한국경영과학회지
제41권 제3호
2016년 8월
http://dx.doi.org/10.7737/JKORMS.2016.41.3.023

명중률의 불확실성을 고려한 추계학적 무장-표적 할당 문제*

이진호[1†] · 신명인[2]
[1]해군사관학교 국방경영학과, [2]해군사관학교 수학과

Stochastic Weapon Target Assignment Problem under Uncertainty in Targeting Accuracy

Jinho Lee[1†] · Myoungin Shin[2]
[1]Department of National Defense Management, Korea Naval Academy
[2]Department of Mathematics, Korea Naval Academy

■ Abstract ■

We consider a model that minimizes the total cost incurred by assigning available weapons to existing targets in order to reduce enemy threats, which is called the weapon target assignment problem (WTAP). This study addresses the stochastic versions of WTAP, in which data, such as the probability of destroying a target, are given randomly (i.e., data are identified with certain probability distributions). For each type of random data or parameter, we provide a stochastic optimization model on the basis of the expected value or scenario enumeration. In particular, when the probabilities of destroying targets depending on weapons are stochastic, we present a stochastic programming formulation with a simple recourse. We show that the stochastic model can be transformed into a deterministic equivalent mixed integer programming model under a certain discrete probability distribution of randomness. We solve the stochastic model to obtain an optimal solution via the mixed integer programming model and compare this solution with that of the deterministic model.

Keywords : Stochastic Weapon-Target Assignment Problem, Stochastic Program, Mixed Integer Program, Simple Recourse

논문접수일 : 2016년 03월 16일 논문게재확정일 : 2016년 05월 27일
논문수정일(1차 : 2016년 05월 18일)
* 본 연구는 2013년 한국경영과학회 추계학술대회 발표논문을 수정·보완하여 작성되었으며, 해군사관학교 해양연구소의 2016년도 학술연구과제 연구비 지원을 받아 수행되었습니다.
† 교신저자, jinholee@navy.ac.kr

1. 서 론

무장-표적 할당 문제(Weapon-Target Assignment Problem)는 국방 경영과학 분야에서 최근 수십 년간 많은 관심을 받아온 문제 중 하나로써 제한된 무기체계, 무장 등의 자원을 이용하여 적의 공격 또는 위협을 무력화하기 위하여 주어진 자원을 표적에 효과적으로 할당하는 최적화 모형이다. 경영과학에서 최적화 문제는 결정변수를 정의하고 제약조건을 만족하면서 목적함수를 최대화 또는 최소화하는 결정변수의 값을 정하는 것이라 할 수 있다. 여기서 최적화는 크게 두 가지로 분류가 가능한데, 첫 번째는 확정적 모형의 최적화로서 의사결정과정에 필요한 데이터가 사전에 주어져 있는 경우에 대한 해법을 의미한다. 두 번째는 추계학적 모형의 최적화로서 의사결정에 요구되는 데이터 또는 파라미터의 값이 알려져 있지 않거나 부분적(확률적)으로 알려져 있는 경우가 이에 해당한다. 따라서 그 해법도 다르게 제시되어 왔으며 특히 추계학적 최적화 분야에서는 확률 및 통계적 기법이 결합되어 해법을 제시하는 경우가 많았다.

무장-표적 할당 문제의 경우 많은 연구가 진행되어 왔으나 추계학적 최적화 분야에 대한 연구는 비교적 제한된 관심을 받는 분야이다. 특히 무장의 명중률은 날씨, 위치 및 여러 전장상황에 따라 달라질 수 있음에도 불구하고, 대부분의 연구에서는 명중률이 주어져 있는 상황하에서 최적화 문제의 해결을 시도하였다. 최근 국방과학연구소에서 개발한 장거리 대잠수함 유도 미사일 "홍상어"의 시험발사[5]에서 알 수 있듯이 무장의 표적 명중률은 설계과정에서 주어진 명중률을 항상 보장하는 것은 아니다. 물론 설계상 명중률을 높이는 기술적인 방법에 대해서는 지속적으로 연구되어야 하겠지만, 운용자 입장에서는 설계상의 명중률을 중심으로 일정 정도의 오차를 허용하는 범위 내에서 모델을 정의하고 표적을 할당하는 것이 더욱 실제적인 접근법이라 할 수 있을 것이다. 본 논문은 확정적 무장-표적 할당 문제에서 데이터 및 파라미터가 확률적으로 주어질 때를 상황별로 정리하고, 명중률의 불확실성을 고려한 추계학적 최적화 모형을 제시하며 계산 실험을 통하여 확정적 최적화 모형과 비교해 본다.

2. 관련 연구 현황

무장-표적 할당 문제에 대한 연구는 1950년대부터 시작되었으며, Manne[18], Ash[7], Braford[10] 및 Day[13]의 연구에서 비롯되었다. Manne[18]은 적의 생존전력 최소화, Ash[7]와 Day[13]는 적의 위협을 최소화하는 모델을 이용하였으며 이들은 모두 비선형계획법으로 모형을 표현하여 근사치를 통한 해법을 제시하였다. 1986년에 Lloyd and Witsenhausen[17]은 무장-표적 할당 문제가 NP-Complete임을 증명하였으나, 제한된 조건 내에서는 최적해를 보장하는 알고리즘들도 제시되었다. 대표적인 예로 모든 무장이 동일하다고 가정한 경우 Katter[15], 표적에 할당되는 무장이 최대 하나로 제한되었을 경우 Chang et al.[12] 및 Orlin[20] 등이 있다. Sherali et al.[21]은 일반적인 Set Covering 문제가 각각의 고객이 적어도 하나의 서비스센터에 의해 만족되어야 하는 상황하에서의 최소 비용을 고려함을 참조하여 적의 위협을 최소화하는 문제를 Partial Set Covering 문제로 정의하고, 기하학적인 하위값(Lower Bound) 및 분지한계법(Branch-and-Bound Method)을 기반으로 하는 해법을 제안하였다. 최근에는 Kwon et al.[16]이 일정수준의 명중률을 보장하는 제약조건 내에서 무장 할당 및 발사로 인해 소요되는 총 비용을 최소화하는 모델을 제시하였다. 또한, 제약식에서 야기되는 비선형 수리모형을 로그함수를 이용하여 선형화하였고 라그랑지안 이완기법(Lagrangian Relaxation)과 분지한계법을 적용하였다. Ahuja et al.[6]은 네트워크 기반하 적의 위협을 최소화하는 모형을 채택하고, 일반적 네트워크 흐름식(Generalized Network-flow Formulation)과 최소 비용 흐름(Minimum Cost Flow) 기반의 하위값을 분지한계법을 이용하여 구하였으며, 상위값(Upper Bound)을 구하기 위해 이웃해 탐색을 통한 발견적 기법(Heuristic)을 제시하였다. 김태헌, 이영훈[2]은 다수의 사격부대가 동일표적에 사격하는 경우에 전

체 사격완료시간을 최소화하는 모형을 제시하였으며, 김동현, 이영훈[1]은 표적 할당과 사격 순서를 동시에 결정하는 문제에 대하여 3단계로 구분되는 발견적 기법을 제안하였다. 또한 무장-표적 할당이 항공기의 목표물 할당에 적용되기도 하였는데, 이대력, 양재환[3]은 항공기 쏘티(sortie)당 다수 표적을 할당하는 문제에 대한 혼합정수계획법 모형을 제시하였고, 이혁 외[4]는 항공기의 피해를 최소화하는 표적 할당 문제를 혼합정수계획법으로 모형화하고 분할 방법을 이용한 해법을 도출하였다. 하지만 이들의 모델은 모두 고정된 명중률을 적용하였는바, 본 논문에서는 Kwon et al.[16]이 제안한 비용 최소화 모델을 토대로 불확실성하 추계학적 최적화 모형을 제시하며 명중률이 확률적으로 주어지는 경우에 대하여 세부적으로 고찰해 본다.

