 [그림 13]과 같다. 이 학생의 경우에는 8까지의 자연수와 짝수의 경우를 예로 하여 자연수의 개수가 짝수의 개수보다 많다고 판단하여, 유한에서 성립하는 성질을 무한의 경우로 외삽한 전형적인 예에 해당이 된다.

전체적으로 문제 5, 6번의 경우에 두 나라 학생들 모두 낮은 정답률을 나타내어 무한 개념의 경우에 잠재적 무한 개념에 종속되어 있음을 알 수 있었다. 이 문제에서도 알고리즘이 적용 가능한 문제 5에서는 알고리즘에 의한 해결을 시도한 비율이 높게 나타났으며, 미국 학생들의 무응답의 높은 비율은 과제집착력과 모험심, 자신

감과 독립심과 같이 주어진 문제를 끝까지 해결해 내려는 문제해결에서 ‘태도’의 중요성을 시사한다.

2) 문제 7, 8의 결과 분석

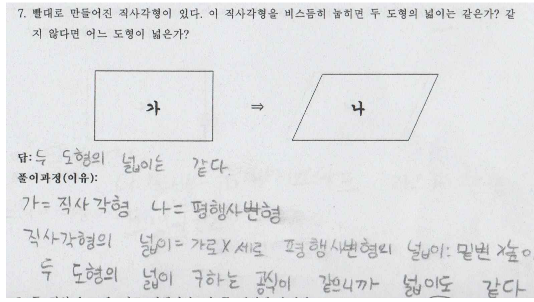
본 검사에서 실시한 문제 7, 8에 대한 분석 결과는 [표 7]과 같다. 문제 7와 8은 특정 요소에 치중함으로써 문제해결에 영향을 주는 다른 요소에 대한 고찰을 놓치게 되는 직관의 전체성의 영향에 대하여, ‘도형 및 측정’ 영역과 관련된 반직관적 사고에 의해 해결 가능성을 묻는 문제였다.

[표 7] 문제 7, 8의 분석 결과
[Table 7] The result of analysis on problem 7, 8

구분		정답률(%)		오답률(%)		
분석 유형		알고리즘	직관적	알고리즘	반직관적	무응답
7	한	0	1.7	0	98.3	0
		1.7		98.3		
	미	0	5.0	0	63.3	31.7
		5.0		95.0		
8	한	0	43.9	0	35.1	21.0
		43.9		56.1		
	미	0	16.7	0	35.0	48.3
		16.7		83.3		

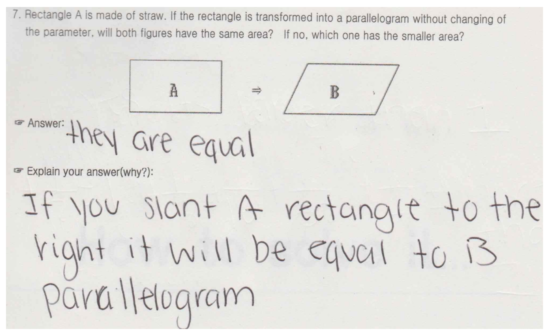
둘레의 길이가 같은 직사각형과 평행사변형의 넓이를 비교하는 문제 7의 경우에 한국 학생들의 정답률은 직관적 사고에 의한 정답률이 1,7%였고, 알고리즘에 의한 정답자는 한 명도 없었다. 반면에 오답률은 반직관적 사고의 영향에 의해 98.3%로 아주 높게 나타났다. 한국 학생들의 정답자 한 명은 도형을 변형하는 과정에서 모양이 바뀜에 따라 넓이를 구하는 요소에도 변화가 일어난다는 것을 즉각적으로 발견한 경우였다.

그렇지만 나머지 모든 학생들은 [그림 14]와 같이 둘레의 길이가 일정하다는 것과 이에 따라 도형의 넓이를 구하는 요소도 변화가 없을 것이라는 반직관적인 사고에 의해 오답을 하였다



[그림 14] 한국 학생의 문제 7 응답
[Fig. 14] The Korean student’s answer of pro. 7

이 문제에 대하여 미국 학생들의 정답률은 직관적 사고에 의한 정답률이 5.0%였고, 알고리즘에 의한 정답자는 한 명도 없었다. 반면에 오답에서는 반직관적 사고의 영향에 의한 오답률이 63.3%, 무응답에 의한 오답률이 31.7%로 아주 높게 나타났다.



