East Asian Math. J.
Vol. 32 (2016), No. 2, pp. 193-215
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2016.017

무한강하법을 이용한 증명지도의 연구

A Study on the Teaching of Proofs using the Method of Infinite Descent

이 동 원 · 김 부 윤 · 정 영 우[1)]

ABSTRACT. There are three subjects in the study. First, after investigating the development process of the method of infinite descent and the reduction to absurdity, we prove them to be equivalent each other. Second, we apply the method of infinite descent to some problems in textbook and compare it with the reduction to absurdity. Finally, we discuss on teaching proofs with the method of infinite descent.

Ⅰ. 서론

오늘날의 증명교육은 수학적 사고방법으로서의 의미를 살리지 못하고, 대부분의 학생들이 증명을 암기하는 등 피상적인 방식으로 이루어지고 있는데(김남희 외, 2011), 황혜정 외(2012)는 특히 중학생들이 공리 체계 내에서 논리 규칙에 따라 명제들을 체계적으로 연결시키는데 어려움이 있음을 제시하였다. 이러한 경향은 2009 개정 수학과 교육과정에 반영되어, 중학생을 대상으로 한 증명교육은 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측 활동을 강조하고, 그 지도의 수준을 '증명할 수 있다'에서 '이해하고 설명할 수 있다'로 완화하였다(황혜정 외, 2012). 한편, 고등학생을 대상으로 한 증명교육도 2009 개정 수학과 교육과정의 교수·학습상의 유의점(교육과학기술부, 2012)을 살펴보면, '명제의 증명은 간단한 것만 다룬다' 또는 '수학적 귀납법에 의한 증명은 원리를 이해할 수 있는 정도로 간단히 다룬다'로 제시되

1) 교신저자.

Received January 28, 2016; Revised February 25, 2016; Accepted February 29, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification: 97A30, 97D40
Key words: proof education(증명교육), the method of infinite descent(무한강하법), mathematical induction(수학적 귀납법)

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

어 있을 만큼 그 중요성이 약화되었다.

하지만 NCTM(2000)은 추론과 증명을 학교수학을 위한 규준들 가운데 하나로 제시하면서, 학생들이 추론과 증명을 수학의 중요한 측면으로 인식해야 하며, 다양한 유형의 추론과 증명방법을 선택해서 사용할 수 있어야 함을 강조하였다. 또한 김남희 외(2011)는 수학교육의 목적은 학생들의 수학적 사고를 개발하는 것이며, 추론은 그러한 수학적 사고의 근원이라 하였다. 그리고 여러 가지 추론 방식 중에서도 학생들의 논리적 사고와 비판적 사고 함양에 크게 기여할 수 있는 연역적 추론 능력을 학교수학을 학습하는 과정을 통해 신장시켜야 함을 주장하였다. 우정호(2007) 역시 수학을 하는 것은 추론하는 것이요, 수학교육의 주요 목적의 하나는 강력한 정당화의 원리인 연역적 추론 능력을 개발하는 것이라고 하였다.

이처럼 문제해결 활동에서 학생들은 추측하고 조사하여 규명한 수학적 성질의 타당성을 검증하는 정당화나 자신의 사고를 정교화 하여 표현하는 의사소통 능력이 필요한데, 여기에 추론적 사고가 필요하고 이것은 증명활동을 경험함으로써 길러질 수 있다. 따라서 교육과정의 의도가 바뀌었다고 해서 증명교육이 축소되는 것은 옳은 방향이 아니며, 수학교사나 수학교육학 연구자들은 증명에 대한 학생들의 어려움을 이해하고 다양한 관점에서 증명활동을 도울 수 있도록 새로운 수업소재나 지도방안을 개발하기 위해 노력할 필요가 있다. 즉, 현재의 증명교육에의 어려움을 증명교육의 약화가 아닌, 증명의 필요성을 인식하고 증명의 본질적 요소를 경험할 수 있는 다양한 관점의 수업소재를 개발하는 것으로 해결하려는 시도가 필요하다 하겠다.

이러한 인식을 바탕으로 본 연구에서는 증명교육의 중요한 소재 중 하나인 수학적 귀납법과 관련하여 새로운 증명 소재와 지도방안을 제안하고자 한다.