3. 수리적 모형

Kwon et al.[16]은 표적에 대해 발사되는 무장에 따라 비용이 발생하게 됨을 고려하여 총 비용을 최소화하는 모델을 제시하였는데, 각각의 표적에 대해서는 일정 수준의 목표 명중률을 보장하는 조건을 제약식으로 표현하였다. 다음은 그 수리적 모형을 나타낸다.

3.1 확정적 수리모형(Deterministic Model)

<Sets/Indices>

W : 무장의 집합(set of weapon systems)

T : 표적의 집합(set of targets)

A : 무장-표적 할당의 집합, 즉, 무장 $i \in W$가 표적 $j \in T$에 할당되어 발사되는 경우 $(i,j) \in A$

<Data/Variables>

f_i : 무장 i의 이용가능한 발사탄수(rounds 또는 volleys)

p_{ij} : 무장 i의 단위 발사탄에 의해 표적 j가 명중될 확률, $0 < p_{ij} < 1$, $(i,j) \in A$

d_j : 표적 j를 명중시키기 위한 최소 목표 확률, $0 < d_j < 1$, $j \in T$

c_{ij} : 무장 i의 단위 발사탄을 표적 j에 할당할 경우의 비용, $(i,j) \in A$

x_{ij} : 표적 j에 할당되는 무장 i의 발사탄수를 나타내는 결정변수(정수), $(i,j) \in A$

정의된 집합, 데이터 및 변수로 표현되는 비용 최소화 목적의 무장-표적 할당 모델은 다음과 같다.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \tag{1a}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j \in T|(i,j) \in A} x_{ij} \le f_i, \ \forall i \in W, \tag{1b}$$

$$1 - \prod_{i \in W|(i,j) \in A} (1 - p_{ij})^{x_{ij}} \ge d_j, \ \forall j \in T, \tag{1c}$$

$$x_{ij} \in Z^+, \ \forall (i,j) \in A. \tag{1d}$$

목적함수 (1a)는 무장-표적간 할당에 의해 발생하는 총 비용을 최소화하며, 제약조건 (1b)는 각각의 무장이 이용 가능한 발사탄수 내에서 할당되어야 함을 나타낸다. 제약조건 (1c)는 표적에 대한 명중률이 최소 목표확률 이상이 되어야 함을 나타내는 식으로 비선형 모형이다. 마지막으로, 제약조건 (1d)는 결정변수 x_{ij}가 비음조건의 정수임을 나타낸다.

제약조건 (1c)의 비선형을 선형으로 변환하기 위해 로그함수를 이용한다. 본 식은 $(1-d_j)$와 $(1-p_{ij})$가 모두 비음조건을 만족하므로 로그함수를 취하는데 문제가 없으며, 로그함수의 단조증가 특징에 따라 로그함수를 양변에 취하여도 원 제약조건의 성질이 그대로 유지된다. 따라서 자연로그함수를 취하여 다음과 같이 선형으로 변환할 수 있다.

$$\ln(1-d_j) \ge \sum_{i \in W|(i,j) \in A} x_{ij} \ln(1-p_{ij}), \ \forall j \in T.$$

여기서 $-\ln(1-p_{ij}) = a_{ij}$, $-\ln(1-d_j) = b_j$로 각각 치환하여 단순화시키면 식 (1c)는 다음과 같은 선형 모형으로 변환될 수 있다.

$$\sum_{i \in W|(i,j) \in A} a_{ij} x_{ij} \ge b_j, \ \forall j \in T. \tag{2}$$

본 문제는 변수 제약을 가진 배낭형 문제(Knapsack

Problem)의 특별한 경우로 볼 수 있으므로 NP-hard 문제이며, 그 해법으로는 라그랑지안 이완기법(Lagrangian Relaxation)을 적용할 수 있다[16]. 식 (1b)를 라그랑지안 승수(Lagrangian multiplier)와 함께 목적함수로 이완하면, 나머지 제약식들은 전형적인 배낭형 문제가 되어 동적계획법을 이용한 유사 다항 알고리즘(Pseudo-polynomial Algorithm)의 적용이 가능하다[19].

3.2 추계학적 수리모형(Stochastic Model)

추계학적(Stochastic) 수리 모형은 확정적(Deterministic) 모형과는 달리 문제에 주어져 있는 데이터, 파라미터 값 등이 확률적으로 주어지는 상황을 고려하는 모형이다. 제 3.1절에서 언급된 데이터 및 파라미터(f, p, d, c)에 해당하는 값 중 적어도 하나가 어떠한 확률분포에 따라 변하는 값으로 주어지면 이는 추계학적 무장-표적 할당문제가 된다. 각각의 경우에 대하여 우선 살펴보자면, f는 무장의 이용가능한 발사탄수를 의미하는데 때때로 오류 또는 장비고장에 의해 실제 발사되지 않거나 또는 발사되더라도 불발탄에 그치며 공중분해 또는 해상투하 등의 경우가 발생할 수 있으므로 그러한 경우를 고려하여 확률적인 수치로 볼 수 있을 것이다. 명중률을 나타내는 p 또한 기상상황이나 다른 주변요인 및 표적의 은폐 또는 방어 기능에 의해 종종 변할 수 있으므로 확률적인 데이터로 보는 것이 가능하다. 최소 목표확률 d는 우리가 정하는 목표치이므로 확률적인 값으로 보기에는 무리가 있지만 교전중에 목표확률을 수정할 필요가 있을 수 있으므로, 본 연구에서는 학문적 목적상 확률적 수치로 접근해 보고자 한다. 무장-표적 할당 간에 발생하는 비용 c는 무장의 탑재 당시에는 주어진 가격일 수 있으나 경제지표 및 물가의 변화 및 어떤 표적에 할당되느냐에 따라 변하는 것으로 가정할 수 있다.