[그림 15] 미국 학생의 문제 7 응답
[Fig. 15] The American student’s answer of pro. 7

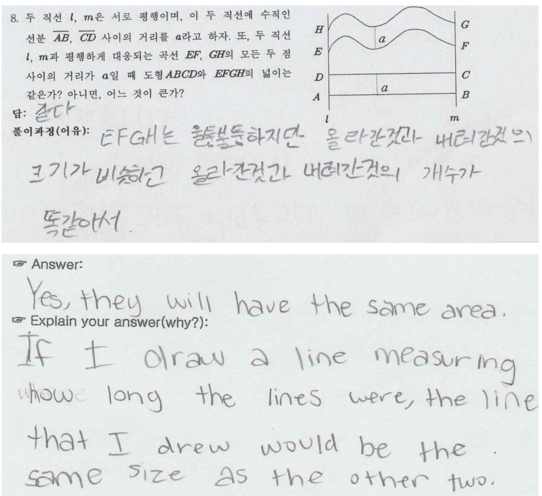
문제 7에 대한 미국 학생의 반직관적 사고에 의한 문제해결의 대표적인 예시는 [그림 15]와 같다. 이 학생의 경우에도 앞에서 예시한 한국 학생의 경우와 마찬가지로, 직사각형을 오른쪽으로 기울이면 평행사변형과 같게 되므로 넓이가 같다고 판단하는 전형적인 반직관적 사고에 의한 문제해결 정도를 나타내었다.

다음으로 문제 8은 특정 요소(둘레의 길이)에 치중함으로써 문제해결에 오류를 일으키는 직관의 전체성에 대한 문제였다. 한국 학생들의 정답자들은 모두 직관적 사고에 의한 정답이었으며, 정답률은 43.9%를 나타내었다.

그리고 오답을 한 학생들은 반직관적 사고에 의한 오답률이 35.1%, 무응답이 21.0%였다.

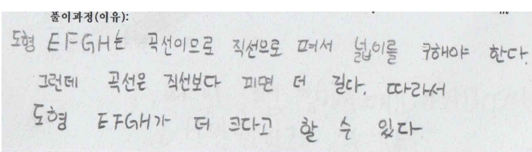
또한 미국 학생들의 정답자들도 16.7% 모두 직관적 사고에 의한 정답이었으며, 정답률은 한국 학생들에 비해 낮게 나타났다. 오답에서도 반직관적 사고의 영향에 의한 오답률이 35.0%, 무응답에 의한 오답률이 48.3%로 아주 높게 나타났다.

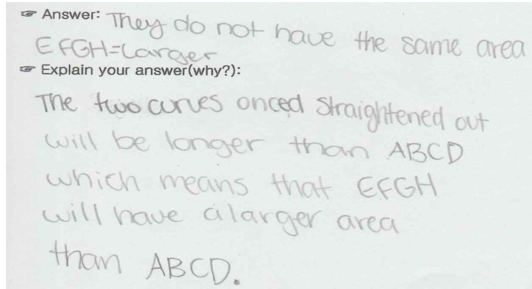
직관적 사고에 의한 한국과 미국의 정답자들의 응답은 [그림 16]과 같이 등적 변형의 개념을 적용하여 답을 한 경우였다.



[그림 16] 한국과 미국 학생의 문제 8 응답
[Fig. 16] The Korean and American student's answer of pro. 8

오답의 대표적인 예로는 [그림 17]과 같이, 곡선으로 된 도형을 펴면 가로의 길이가 더 길어지게 되므로 곡선으로 구성된 도형의 넓이가 더 넓다고 판단한 전형적인 반직관적 사고에 의한 문제해결의 경우를 들 수 있다.





[그림 17] 한국과 미국 학생의 문제 8 응답
[Fig. 17] The Korean and American student's answer of pro. 8

전체적으로 문제 7, 8번의 경우에 두 나라 학생들 모두 낮은 정답률을 나타내어, 문제의 특정 요소에 치중함으로써 문제해결에 영향을 주는 다른 요소에 대한 고찰을 놓치게 되는 직관의 전체성의 영향을 강하게 받고 있음을 알 수 있었다.

3. 논의

이 절에서는 본 조사연구를 통해 얻은 직관적 사고에 의한 문제해결 결과를 바탕으로 수학 문제해결 교육에 대한 논점을 제시하고자 한다.