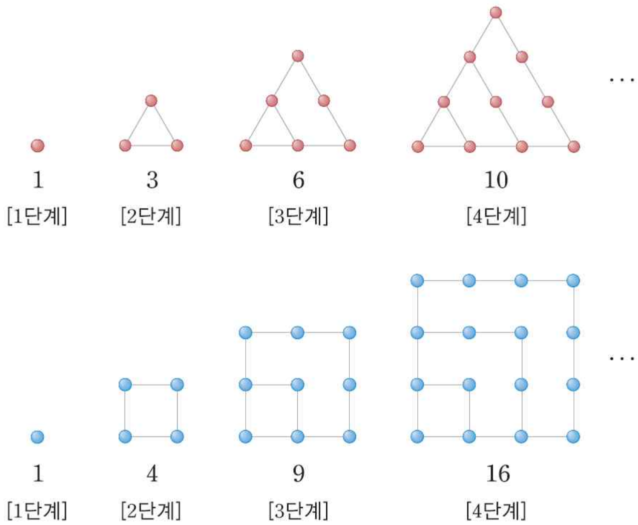
고등학교 수학Ⅱ에서 명제를 학습한 학생들은 ‘정의, 명제의 가정 또는 이미 옳다고 밝혀진 성질을 이용하여 어떤 명제가 참임을 설명하는 것(황선욱 외, 2014b)’으로 증명의 뜻을 학습하고, ‘대우를 이용한 증명법’, ‘귀류법’을 이용하여 여러 명제들을 증명한다. 이후 수열을 학습한 학생들은 수열의 합을 비롯한 자연수에 대응하는 명제들의 정당화 방법으로 ‘수학적 귀납법’을 배운다.

수학적 귀납법은 그 역사적 과정을 살펴보면, 수의 발생부터 오늘날 무한에 대한 연구가 활성화되기까지의 과정 속에서 유한의 과정을 통해 무한의 대상에 대한 여러 성질들을 규명할 수 있는 도구로 발전하였다(The Inter-IREM Commission, 1997). 하지만 수학적 귀납법은 수학적 엄밀성의 측면에서는 태생적 한계를 가진다. 본 연구는 이러한 한계를 보완할 수학적 지식으로 수학적 귀납법의 전신이라고 할 수 있는 ‘무한강하법(method of infinite descent)’에 주목하고, 이 증명법에 대한 역사적·수학적 고찰과 교수학적 고찰을 통하여 수학적 사고의 발달배경을 폭 넓게 탐구하고 증명 지도방안에 관한 시사점을 도출하고자 한다.

본 연구의 주제는 세 가지이다. 우선 무한강하법과 수학적 귀납법이 등장한 배경과 이들의 관계를 수학사적으로 고찰한 후, 두 증명법의 관계가 논리적으로 서로 동형임을 증명한다. 그리고 고등학교 <수학Ⅱ> 교과서에 제시된 문제를 무한강하법을 이용하여 증명해 보고, 이 증명과 수학적 귀납법을 이용한 증명을 서로 비교・분석한다. 또한 이를 바탕으로 무한강하법을 이용한 증명지도에 대해 논의한다.

Ⅱ. 무한강하법과 수학적 귀납법의 이론적 고찰

'만물은 수이다'는 생각을 가졌던 피타고라스학파는 밤하늘의 별을 보며 '도형수(圖形數)'를 연구했다고 한다. 이 특이한 수는 주어진 개수만큼의 점을 배열한 모양이 다각형을 이룰 때의 점의 개수를 의미한다. 즉, 도형수는 기하학적인 도형을 이루는 점들의 개수이다. [그림 1]과 같이 도형수를 나타내는 다각형의 모양에 따라 삼각수, 사각수, 오각수, ⋯ 와 같이 부른다.



[그림 1] 도형수(황선욱 외, 2014b)

여기서 [n단계]의 삼각수를 T_n이라 하면, 이것은 자연수의 합인

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

이다. 또한 [n단계]의 사각수를 S_n이라 하면, 이것은 홀수의 합인

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

이다. [그림 1]에 제시되어 있지는 않지만 [n단계]의 오각수를 P_n이라 하면, 이것은 [$n-1$단계]의 삼각수를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_n = 3T_{n-1} + n = 3\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

도형수의 규칙을 찾는 것은 수열을 기하학적으로 설명하는 것으로, 당시의 사람들은 이 도형을 무한하게 늘어놓았을 때에도 이와 같은 추론이 성립함을 직관적으로 인지할 수 있었다. 하지만 이것은 어디까지나 직관적인 이해일 뿐 무한에 대한 추론의 정당화가 아니었다.