3.2.1 확률적 비용

비용이 어떠한 확률분포를 따르는 확률변수라고 가정하는 경우에는 목적함수 (1a)가 $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$를 최소화하는 것 대신에 식 (3)과 같이

$$\min E\Big[\sum_{(i,j)\in A}\tilde{c}_{ij}x_{ij}\Big] = \min \sum_{(i,j)\in A} E\big[\tilde{c}_{ij}\big]x_{ij} \quad (3)$$

그 기대값을 최소화하는 문제가 일반적으로 많이 고려되므로 비용 c 자리에 $\bar{c} = E[\tilde{c}]$가 들어간 후 모형 (1)을 푸는 것과 동일한 형태가 된다. 만약 기대값을 최소화하는 모형 대신에 최악의 경우(Worst Case)에 대한 최소화를 모형으로 채택할 경우 강건 최적화(Robust Optimization) 모형[8]으로도 표현될 수 있겠지만 이는 위험기피적(Risk-averse) 모형이며 추계학적 최적화 모델과는 달리 확률요소의 범위만 주어지고 확률분포를 모르는 것으로 가정하므로, 본 연구에서는 위험중립적(Risk-neural) 관점에서 기대값을 통하여 접근하는 방법에 대해서만 고려하고자 한다.

3.2.2 확률적 명중률

명중률은 여러 가지 고려요소들에 의해 실제 제작 및 설계상의 명중률에서 어느 정도 오차를 가지는 것이 일반적이다. 또한 발사 당시의 기상 상태 및 환경의 요인, 또는 해당 표적의 방어능력에 따라 변할 수 있다. 따라서 확률적 명중률이 확률변수로서 어떤 확률분포를 따른다고 가정하며, 명중률 p를 $\tilde{p}$로 표현한다. 그러므로 $\tilde{p}$가 포함되어 있는 제약조건 (2)의 a도 $\tilde{a}$가 되어 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{i\in W|(i,j)\in A}\tilde{a}_{ij}x_{ij} \ge b_j,\ \forall j\in T. \quad (4)$$

식 (4)의 좌변항은 확률변수 $\tilde{a}$로 구성된 함수이므로 이 또한 확률변수이다. 하지만 우변항은 정해져 있는 수치이므로, 어떠한 확률변수가 주어진 수치보다 크거나 같아야 한다는 제약조건은 성립되지 않는다. 다만, 이런 경우에 좌변항의 기대값이 우변항보다 크거나 같아야 한다는 조건 또는 좌변항이 우변항보다 크거나 같은 확률이 일정 수준 이상이어야 한다는 등의

제약조건으로 표현된다면 가능하다. 전자의 경우를 먼저 살펴보면, 제 3.2.1절의 확률적 비용을 고려한 모형처럼 식 (4)의 좌변항에 기대값을 취하여 접근할 수 있다. 즉,

$$E\left[\sum_{i\in W|(i,j)\in A}\tilde{a}_{ij}x_{ij}\right]\geq b_j,\ \forall j\in T. \tag{5}$$

로 표현함으로서 식 (5)의 좌변항은

$$E\left[\sum_{i\in W|(i,j)\in A}\tilde{a}_{ij}x_{ij}\right]=\sum_{i\in W|(i,j)\in A}E\left[\tilde{a}_{ij}\right]x_{ij},\ \forall j\in T$$

로 변환되어 $\bar{a}_{ij}=E\left[\tilde{a}_{ij}\right]$로 취환한 후 식 (4)를

$$\sum_{i\in W|(i,j)\in A}\bar{a}_{ij}x_{ij}\geq b_j,\ \forall j\in T$$

로 대체하여 선형 제약식을 만족하는 형태로 변환할 수 있다. 식 (3)과 더불어 식 (5)에서처럼 기대값을 구하는 경우에는 확률변수 $\tilde{c}_{ij}$ 또는 $\tilde{a}_{ij}$들간에 독립성 여부를 판별할 필요가 없다. 다만, 기대값이 아닌 분산을 취한다면 독립이 아닌 경우에 각 확률변수들간의 공분산을 고려해야 할 것이다. 식 (5)와 같이 기대값을 이용한 제약조건의 표현은 위험중립적 관점에서 평균적으로 제약식을 만족하도록 하겠지만 불확실성이 어떤 특정한 사건으로 나타날 경우 해당 제약식이 만족되지 못하는 경우도 발생할 수 있음을 참고할 필요가 있다.

다음으로 후자의 경우를 생각한다면 다음과 같은 확률적 제약조건(Probabilistic Constraint or Chance Constraint)을 작성하며, 식 (4)는 다음과 같이 변환된다.

$$P\left[\sum_{i\in W|(i,j)\in A}\tilde{a}_{ij}x_{ij}\geq b_j\right]\geq\alpha_j,\ \forall j\in T \tag{6}$$

식 (6)에서 α_j는 0부터 1사이의 값으로 운용자에 의해 사전에 결정되어야 할 것이다. α_j의 값이 클수록 식 (4)를 만족시킬 확률이 높아짐을 의미하므로 더 높은 수준의 만족도를 반영한다고 할 수 있다. 식 (6)의 좌변항을 구하기 위해 새로운 확률변수 X를 도입하고

$$X_j=\sum_{i\in W|(i,j)\in A}\tilde{a}_{ij}x_{ij}$$

라고 정의하자. 이 경우 식 (6)의 좌변항은 $P(X_j\geq b_j)$가 되고 만약 확률변수 X_j의 분포를 알고 있다면

$$P(X_j\geq b_j)=1-P(X_j<b_j)=1-F(b_j),\ \forall j\in T \tag{7}$$

가 된다. 여기서 F는 확률변수 X_j의 누적분포함수(Cumulative Distribution Function)를 의미한다. 따라서 식 (7)의 값이 α_j보다 크거나 같으면 제약조건 (6)을 만족시키는 결과와 같게 된다. 그러나 확률변수 X_j는 결정변수 x_{ij}를 포함하고 있으므로 결정변수가 어떤 값을 갖느냐에 따라 분포가 달라지게 되며, X_j는 여러 확률변수들의 합들로 구성되어 있으므로 일반적인 확률분포를 가지는 경우에 제약조건 (6)은 비선형 계획법으로 표현되어 문제의 해법이 훨씬 어려워질 뿐만 아니라 확률변수 X_j의 분포는 여러 확률변수들의 Convolution Sum(Casella and Berger[11], p.215)으로 구성되어 있어 그 분포의 파악이 우선되어야 할 것이다.