첫째, 본 연구에서 직관적 사고에 의한 문제해결 정도를 파악하기 위한 1-4번 문제에 대한 한국 학생들의 평균 정답률은 48.2%를, 미국 학생들의 평균 정답률은 12.5%를 나타내어 한국 학생들이 모든 문제에서 높은 정답률을 나타내었다. 또한 반직관적 사고에 의한 문제해결 정도를 파악하기 위한 5-8번 문제에 대한 한국 학생들의 평균 정답률은 17.5%를, 미국 학생들의 평균 정답률도 7.1%로 나타내어 한국 학생들이 전반적으로 높은 정답률을 나타내었다. 이러한 결과는 연구 대상 학생들이 두 나라의 모든 학생들을 대표할 수 없다는 한계를 가지고 있지만, 직관적 사고에 의한 문제해결의 정도와 방법에 대하여 교육 문화와 환경이 다른 두 나라 학생들의 경향을 보여 준다. 그리고 두 나라 학생들 간의 차이는 학년 수준은 다르지만, 여러 국제비교 연구에서 나타나는 한국과 미국 학생들의 결과 차이와도 유사하다. 이에 덧붙여 문제해결에 나타난 두 나라 학생들의 유사함과 차이점은 수학 문제해결과 관련된 여러 요소들에 대

하여 교육문화와 환경이 다른 학생들 간의 비교·분석 연구의 필요성을 제기한다. 본 연구에서도 반직관적 사고의 영향을 받는 문제에서 두 나라 학생들은 교육 상황이나 문화가 다르지만, 유사한 결과를 나타내었다. 이러한 경향은 학생들에게서 나타날 수 있는 전형적인 '오류'로, 교육 현장에서 예측 가능한 현상임을 말해준다.

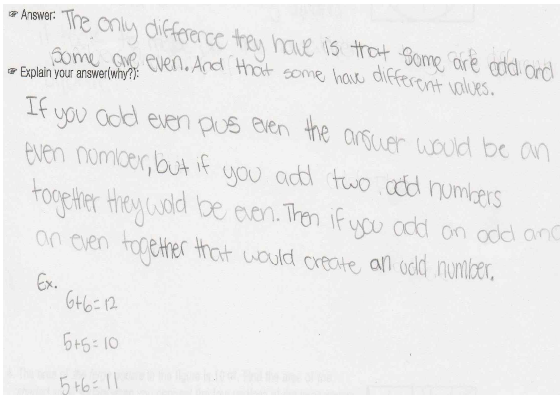
둘째, 직관적 사고에 의한 문제해결이 알고리즘에 의한 해결보다 쉽고 간편한 문제의 경우에 '수와 연산' 영역에서 한국 학생들이 더 나은 결과를 나타내었다. 그렇지만 정답자의 분포에서는 전반적으로 알고리즘에 의한 해결을 시도한 정답자의 비율이 높게 나타났는바, 이러한 현상은 학교교육에서 그 원인을 찾을 수 있을 것으로 판단된다. 따라서 이에 대한 추후 연구의 필요성을 제기한다. 또한 '도형 및 측정' 영역에서 직관적 사고에 의한 문제해결을 시도한 비율이 전반적으로 높게 나타났는데, 이것은 문제의 구조에 따라 직관적 사고에 의한 문제해결의 시도가 증가한 것으로 직관적 사고 교육과 직관적 사고에 의한 문제해결 교육의 방향을 제기한다. 한편, 반직관적 사고에 의한 영향을 파악하기 위한 문제해결에서 두 나라 학생들 모두 낮은 정답률을 나타내어 잠재적 무한 개념의 영향과 직관의 특성이 교육의 환경과 문화에 관계없이 문제해결자의 사고 과정에 강하게 작용함을 알 수 있었다.