수학의 역사를 살펴보면, 페르마(Fermat)는 당시 금기시 되었던 무한을 다룬 문제들을 찾아 이를 증명하는 취미를 가졌다고 한다. 1659년 8월 그는 당시 프랑스 왕립도서관의 관장이었던 카르카비(Carcavi)에게 다음과 같은 편지를 썼다.

> 그 책에 실린 몇몇 성질들은 일반적인 방법으로는 다루기가 매우 어려운데, 나는 그런 것들을 다루는 아주 굉장한 방법을 찾아내었소. 나는 이것을 ‘무한강하법’이라고 부른다오(The Inter-IREM Commission(1997) 재인용).

무한강하법은 귀류법의 한 종류로 ‘자연수의 정렬성(well-ordering principle)’에 그 이론적 바탕을 둔다. 즉, 공집합이 아닌 모든 자연수의 부분집합은 최소원소를 가진다는 성질을 이용한 증명법으로 아래와 같다.

무한강하법의 증명 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 항상 참임을 보이기 위해 결론을 부정한다. 그러면

어떤 자연수 n_0가 존재하여 $P(n_0)$는 거짓이다.

이다. 이것을 이용하여 n_0보다 작고 명제 $P(n_1)$이 거짓이 되게 하는 새로운 자연수 n_1을 찾는다. 즉,

어떤 자연수 n_1이 존재하여 $n_1 < n_0$이고, $P(n_1)$은 거짓이다.

유사한 방법으로, n_1보다 작고 명제 $P(n_2)$가 거짓이 되게 하는 새로운 자연수 n_2를 찾는다. 즉,

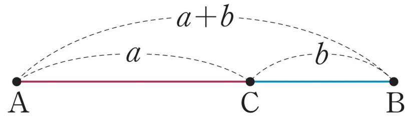
어떤 자연수 n_2가 존재하여 $n_2 < n_1$이고, $P(n_2)$는 거짓이다.

이와 같은 방법으로 순감소하는 자연수의 수열

$$n_0 > n_1 > n_2 > \cdots$$

을 얻게 되고, 이 수열의 항을 원소로 가지는 집합은 공집합이 아닌 자연수의 부분집합이 되는데, 이 집합이 최소원소를 가지지 않으므로 이것은 자연수의 정렬성에 모순이다. 따라서 주어진 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 항상 참이다.

페르마 이전의 수학자들도 이와 유사한 증명법을 사용했던 것으로 보이는데, 13세기 이탈리아의 수학자 캄파누스(Campanus)는 무한강하법을 이용하여 황금비가 무리수임을 증명하였다. 우선 [그림 2]를 이용하여 황금비의 정의를 살펴보자.



[그림 2] 황금비(황선욱 외, 2014a)

선분 AB 위의 점 C에 대하여 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{CB}$일 때, $\overline{AC} : \overline{BC}$를 황금비라고 한다. 즉, [그림 2]에서 $(a+b) : a = a : b$이므로 $a^2 = b(a+b)$에서 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b}+1$이 성립한다. 이때 황금비 $\frac{a}{b}$를 x라고 하면 황금비는 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$의 양의 해인 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. 이제 무한강하법을 이용하여 황금비 x가 무리수임을 보이자.

정리 1 황금비 x는 무리수이다.

증명 x의 정의에 따라 다음이 성립한다.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b}+1$$
$$x^2 = x+1$$

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

여기서 $x > 1$이므로 $0 < \frac{1}{x} < 1$이고, 따라서 $1 < x = 1 + \frac{1}{x} < 2$이다.

x를 유리수라 가정하자. 즉, 적당한 정수 x_1, x_2가 존재하여 $x = \frac{x_1}{x_2}$이고, x가 양수이므로 x_1, x_2를 양의 정수, 즉 자연수로 생각할 수 있다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\frac{x_1}{x_2} = 1 + \frac{x_2}{x_1}$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1}$$
$$(x_1)^2 = x_1 x_2 + (x_2)^2$$
$$(x_1)^2 - (x_2)^2 = x_1 x_2$$
$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = x_1 x_2$$
$$x_1 + x_2 = \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2}$$
$$x_1 = \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} - x_2$$
$$x_1 = \frac{(x_2)^2}{x_1 - x_2}$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 - x_2}$$