3.2.3 확률적 발사탄수 및 목표확률

마지막으로 발사탄수 f와 목표확률 d가 확률적으로 주어지는 경우에 대하여 고려한다. 만약 두 확률변수가 연속 확률분포를 따른다면 그 기대값을 적용하여 식 (1b)와 식 (2)를 식 (5)와 같이 표현할 수 있다. 즉 식 (1b)의 우변항에 f_i를 $\bar{f}_i=E\left[\tilde{f}_i\right]$로, 식 (2)의 b_j를 $\bar{b}_j=E\left[\tilde{b}_j\right]=E\left[-\ln(1-\tilde{d}_j)\right]$로 대체한다. 이 경우에는 평균값에 대한 식 (1b)와 식 (2)를 만족하므로 만약 시나리오에 따라 다른 값들을 가질 경우 해당 제약조건이 만족되지 않을 수도 있다. $w_i\in\Omega_i$가 무장 i의 발생 가능한 표본점(Sample Point)이며 $w_j\in\Omega_j$가 표적 j의 발생 가능한 표본점이라고 할 때, 모든 발생 가능한 발사탄수 f와 목표확률 d에 대해

나열하여 식 (1b)와 식 (2)를 나타내면 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\sum_{j\in T|(i,j)\in A} x_{ij} \le f_i^{\omega_i},\ \ \forall i\in W,\ w_i\in\Omega_i, \qquad (1b')$$

$$\sum_{i\in W|(i,j)\in A} a_{ij}x_{ij} \ge b_j^{\omega},\ \forall j\in T,\ \omega_j\in\Omega_j. \qquad (2')$$

이 경우 모든 상황을 고려한 제약조건 (1b'), (2')에 의해 만족되지 못하는 경우는 발생하지 않겠지만, 모든 가능한 시나리오들을 고려하는 모형은 그만큼 제약조건이 증가하게 되어 대형(Large-scale) 문제 최적화 모형이 되며 최적해 도출에 어려움이 따를 수 있다. 하지만 위험기피적 관점에서는 선호하는 모형이라 할 수 있을 것이다.

지금까지 각 데이터들이 확률적으로 주어진 경우에 대해 간략히 알아보았다. 기대값을 취하는 경우에는 확정적 수리 모형과 같은 형태로 취급되어 그 해법도 동일하게 적용할 수 있지만, 확률적 제약조건으로 표현할 경우에는 비선형 모형 및 해당 확률분포를 구하기 어려운 문제들이 있었다. 다음 장에서는 명중률의 불확실성을 고려한 추계학적 모형에 대해 더욱 자세히 알아보기로 한다.

3.3 Simple Recourse 모형

추계학적 계획법(Stochastic Programming)은 의사결정과정에 불확실성이 내포되어 있는 경우에 대한 최적화 모형을 나타내는 것으로 데이터 또는 파라미터가 주어져 있지 않고 확률적으로 알려져 있는 경우에 기대치를 바탕으로 의사결정이 먼저 이루어진 후 확률적인 데이터 또는 파라미터가 현실화되는 것을 의미한다[9]. 선형계획법(Linear Programming)의 4가지 가정 사항 또는 공리(Axiom)라 할 수 있는 비례성(Proportionality), 가합성(Additivity), 가분성(Divisibility) 및 확실성(Certainty)에서 확실성이 만족되지 못하는 상황이 바로 추계학적 계획법이 된다.

추계학적 계획법에는 Recourse[9]라고 하여 1차적인 의사결정과 불확실성이 어느 한 가지 사건 또는 결과로 현실화된 후 1차적 의사결정에 의해 영향을 받는 수치나 값, 또는 2차적 의사결정을 요구하는 것을 의미하는 용어가 있다. 추계학적 계획법에서 2차적 의사결정을 요구하지는 않지만 불확실성의 확정 이전에 결정된 1차적 의사결정에 의해 영향을 받게 되는 Recourse를 Simple Recourse라고 하며, 본 연구에서는 추계학적 무장-표적 할당 문제의 Simple Recourse 모형을 고려한다. Simple Recourse 모형은 불확실성이 내포된(확률적으로 알려진) 제약 조건이 만족되지 않는 것을 허용하지만 벌과(Penalty)가 부과되도록 하는 모형이다. 무장-표적 할당 문제에서는 식 (4)가 확률적 명중률에 의해 불확실성을 내포하고 있으므로 식 (4)가 만족되지 않는 것은 허용하되 만족되지 못한 양에 대한 벌과가 부과되는 모형을 제시한다.

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + E[h(x,\xi)] \qquad (8a)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j\in T|(i,j)\in A} x_{ij} \le f_i,\ \ \forall i\in W, \qquad (8b)$$

$$x_{ij}\in Z^+,\ \ \forall (i,j)\in A, \qquad (8c)$$

여기서

$$h(x,\xi) = \sum_{j\in T} q_j\Big[b_j - \sum_{i\in W|(i,j)\in A} \tilde{a}_{ij}x_{ij}\Big]^+. \qquad (9)$$

목적함수 (8a)는 결정변수 x에 의해 제약조건 (8b)-(8c)를 만족하면서 비용을 최소화하는 무장-표적간의 할당을 결정하고, 결정된 x의 값과 불확실성 ξ가 기존의 제약조건 (4)를 만족시키지 못하는 양만큼 부과되는 벌과 비용(Penalty Cost)을 최소화한다. 여기서 $[x]^+ = \max(0,x)$를 의미하며, q_j는 표적 j에 대해 제약 조건 (4)가 만족되지 못할 때의 단위 벌과 비용이다. 식 (9)가 목적함수 (8a)에 포함될 경우, 목적함수는 비선형의 형태가 되지만 다음과 같이 선형의 형태로 변환할 수 있다.

$$E[h(x,\xi)] = \sum_{j\in T} q_j E\Big[b_j - \sum_{i\in W|(i,j)\in A} \tilde{a}_{ij}x_{ij}\Big]^+ \qquad (10)$$

식 (10)의 기대값을 계산하기 위하여 다음의 예를 살펴보도록 한다. 표적 j에 대하여 할당 가능한 무장이 i_1, i_2 두 가지가 있다고 하자. 그럴 경우 $\sum_{i\in W|(i,j)\in A}\tilde{a}_{ij}x_{ij} = \tilde{a}_{i_1j}x_{i_1j}+\tilde{a}_{i_2j}x_{i_2j}$이다. 또한 각각의 확률변수 $\tilde{a}_{i_1j}$와 $\tilde{a}_{i_2j}$가 가질 수 있는 값이 각각 $P(\tilde{a}_{i_1j} = a^{\omega_1}_{i_1j}) = r^{\omega_1}_{i_1j} > 0$, $P(\tilde{a}_{i_1j} = a^{\omega_2}_{i_1j}) = r^{\omega_2}_{i_1j} > 0$이고 $r^{\omega_1}_{i_1j}+r^{\omega_2}_{i_1j}=1$이라고 하자. 마찬가지로,

$$P(\tilde{a}_{i_2j} = a^{\omega_1}_{i_2j}) = r^{\omega_1}_{i_2j} > 0,\ P(\tilde{a}_{i_2j} = a^{\omega_2}_{i_2j}) = r^{\omega_2}_{i_2j} > 0$$