셋째, 수학 문제를 해결하는 과정에서는 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 적용하여 문제를 해결하게 된다. 그리고 그러한 도구들은 즉각적으로 떠오르는 아이디어로 나타나 문제에 적용되거나, 문제를 면밀히 분석한 결과로 획득한 아이디어에 기초하여 적용하게 된다. 그렇지만, 동일한 아이디어일지라도 문제의 조건에 따라 성공과 실패를 초래하게 된다. 본 연구에서도 도형의 넓이를 구하기 위해 이용되는 '등적변형'의 개념의 경우에, 7번과 8번 문제에 동일하게 적용되었을 경우에 상이한 결과가 나타났다. 따라서 문제해결 과정에서는 그 해결의 과정이 논리적이든 직관적이든 해결과정에 대한 모니터의 과정이 요구된다. 이 경우에 문제해결의 과정을 검토하는 반성의 과정을 가지는 것과 메타인지 활동은 많은 문제해결 문헌에서 제시하듯이, 문제해결 과정에서 나타날 수 있는 실수를 줄이기 위한 필수적인 요소이다. 특히 직관적 사고에 의한 문제해결에서는 즉각적인 판단에 '과신'이 내재되기 때문에, 과신을 극복하기 위하여 체계적으로 메타인지 활동을 수행할 수 있는 교수학적 방안을 마련해야 할 것이다.

넷째, 본 연구에서는 연구 목적이 한국과 미국 학생들의 직관적 사고에 의한 문제해결 정도와 경향을 파악하기 위한 것이므로 설문지를 활용하여 연구를 실시하였다. 따라서 문제해결 과정에서 학생들의 직관적 사고의 발현 과정에 대한 심층적인 정보를 파악하는 데에는 한계가 있었다. 직관적 사고의 특성 상, 그 발현 과정과 사고의 발현에 필요한 여건이나 조건 등에 대해서는 파악하기에 어려운 면이 있고, 그러기에 연구가들은 자서전적 경험에 의존하여 직관적 사고의 발현 과정을 제시하고도 있는 것이다. 따라서 추후에 직관적 사고의 발현 과정을 파악할 수 있는 여러 가지 연구 기법을 마련할 필요가 있으며, 사례연구를 통한 think aloud 방법이나 면담 등도 그 대안이 될 수 있을 것이다.

다섯째, 본 연구에서 얻은 부가적인 것으로 수학교육에서 이용되는 용어의 문제를 고려할 필요가 있다. 우리나라의 경우에 '닮음'과 같이, 수학에서 이용되는 용어와 일상에서 이용되는 용어의 차이로 인해 수학학습에 어려움을 나타내기도 한다. 이런 상황은 영어권에서도 유사하게 발생하기도 한다(Chapin, O'Connor, & Anderson, 2013). 본 연구에서는 8문제로 구성된 질문지를 한국어로 제작한 후에, 영어권 연구 대상자들을 위해 영어로 번역하여 사용하였다. 그 과정에서는 초·중등 수학교사를 양성하는 수학교육 전공 학과의 영어권 수학교육 전문가와의 협의를 통해 영문 검사지를 최대한 동일하게 제작하였다. 예를 들어 본 검사지의 1번 문제의 경우에 한국어로는 '1에서 100까지의 자연수가 있다. 이 수들에 있는 모든 짝수의 합에서 모든 홀수의 합을 뺀 값을 구하여라.'를 영문으로는 'Consider the natural numbers 1~100. What is the difference between the sum of all of the even numbers and the sum of all of the odd numbers?'로 번역하였다. 이 경우에 두 수의 '차이(difference)'라는 단어는 수학적으로 '하나의 수에서 다른 수를 뺄 때 얻는 값'을 나타내지만, '차이'는 비유사성, 의견의 불일치, 구별처럼 비수학적인 의미도 가지고 있다. 수학 문제해결에서 '차이(difference)'는 전자로 해석해야 하고, 모든 수학 영어 교과서에서 그렇게 표현하

고 있음에도 불구하고, 본 연구에 참여한 학생들은 [그림 18]과 같이, 후자로 해석하여 답을 한 경우가 있었다.



[그림 18] 미국 학생의 문제 1 응답
[Fig. 18] The American student's answer of pro. 1

이러한 경향은 수학 문제해결에서 용어 문제를 고려할 필요를 제기한다. 특히 수학에서 다루는 용어는 일상적인 언어와 달리, 엄밀한 정의를 사용하기 때문에 용어 대해 학생들이 깊은 이해를 하지 못하면, 이는 수학 문제해결에 많은 영향을 끼치게 된다(Chapin, O'Connor, & Anderson, 2013). 용어의 중요성에 비추어, 그간의 수학교육 현장에서 교사들은 용어의 문제를 크게 중요하게 다루지 못하였다. 따라서 '수학 말하기'와 같은 교실 활동을 통해 수학적인 용어와 일상적인 용어와의 차이를 명확히 인식하게 하는 것과 같은 교육 방안을 모색할 필요가 있다.

Ⅵ. 결론 및 제언

학교수학의 중요한 목표로 학생들의 수학 문제해결력의 신장을 들 수 있는바, 이를 위해서 학생들은 다양한 사고 능력을 발휘하여 여러 가지 방법으로 문제를 해결하는 것이 필요하다. 특히 종전의 수학 문제해결 지도의 관점이 학교 수학의 전개 방법과 유사하게 알고리즘을 활용한 논리적 해결 방법에 치중해 있다는 면에서 개선의 필요성이 제기된다. 우리나라 교육과정(교육과학기술부, 2011)뿐만이 아니라, 여러 문헌에서도 직관적 사고에 의한 수학학습과 문제해결의 중요성을 강조하는 측면을 고려할 때 직관적 사고에 의한 수학 문제해결에 관심을 가지는 것은 당연한 결론이다.

많은 학자들이 직관은 천부적으로 갖고 태어나는 능력이고 교육을 통해 신장 가능하다는 사실(Burton, 1999; Fischbein, 1982; Wilder, 1967)에 비추어 학생들이 직관적 사고를 활용한 문제해결에 어느 정도의 능력을 갖추고 있는가를 파악하는 것이 필요하다. 또한 교육 환경과 문화가 다른 학생들의 경우에 이러한 능력을 동일하게 실시하여 결과를 분석해 보는 것은 선천적인 능력으로서 얻는 직관에 대한 영향과 직관적 사고에 의한 교육과 문제해결에 시사점을 얻을 수 있다는 것에서 필요성을 얻을 수 있다.

이에 본 연구에서는 한국과 미국의 6학년 학생들을 대상으로 직관적 사고에 의한 문제해결을 묻는 검사지를 활용하여 연구를 실시하였다. 검사 문제는 '수와 연산'과 '도형 및 측정'에 관한 내용으로, 직관적 사고에 의한 문제해결과 반직관적 사고에 의한 문제해결 정도를 파악하기 위한 문제로 구성되었다. 결과 분석에서는 먼저 정답률을 파악하고, 문제해결 과정에 활용한 풀이 내용을 범주화하여 분석하였다.

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다. 직관적 사고에 의한 문제해결과 반직관적 사고에 의한 문제해결 정도를 분석한 결과, 한국 학생들이 전반적으로 높은 정답률을 나타내었다. 구체적으로 직관적 사고에 의한 문제해결에서는 한국 학생들이 전반적으로 알고리즘에 의한 해결을 시도한 정답자의 비율이 높게 나타났다. 또한 도형 및 측정 영역에서 두 나라 모두 직관적 사고에 의한 문제해결을 시도한 비율이 전반적으로 높게 나타났는데, 이것은 직관적 사고 교육과 직관적 사고에 의한 문제해결 교육의 방향으로 문제의 구조에 따른 문제해결 경험의 필요성을 제기한다. 반직관적 사고에 의한 영향을 파악하기 위한 문제해결에서 두 나라 학생들 모두 낮은 정답률을 나타내어 교육의 환경과 문화에 관계없이 잠재적 무한 개념에 치중되어 있었고, 즉각적인 문제해결 과정에서는 직관의 특성이 문제해결에 강하게 작용하여 영향을 끼침을 알 수 있었다.

마지막으로 본 연구를 바탕으로 다음과 같은 추후 연구를 제언한다. 본 연구에서는 직관적 사고에 의한 한국

과 미국 학생들의 문제해결 과정을 분석하기 위하여 질문지를 활용한 연구 방법을 활용하였고, 답에 대한 이유를 기술하도록 하여 사고과정을 파악하였다. 이에 더하여 학생들의 답에 대한 심층적인 사고의 과정을 수집하기 위해서는 면담 과정이나 소수의 사례를 대상으로 한 Think aloud 방법을 적용할 필요가 있다. 본 연구에서는 분석틀에 의해 분포 상황을 파악하는 데에는 적합하지만, 면담이나 사례 연구 등은 그러한 응답에 대한 배경지식, 사고 과정, 문제해결 경험 등에 대한 변인이 미치는 효과를 파악할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강미광 (2008). 무한 개념의 지도방안과 활용 예제-중학교 교육과정을 중심으로-. 수학교육 47(4), 447-465.

Kang, M. K. (2008). A Study on the instruction of the Infinity Concept with suitable examples-focused on Curriculum of Middle School-. *The Mathematical Education 47*(4), 447-465.