이고 $r^{\omega_1}_{i_2j}+r^{\omega_2}_{i_2j}=1$이라고 한다면, 식 (10)의 기대값 부분은 해당 j에 대하여

$$\begin{aligned} E\Big[b_j - \sum_{i\in W|(i,j)\in A}\tilde{a}_{ij}x_{ij}\Big]^+ &= r^{\omega_1}_{i_1j}r^{\omega_1}_{i_2j}\Big[b_j - a^{\omega_1}_{i_1j}x_{i_1j} - a^{\omega_1}_{i_2j}x_{i_2j}\Big]^+ \\ &+ r^{\omega_2}_{i_1j}r^{\omega_1}_{i_2j}\Big[b_j - a^{\omega_2}_{i_1j}x_{i_1j} - a^{\omega_1}_{i_2j}x_{i_2j}\Big]^+ \\ &+ r^{\omega_1}_{i_1j}r^{\omega_2}_{i_2j}\Big[b_j - a^{\omega_1}_{i_1j}x_{i_1j} - a^{\omega_2}_{i_2j}x_{i_2j}\Big]^+ \\ &+ r^{\omega_2}_{i_1j}r^{\omega_2}_{i_2j}\Big[b_j - a^{\omega_2}_{i_1j}x_{i_1j} - a^{\omega_2}_{i_2j}x_{i_2j}\Big]^+ \end{aligned}$$

가 된다. 따라서 식 (10)은 표적 j에 대하여, 총 4가지의 가능한 원소들을 가지게 되며, 각각은 $s^1_j = r^{\omega_1}_{i_1j}r^{\omega_1}_{i_2j}$, $s^2_j = r^{\omega_2}_{i_1j}r^{\omega_1}_{i_2j}$, $s^3_j = r^{\omega_1}_{i_1j}r^{\omega_2}_{i_2j}$, 그리고 $s^4_j = r^{\omega_2}_{i_1j}r^{\omega_2}_{i_2j}$이며 그 확률의 합은 $\sum_{k=1}^{4}s^k_j = 1$이 된다. 또한 벡터 $x=(x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{|W||T|})$에 대하여 벡터 $a^1_j = (0, \cdots, a^{\omega_1}_{i_1j}, \cdots, a^{\omega_1}_{i_2j}, \cdots, 0)$과 같이 벡터 a^2_j, a^3_j, a^4_j도 정의될 수 있다. 여기서 $|\bullet|$는 해당 집합의 크기, 즉 집합의 원소의 개수를 나타낸다. 이를 일반화하여 정리하면, s^k_j는 식 (10)의 $\sum_{i\in W|(i,j)\in A}\tilde{a}_{ij}x_{ij}$에서 가능한 조합의 확률로 표현되며, 이 때 가능한 조합의 집합을 $k\in K_j$으로 나타낸다고 할 때, 식 (10)은 아래의 식 (11)로 변환할 수 있다.

$$= \sum_{j\in T}q_j\sum_{k\in K_j}s^k_j\big[b_j - a^k_jx\big]^+. \tag{11}$$

각각의 표적에 대한 기대값을 정리한 후 모형 (8)은 다음과 같은 확정적 모형으로 표현된다.

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A}c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in T}q_j\sum_{k\in K_j}s^k_j\big[b_j - a^k_jx\big]^+ \tag{12a}$$

s.t. (8b)-(8c).

목적함수 (12a)는 $[\bullet]^+$ 함수로 인해 선형 모형이 아니지만 추가적인 결정변수 y를 도입하여 다음과 같이 선형으로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} &y^k_j \ge b_j - a^k_jx,\ \ \forall j\in T, k\in K_j, \\ &y^k_j \ge 0,\ \ \forall j\in T,\ k\in K_j. \end{aligned}$$

따라서 최종적인 모형은 혼합정수계획법(Mixed Integer Program) 형태의 모형 (13)으로 요약된다.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in A}c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in T}\sum_{k\in K_j}(q_js^k_j)y^k_j && (13a) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j\in T|(i,j)\in A}x_{ij} \le f_i,\ \ \forall i\in W, && (13b) \\ & y^k_j \ge b_j - a^k_jx,\ \ \forall j\in T, k\in K_j, && (13c) \\ & x_{ij}\in Z^+,\ \ \forall (i,j)\in A, && (13d) \\ & y^k_j \ge 0,\ \ \forall j\in T, k\in K_j && (13e) \end{aligned}$$

결정변수 y는 각각의 표적에 대하여 제약 조건 (4)가 만족되지 못하는 양을 의미하며, 해당 제약조건이 만족된다면 $q_js^k_j$가 항상 양수이므로 y는 0을 취하게 된다. 모형 (13)은 정수 제약의 결정변수 $|A|$개와 실수 제약의 결정변수 $\sum_{j\in T}|K_j|$를 가지게 되며, 구조적(Structural) 제약식의 수는 총 $|W| + \sum_{j\in T}|K_j|$ 개를 갖는다.

4. 실험 예제

본 장에서는 모형 (13)을 바탕으로 랜덤으로 생성된 데이터 및 무장, 표적의 개수에 대하여 실제 문제를 해결하여 그 결과를 보여준다. 실험을 위하여 해군 함정의 무기체계를 고려한다. 다른 전투체계 또는 무기체계와 달리 단일 함정에는 대공/대함/대잠 등의 다양한 무기체계가 각각 존재하고 있으며, 그 위

협에 따라 사용 가능한 무장의 제한이 이루어진다. 함대공 미사일, 함대함 미사일(하푼 등), 함포, 그리고 대잠 미사일(Torpedo) 등이 있으며, 각각의 사용 가능한 발사탄수를 지정하고, 대공/대함/대잠 위협이 동시에 존재하는 경우를 가정하여 적 항공기 및 함정 등 표적수를 임의로 지정한다. 단, 대잠 미사일의 경우는 오직 수중 위협세력에 대해서만 대응이 가능하므로 독립적으로 할당해야 함을 고려하여 본 실험 문제의 설계에서는 배제하도록 한다. 각각의 무장-표적에 대한 비용 및 명중률을 일정한 범위를 가지는 균등분포(Uniform Distribution)에 기초하여 랜덤으로 생성하고, 할당 가능한 발사탄수와 목표 명중률은 임의로 지정하도록 한다.

무장은 대공 미사일($i=1$), 대함 미사일($i=2$), 함포($i=3$) 등 총 3가지로 구성되어 있으며, 각각은 50 ($f_1=50$), 50($f_2=50$), 300($f_3=300$)개의 발사탄수가 이용 가능하다고 가정한다. 표적은 대공 위협세력(항공기 등) 50개, 대함 위협세력(함정 등) 50개로 총 100개가 존재한다고 가정한다. 각각의 무장-표적 할당간 비용 및 가능한 확률적 명중률에 대한 시나리오는 <표 1>에서 보는 바와 같이 주어진 범위내에서 균등분포를 따르도록 랜덤으로 생성한다.