경익선(역) (1997). 산수 100가지 난문・기문. 서울: 전파과학사.

Kyeong, I. S.(Trans.) (1997). *100 Difficult, Curious Problems in Arithmetic*. Seoul. Jenpagwahaksa.

교육공학사전 편찬위원회 (1972). 교육공학사전. 서울: 시청각교육사.

Dictionary Compilation Committee of Educational Technology(1972). *Dictionary of Educational Technology*. Seoul: Sicheonggakgyoyooksa.

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부.

The Ministry of Education, Science and Technology(2011). *Mathematics Curriculum*. Seoul: M.E.S.T.

김수진, 동효관, 박지현, 김지영, 진의남 (2013). TIMSS 2011 결과에 따른 수학・과학 교육 현황 국제비교. 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2013-7-2.

Kim, S. J., Dong, H. K., Park, J. H., Kim, J. Y., & Jin, E. N. (2013). *International Comparative Analysis of Mathematics and Science Education Status in TIMSS 2011.* KICE Research Report RRE 2013-7-2.

송미영, 김성숙, 구자옥, 임해미, 박혜영, 한정아, 손수경, 양서영 (2014). PISA 2012 주요 결과: 수학·읽기·과학·문제해결력. 한국교육과정평가원 홍보자료 PIM 2014-12.

Song, M. Y., Kim, S. S., Goo, J. O., Im, H. M., Park, H. Y., Han, J. A., Son, S. K., & Yang, S. Y. (2014). *PISA Main Result: Mathematics, Reading, Science, Problem solving ability*. KICE PR Resource PIM 2014-12.

신현용, 이경언 (2010). 무한에 대한 인식이 수학에 미치는 영향. 수학교육 49(2), 259-265.

Shin, H. Y., & Lee, K. E. (2010). Effect on Infinity Perception on Mathematics. *The Mathematical Education 49*(2), 259-265.

이대현 (2001). 무한 개념의 이해와 직관의 역할. 수학교육학연구 11(2), 341-349.

Lee, D. H. (2001). Understanding of the concept of infinity and the role of intuition. *The Journal of Educational Research in Mathematics 11*(2), 341-349.

이대현 (2006).직관의 즉각성 요인과 효과에 대한 고찰. 수학교육 45(3), 263-273.

Lee, D. H. (2006). A Study on the Factors and Effects of Immediacy in Intuition. *Mathematics Education 45*(3), 263-273.

이대현 (2010). 초등학생들의 문제해결 과정에서 직관의 특징에 의한 영향 분석. 한국초등수학교육학회지 14(2), 197-215.

Lee, D. H. (2010). An Analysis on the Effect by the Characteristics of Intuition of Elementary Students in Mathematical Problem Solving Process. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 14*(2), 197-215.

이대현 (2014). 직관적 수준에서 초등 예비교사들의 문제해결 과정 분석. 학교수학 16(4), 691-708.

Lee, D. H. (2014). An Analysis on the Elementary Preservice Teachers' Problem Solving Process in Intuitive Stages. *School Mathematics 16*(4), 691-708.

이대현, 최승현(2011). 문제해결을 통한 수학적 경험. 서울: 경문사.

Lee, D. H. & Choi, S. H. (2006). The *Mathematical Experience via Problem Solving*. Seoul: Kyungmoonsa.

한명수(역) (1994). 수학 퍼즐 랜드. 서울: 전파과학사.

Han, Y. S.(Trans.) (1994). *Mathematics Puzzle Land*. Seoul: Jenpagwahaksa.

Burton, L. (1999). Why is Intuition so important to mathematicians but missing from mathematics education?. *For the Learning of Mathematics*, 19(3), 27-32.

Chapin, S. H., O'Connor, C., & Anderson, N. C. (2013). *Classroom Discussions in Math: A Teacher's Guide for Using Talk Moves to Support the Common Core and More* (3rd ed.). Ca: Scholastic Inc.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics 3*(2), 9-18.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. D. Reidel publishing company.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics 10*, 3-40.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics 12*, 491-512.

Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field.* Priceton university press, Princeton.

Janvier, C. (1981). Use of Situations in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 113-122.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. The University of Chicago Press.

Poincaré, H. (1908). *Science et Méthode.* 김형보, 오병승(공역) (1982). 과학의 방법. 서울: 단대출판부.