〈표 1〉 무장-표적 할당간 비용 및 평균 명중률

c_{ij}	$j=1,\ \cdots,\ 50$	$j=51,\ \cdots,\ 100$
$i=1$	[80, 120]	-
$i=2$	-	[60, 100]
$i=3$	[10, 30]	[10, 30]
$\bar{p}_{ij}$	$j=1,\ \cdots,\ 50$	$j=51,\ \cdots,\ 100$
$i=1$	[0.75, 0.85]	-
$i=2$	-	[0.75, 0.85]
$i=3$	[0.10, 0.15]	[0.15, 0.25]

대공 미사일은 대공 표적에 대해서만 할당이 가능하도록 하였고 대함 미사일은 대함 표적에 대해서만 할당 가능토록 평균 명중률을 랜덤으로 생성하였다. 함포는 대공/대함 표적에 모두 할당이 가능하도록 하였으나 그 특성상 명중률을 매우 낮게 지정하였다. 표적별 목표 명중률은 모든 표적에 대해 80% 이상의 명중률을 적용(즉, $d_j=0.80,\ \forall j\in T$)하며, 목표 명중률 미달 시 발생하는 벌과 비용은 대공 위협표적에 대하여 $q_j=500,\ j=1,\cdots,\ 50$, 대함 위협표적에 대하여 $q_j=300,\ j=51,\cdots,\ 100$, 으로 설정하였다. 확률적 명중률은 <표 1>에서 나타난 무장-표적별 평균 명중률에 ± 0.10을 적용하여 다음과 같이 적용하기로 한다.

$$\tilde{p}_{ij}=\begin{cases}\bar{p}_{ij}+0.10 & with\,probability\ 0.20\\ \bar{p}_{ij} & with\,probability\ 0.50\\ \bar{p}_{ij}-0.10 & with\,probability\ 0.30\end{cases} \tag{14}$$

즉, 모든 가능한 무장-표적 할당 $(i,\ j)\in A$에 대하여 3가지의 명중률이 발생가능하며, 그 확률은 해당 사건에 따라 각각 $r_{ij}^{\omega}=0.20,\ 0.50,\ 0.30$이다. 또한 하나의 표적에 대하여 대응할 수 있는 무장은 각각 두 종류가 있으므로(대공표적은 대공미사일과 함포, 대함표적은 대함미사일과 함포), 표적 j에 대하여 가능한 명중률의 조합은 총 9가지의 시나리오로 발생하게 되며 각각의 발생 확률 s_j^k는 식 (14)의 확률 중 두 가지의 조합으로 나타나게 된다. 위와 같이 랜덤으로 생성된 데이터에 의해 총 300개의 정수 결정변수(x)와 총 900개의 실수 결정변수(y)를 가지며, 903개의 구조적 제약식을 가지는 혼합정수계획법의 모형을 GAMS[9]를 이용하여 최적해를 도출하였다.

실험 결과 대공 미사일은 50개의 대공 표적에 대하여 각 1발씩 모두 할당되었고, 대함 미사일은 69번과 80번 표적에 대하여 할당되지 않은 대신 70번과 88번에 대해 각각 2발씩 할당되었다(<부록 1> 최적해 참조). 나머지 대함 미사일은 대함 표적에 대해 각 1발씩 모두 할당되었다. 이것은 해당 대함 표적에 대해 함포를 할당했을 경우 명중률이 다른 표적에 비해 다소 높아(각 0.247, 0.234) 해당 표적에 대해 대함 미사일을 할당하는 대신 함포를 각 10, 11발씩으로 다른 표적에 비해 약 6~7발 더 많이 할당하였으며, 2발씩 할당한 70번과 88번 대함 표적에 대하여는 함포를 전혀 할당하지 않았다. 함포는 총 300발 중 239발을 사용하고 61발을 사용하지 않았다. <표 2>

는 실험 결과 대공 및 대함 각 표적에 대하여 평균적으로 나타나는 벌과 비용, 함포의 평균 발사탄수 및 만족되지 못한 목표 명중률의 양을 각각 나타낸다.

〈표 2〉 표적별 평균 벌과 비용, 함포 발사탄수 및 목표 명중률 미달량

	대공 표적	대함 표적
평균 벌과 비용	185.37	15.64
평균 함포 발사탄수	0.84	3.94
평균 목표 명중률 미달량	0.09	0.01

평균 벌과 비용은 대함 표적에 비해 대공 표적에 상대적으로 많이 부과되었는데 그 원인으로는 대공 표적이 단위 벌과 비용이 더 크며 목표 명중률을 만족하지 못한 양이 대함 표적보다 상대적으로 높은 것에서 기인한다. 평균 함포의 발사탄수는 대공 표적보다는 대함 표적에 더욱 많이 할당되었는데 이것은 함포의 대공 표적에 대한 명중률이 대함 표적에 비해 상대적으로 낮았기 때문이다. 마지막으로 대공 표적은 제한된 대공 미사일과 대체 무장으로 사용가능한 함포의 낮은 명중률 등에 의해 대함 표적에 비해 목표 명중률에 도달하지 못한 양이 상대적으로 큰 것으로 관찰된다. 또한 이것이 벌과 비용에도 더욱 많이 부과되는 결과로 이어졌다. 도출한 최적해 및 <표 2> 내용의 세부값은 '부록'을 참조하기 바란다.

본 실험 결과를 모형 (1)의 확정적 수리 모형과 비교해 보았다. 식 (1c)는 식 (2)로 변환되며, 확정적 모형하에서 식 (2)는 반드시 만족되어야 하므로, 만족되지 못하는 양에 대한 벌과 비용은 존재하지 않는다. 다른 데이터는 모두 동일하며, 모형 (1)의 최적해를 도출한 결과 대공 미사일은 모두 사용된 반면, 대함 미사일은 1기가 사용되지 않았다. 사용되지 않은 함포는 총 229발로 약 24% 밖에 사용되지 않았다. 대공 표적에 사용된 함포의 평균 발사탄수는 0.72발이었으며, 각 대함 표적에는 평균 0.70발이 발사되었다. 명중률이 정확히 주어져 있는 확정적 모형에서는 가용 무장을 모두 할당하지 않고도 주어진 목표 명중률을 모두 만족시킬 수 있는 결과가 나왔지만, 본 연구에서 고려한 추계학적 무장-표적 할당 문제에서는 여러 불확실성을 고려하면서 무장을 적절한 표적에 할당하는 모형을 고려하였다. 확정적 모형과의 단순 수치적 비교는 의미가 없으며, 추계학적 모형을 제시함으로써 불확실성 하에서 잘못된 할당에 의해 발생할 수 있는 추가적인 벌과 비용을 최소화하고 가능한 시나리오별로 무장-표적을 할당할 수 있으므로 더욱 실용적이고 현실적인 적용이라 할 수 있다.

마지막으로 추계학적 모형의 목표 명중률의 변화에 따른 변화와 계산 성능을 확인해 보기 위하여 목표 명중률을 0.70~0.95까지 0.05 단위로 변화시켜가며 계산 실험을 수행하였고, 그 결과는 <표 3>과 같이 나타났다.

목표 명중률 변화에 따른 민감도 분석 결과, 목표 명중률이 증가할수록 목표 명중률을 만족시키지 못하는 양이 증가하게 되고 이에 따라 평균 벌과 비용 또한 증가함을 확인할 수 있다. 또한 대함 표적보다 대공 표적이 평균 벌과 비용 및 평균 목표 명중률 미

〈표 3〉 추계학적 모형의 목표 명중률 변화에 따른 표적별 평균 벌과 비용, 함포 발사탄수 및 목표 명중률 미달량

목표 명중률	평균 벌과 비용		평균 함포 발사탄수		평균 목표 명중률 미달량		계산 시간 (초)
	대공 표적	대함 표적	대공 표적	대함 표적	대공 표적	대함 표적	
0.70	20.33	4.21	0.04	0.36	0.01	0.00	1
0.75	84.62	14.39	0.38	1.58	0.05	0.01	5
0.80	185.37	15.64	0.84	3.94	0.09	0.01	51
0.85	335.31	44.84	0.58	5.42	0.15	0.03	6
0.90	546.59	113.55	0.00	6.00	0.31	0.10	1
0.95	858.29	288.76	0.00	6.00	0.49	0.24	1

달량에서 상대적으로 높은 증가비율을 나타낸다. 이것은 대공 표적이 대함 표적보다 단위 벌과 비용이 높고 목표 명중률 미달량이 더욱 많아서 나타난 결과이다. 평균 함포의 발사탄수는 대공 표적의 경우 목표 명중률이 0.80일 때까지는 증가하다가 그 이상일 때는 감소하는 현상을 보이며, 대함 표적의 경우는 지속적으로 증가한다. 이것은 목표 명중률이 증가됨에 따라 대공 표적은 상대적으로 함포가 아닌 대공 미사일로만 대응하는 것이 목표 명중률 달성에 더욱 효과적임을 나타내며, 대함 표적은 목표 명중률이 증가함에 따라 그 할당의 빈도를 점점 높여야 목표 명중률을 달성할 수 있음을 나타낸다. 또한 표적에 대한 무장의 할당은 급박한 상황에서 일어나므로 신속한 할당이 무엇보다도 중요하다고 할 수 있으며 그에 따라 계산 성능을 비교해 본 결과, 대체로 수 초 내에 무장 할당이 이루어짐을 확인할 수 있으나, 목표 명중률이 0.80인 경우 상대적으로 계산 시간이 많이 소요됨을 확인할 수 있다. 이는 목표 명중률이 너무 높거나 낮은 경우보다 제약 조건(1c)에 최대한 근접하도록 무장을 할당하고자 하는 노력이 계산 시간의 증가를 불러온 것으로 해석된다. 이러한 경우에 대한 계산 성능을 개선하기 위해서는 혼합정수계획법의 모형 (13)을 풀기 위한 추가적인 이완 기법 또는 발견적 기법 등의 연구가 요구된다.

5. 결론 및 향후 연구 방향

무장-표적 할당 문제는 국방 경영과학 분야에서 오랜 기간 주목받아왔던 문제이지만 그 추계학적 모형에 대한 연구는 비교적 제한적인 관심을 받아온 분야이다. 본 연구에서는 확정적 무장-표적 할당 문제에서 항상 주어진 데이터 또는 파라미터로 간주되어 온 값에 불확실성을 부여함으로서 추계학적 무장-표적 할당 문제를 고려하였다. 각각의 데이터별로 확률적으로 주어지는 상황에 대하여 기대값을 고려한 위험중립적 모형으로 나타내었으며 그 해법은 기존의 확정적 모형에 대한 연구에서 적용이 가능함을 확인하였다.

무장-표적 별 명중률은 기상 상황이나 전장환경 등 여러 가변 요소에 따라 달라질 수 있으므로 그런 불확실한 상황을 고려하지 않고 표적에 무장을 할당하는 경우, 목표로 한 표적의 명중률을 만족시키지 못하게 되어 적의 잔존 세력 등에 의해 치명적인 손상을 초래할 수 있으므로 추계학적 모형에서도 가장 중요하게 고려될 수 있는 부분 중 하나로 고려하였고, 확률적 명중률을 바탕으로 Simple Recourse 모형을 제시하였다. 단일 해군 함정이 보유하고 있는 무장의 종류 및 수량, 해상에서 부딪힐 수 있는 위협요소들을 고려하여 실험을 설계하였으며, 랜덤으로 생성된 데이터를 이용하여 최적해를 도출하고 그 결과를 확정적 모형과 비교하였다. 추계학적 모형은 가변적인 상황에 대한 탄력적 운용 및 여러 불확실성을 고려한 의사결정 등 보다 실용적이고 현실적인 문제에 대한 해답을 제시한다는 점에서 본 연구의 의의와 시사점을 찾을 수 있다.

무장-표적 할당에 대한 추계학적 수리 모형을 제시하고 동일한 해를 제공하는 혼합정수계획법 기반의 확정적 모형으로 변형하여 제시하였으나, 문제의 사이즈가 커지거나 불확실성이 다양한 형태로 발생하는 경우에 대한 해법도 남겨 놓고 있다. 특히 계산 시간에서 확인되듯이 일반적으로 혼합정수계획법을 직접적으로 푸는 것보다 이완(Relaxation), 분해(Decomposition)를 통한 전통적인 최적화 기법이나 본 문제에 적합한 형태의 발견적 기법을 통한 최적해 도출 등이 요구된다고 할 수 있다. 또한 각 데이터가 본 연구에서 고려한 바와 같이 이산 확률분포를 따르지 않고 일반적인 연속 확률분포를 따르는 경우에 대해서도 추가적인 해법이 필요하다. 예를 들어 몬테카를로 표본 기반의 근사기법(Monte Carlo Sampling-based Approximation)을 고려한 표본 평균 모형(Sample Average Approximation)[5]의 적용도 한 가지 방법이라 할 수 있을 것이다. 마지막으로 최소 비용을 목적함수로 채택하는 대신 Ahuja et al.[6]이 고려한 위협 최소화 문제는 비용 제약하 효과도를 높이는 목적을 가지며, 이에 대한 추계학적 모형에 대한 연구도 의미있는 분야 중 하나임에 틀림없다. 이러한 문제들에 대해서는 차후 연구과제로 남겨두고자 한다.

참 고 문 헌

[1] 김동현, 이영훈, "표적 할당과 사격 순서의 동시 결정 문제를 위한 발견적 기법", 「한국경영과학회지」, 제35권, 제1호(2010), pp.47-65.

[2] 김태헌, 이영훈, "공유표적을 포함한 사격순서 결정에 관한 연구", 「한국경영과학회지」, 제28권, 제3호(2003), pp.123-134.

[3] 이대력, 양재환, "혼합정수계획법을 이용한 항공기-목표물 최적할당에 관한 연구", 「경영과학」, 제25권, 제1호(2008), pp.55-74.

[4] 이 혁, 이영훈, 김선훈, "최적화와 분할 방법을 이용한 항공기 표적 할당 연구", 「경영과학」, 제32권, 제1호(2015), pp.49-63.

[5] 윤상호, "말많고 탈많던 '홍상어' 최종 시험 발사 성공", 「동아일보」, 2013년 8월 15일.