Wilder, R. L. (1967). The Role of intuition, *Science, New Series 156*(3775), 605-610.

An Analysis on the Mathematical Problem Solving via Intuitive Thinking of the Korean and American 6th Grade Students

Lee, Dae Hyun

Department of Mathematics Education, Gwangju National University of Education,
55 Pilmundaero, Buk-ku, Gwangju 61204, Korea.
E-mail: leedh@gnue.ac.kr

This research examined the Korean and American 6th grade students' mathematical problem solving ability and methods via an intuitive thinking. For this, the survey research was used. The researcher developed the questionnaire which consists of problems with intuitive and algorithmic problem solving in number and operation, figure and measurement areas. 57 Korean 6th grade students and 60 American 6th grade students participated.

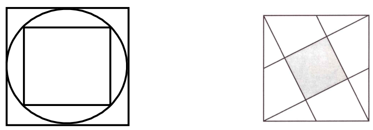
The result of the analysis showed that Korean students revealed a higher percentage than American students in correct answers. But it was higher in the rate of Korean students attempted to use the algorithm. Two countries' students revealed higher rates in that they tried to solve the problems using intuitive thinking in geometry and measurement areas. Students in both countries showed the lower percentages of correct answer in problem solving to identify the impact of counterintuitive thinking. They were affected by potential infinity concept and the character of intuition in the problem solving process regardless of the educational environments and cultures.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Problem solving, Intuition, Intuitive Thinking, Logical Thinking, Algorithm, Counter-intuitive solving, Pre-intuitive solving, Intuitive solving

<부록> 한글 검사지

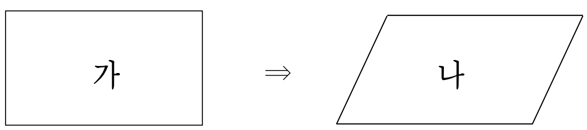
□ 본 검사는 여러분이 선호하는 문제해결 방법을 파악하기 위한 것입니다. 문제를 읽고, 여러분이 사용한 문제해결 방법에 따른 '답'과 '답에 대한 이유(풀이과정)'를 자세히 기술해 주시기 바랍니다. 본 검사 결과는 연구 자료로만 활용됩니다. 검사에 응해 주셔서 감사합니다.

1. 1에서 100까지의 자연수가 있다. 이 수들에 있는 모든 짝수의 합에서 모든 홀수의 합을 뺀 값을 구하여라.
   답: 풀이과정(이유):
2. 1에서 15까지의 수를 모두 곱하였을 때 끝에 연달아 나타나는 0의 개수를 구하여라.
3. 다음 (그림 1)에서 큰 정사각형의 넓이는 8㎠이다. 이때 원 안에 있는 작은 정사각형의 넓이를 구하여라.
4. 다음 (그림 2)에서 큰 정사각형의 넓이는 10㎠이다. 이 때 정사각형의 네 꼭짓점과 각 변의 중점(변의 가운데 점)을 그림과 같이 연결하여 만든 빗금 친 작은 정사각형의 넓이를 구하여라.



(그림 1) (그림 2)

5. 선분 $\overline{AB}=\frac{1}{2}$m가 주어져 있다. 여기에 다른 선분 $\overline{BC}=\frac{1}{4}$m를 붙인다. 같은 방법으로 $\overline{CD}=\frac{1}{8}$m, $\overline{DE}=\frac{1}{16}$m, ···를 계속하여 이어서 붙여 나가자. 선분을 계속해서 붙여가는 이 과정에서 선분들의 합인 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\cdots$ 은 1보다 큰가? 같은가? 작은가?
6. 자연수(1, 2, 3, 4, 5, …)와 짝수(2, 4, 6, 8,…) 중에서 어느 것의 개수가 많은가? 아니면 같은가?
7. 빨대로 만들어진 직사각형이 있다. 이 직사각형을 비스듬히 눕히면 두 도형의 넓이는 같은가? 같지 않다면 어느 도형이 넓은가?



8. 두 직선 l, m은 서로 평행이며, 이 두 직선에 수직인 선분 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 사이의 거리를 a라고 하자. 또, 두 직선 l, m과 평행하게 대응되는 곡선 EF, GH의 모든 두 점 사이의 거리가 a일 때 도형$ABCD$와 $EFGH$의 넓이는 같은가? 아니면, 어느 것이 큰가?