[6] Ahuja, R.K., A. Kumar, K.C. Jha, and J.B. Orlin, "Exact and Heuristic Algorithms for the Weapon-Target Assignment Problem," *Operations Research*, Vol.55, No.6(2007), pp.1136-1146.

[7] Ash, M., "Flood's Assignment Model for Small Kill Levels," *Operations Research*, Vol.7, No.2(1959), pp.258-260.

[8] Ben-Tal, A., L.E. Ghaoui, and A. Nemirovski, *Robust Optimization*, Princeton University Press, New Jersey, 2009.

[9] Birge, J. and F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer, New York, 2011.

[10] Braford, J.C., *Determination of Optimal Assignment of a Weapon System to Several Targets*, AER-EITM-9, Vought Aeronautics, Dallas, TX.

[11] Casella, G. and R.L. Berger, *Statistical Inference*, Duxbury, California, 2002.

[12] Chang, S.C., R.M. James, and J.J. Shaw, "Assignment Algorithm for Kinetic Energy Weapons in Boost Defense," In *Proceedings of IEEE 26th Conference Decision and Control* (1987), Los Angeles, CA, pp.1678-1683.

[13] Day, R.H., "Allocating Weapons to Target Complexes by Means of Nonlinear Programming," *Operations Research*, Vol.14, No.6 (1966), pp.992-1013.

[14] GAMS Development Corporation(2013), "The General Algebraic Modeling Systems(GAMS)," Available from : http://www.gams.com/ (accessed 5 February 2013).

[15] Katter, J.D., "A Solution of the Multi-weapon, Multi-target Assignment Problem," *Working Paper 26957*, MITRE, McLean, VA.

[16] Kwon, O., D. Kang, K. Lee, and S. Park, "Lagrangian Relaxation Approach to the Targeting Problem," *Naval Research Logistics*, Vol.46, No.6(1999), pp.640-653.

[17] Lloyd, S.P. and H.S. Witsenhausen, "Weapon Allocation is NP-complete," In *Proceedings of the Summer Conference of Simulation* (1986), Reno, NV, pp.1054-1058.

[18] Manne, A.S., "A Target-Assignment Problem," *Operations Research*, Vol.6, No.3(1958), pp.346-351.

[19] Nemhauser, G. and L. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, New York, 1988.

[20] Orlin, D., "Optimal Weapons Allocation against Layered Defenses," *Naval Research Logistics*, Vol.34, No.5(1987), pp.605-616.

[21] Sherali H.D., S.-I. Kim, and E.L. Parrish, "Probabilistic Partial Set Covering Problems," Naval *Research Logistics*, Vol.38, No.1(1991), pp.41-51.

〈부 록〉

1. 확정적 모델의 최적해

x_{ij}^*	$j=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$i=1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	0	0	0	2	0	0	0	2	1	1	0	1	2	0	0	0	0	0	2	0

x_{ij}^*	$j=21$	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$i=1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	0	2	0	0	2	1	0	0	1	1	2	2	0	0	0	0	2	2	0	1

x_{ij}^*	$j=41$	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$i=1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
3	0	0	1	2	1	1	2	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	9

x_{ij}^*	$j=61$	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
$i=1$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1

x_{ij}^*	$j=81$	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
$i=1$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	0	1	0	1	2	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0

2. 추계학적 모델의 최적해

x_{ij}^*	$j=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$i=1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	8	0	0

x_{ij}^*	$j=21$	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$i=1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	0	0	0	0	0	9	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

x_{ij}^*	$j=41$	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$i=1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
2	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	5	7	4	3	3	0	2	5	7

x_{ij}^*	$j=61$	6	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
$i=1$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
2	1	1	1	1	1	1	1	1		2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
3	4	5	3	6	4	4	7	3	10	0	7	4	4	6	4	0	3	9	3	11

x_{ij}^*	$j=81$	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
$i=1$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	3	4	5	5	4	4	0	2	8	4	3	4	4	2	2	2	3	0	3

3. 추계학적 모델의 각 표적에 대한 평균 벌과 비용

$$Penalty(j) = q_j \sum_{k \in K_j} s_j^k y_j^k$$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Penalty	202	144	185	268	190	14	171	257	230	233
j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Penalty	199	0	255	171	202	190	165	6	277	143
j	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Penalty	166	257	184	175	251	0	182	163	20	257
j	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Penalty	278	278	121	116	118	140	259	273	194	253
j	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Penalty	113	148	234	267	214	227	263	188	212	217
j	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Penalty	0	0	0	0	27	0	155	12	5	9
j	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Penalty	10	0	8	7	0	8	6	17	4	0
j	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Penalty	11	17	2	12	21	102	8	0	0	10
j	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Penalty	103	0	0	4	0	7	0	0	0	2
j	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Penalty	0	0	18	0	21	27	29	0	120	0

4. 추계학적 모델의 각 표적에 대한 평균 목표 명중률 미달량

$$Unsatisfied(j)=\sum_{k\in K_j} s_j^k\left[d_j-\left(1-\prod_{i\in W(i,j)\in A}(1-p_{ij}^k)^{x_{ij}}\right)\right]=d_j-\left(1-\sum_{k\in K_j}s_j^k\prod_{i\in W(i,j)\in A}(1-p_{ij}^k)^{x_{ij}}\right)=d_j-\left(1-\sum_{k\in K_j}s_j^k\exp(-a_j^kx)\right)$$

$$(\because a_j^kx=\sum_{i\in W(i,j)\in A}\left(-\ln(1-p_{ij}^k)\right)x_{ij}=-\sum_{i\in W(i,j)\in A}\left(\ln(1-p_{ij}^k)\right)x_{ij}=-\sum_{i\in W(i,j)\in A}\ln(1-p_{ij}^k)^{x_{ij}}=-\ln\prod_{i\in W(i,j)\in A}(1-p_{ij}^k)^{x_{ij}}$$

$$\Leftrightarrow\ \exp(-a_j^kx)=\prod_{i\in W}(1-p_{ij}^k)^{x_{ij}})$$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amount	0.10	0.07	0.09	0.14	0.09	0.01	0.08	0.13	0.12	0.12
j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Amount	0.10	0.00	0.08	0.13	0.10	0.09	0.08	0.00	0.15	0.07
j	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Amount	0.08	0.13	0.09	0.09	0.13	0	0.09	0.08	0.01	0.13
j	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Amount	0.15	0.15	0.06	0.05	0.05	0.06	0.14	0.15	0.10	0.13
j	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Amount	0.05	0.07	0.12	0.14	0.11	0.12	0.14	0.09	0.11	0.11
j	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Amount	0	0	0	0	0.02	0	0.14	0.01	0.00	0.01
j	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Amount	0.01	0	0.01	0.00	0	0.01	0.00	0.01	0.00	0
j	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Amount	0.01	0.01	0.00	0.01	0.01	0.08	0.01	0	0	0.01
j	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Amount	0.08	0	0	0.00	0	0.01	0	0	0	0.00
j	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Amount	0	0	0.01	0	0.01	0.02	0.02	0	0.10	0