여기서 $1 < x < 2$이므로 $1 < \frac{x_1}{x_2} < 2$, 즉 $x_2 < x_1 < 2x_2$이다. 이제 $x_3 = x_1 - x_2$라 두면 $x > 1$이므로 $x_1 > x_2$이고, 따라서 x_3는 자연수이다. 그러면 주어진 식은

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2 + x_3}{x_2}$$

이다. 여기서 $1 < \dfrac{x_2}{x_3} < 2$이므로 $x_3 < x_2 < 2x_3$이다. $x_3 = x_1 - x_2$이므로

$$x_1 - 2x_3 = x_1 - 2(x_1 - x_2) = 2x_2 - x_1 > 0 \ (\because \ x_1 < 2x_2)$$

이다. 즉, $x_3 < x_2 < 2x_3 < x_1$이다. 유사한 방법으로

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_2 + x_3}{x_2} = \frac{x_3}{x_2 - x_3}$$

가 성립하고, 여기서 $x_4 = x_2 - x_3$라 두자. 이와 같은 방식으로 순감소하는 자연수의 수열

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > \cdots$$

를 얻게 되는데, 이것은 자연수의 정렬성에 모순이다. 따라서 x는 무리수이다 (The Inter-IREM Commission, 1997).

페르마가 발견한 무한강하법은 많은 명제들의 증명을 가능하게 하였는데, 특히 페르마가 디오판투스의 <산학(Atirhmetica)>에 남긴 그의 주석 가운데 아래의 명제를 주목하자.

정리 2 $x^4 + y^4 = z^2$을 만족하는 양의 정수해 x, y, z는 존재하지 않는다.

1738년 오일러(Euler)는 정리 2를 무한강하법을 이용하여 증명했는데, 이 증명의 핵심 아이디어는 부정방정식 $x^4 + y^4 = z^2$이 양의 정수해를 가지면 더 작은 양의 정수해를 가진다는 것이다[2]. 이것으로 다음의 정리 3이 쉽게 증명이 된다. 결국 이것은 페르마의 마지막 정리의 지수가 4인 경우의 증명이다.

정리 3 $x^4 + y^4 = z^4$을 만족하는 양의 정수해 x, y, z는 존재하지 않는다.

증명 부정방정식 $x^4 + y^4 = z^4$을 만족하는 양의 정수해를 $x = a$, $y = b$, $z = c$라고 하면 $x = a$, $y = b$, $z = c^2$은 부정방정식 $x^4 + y^4 = z^2$을 만족하는 양의

2) 자세한 증명은 중등수학의 수준을 넘어서기 때문에 생략한다.

정수해가 되어 정리 2와 모순이다(황석근, 2012).

자연수에 대한 명제를 증명하는 또 다른 방법으로 수학적 귀납법이 있다. 이 증명법의 엄밀한 서술은 1575년 출간된 마우롤리코(Maurolico)의 <산술에 관한 두 권의 책(Arithmetricorum libiri duo)>에서 찾아볼 수 있는데, 이 책에서 그는 ‘연속된 홀수들의 합은 제곱수이다’를 증명하였다. 즉, 앞에서 제시한 사각수의 규칙을 증명한 것이다. 이후 수학적 귀납법은 파스칼(Pascal)에 의해서 독립적으로 발견되었고, 1665년에 출판된 <산술적 삼각형에 대한 연구(Traité du triangle arithmétique)>에는 파스칼 삼각형에 대한 여러 가지 성질들이 수학적 귀납법으로 증명되어 있다. 페르마와의 서신왕래를 통해 확률론에 대한 의견을 나눈 것으로도 유명한 파스칼은 페르마의 무한강하법과는 역사고의 증명법인 수학적 귀납법을 제안했다. 먼저 수학적 귀납법 자체에 대한 증명을 살펴보자.

정리 4 (수학적 귀납법) 자연수 n에 관한 명제 $P(n)$에 대하여 다음의 두 조건이 성립한다고 하자.

(1) $P(1)$은 참이다.
(2) $P(n)$이 참이면 반드시 $P(n+1)$은 참이다.

이 때, 모든 자연수 n에 대하여 $P(n)$은 참이다.

증명 귀류법으로 증명하자. 결론을 부정하면 적당한 자연수 n_0가 존재하여 $P(n_0)$는 거짓이다. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에 대하여 집합 S를 $\mathrm{S} = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\text{은 거짓이다}\}$로 정의하면 $n_0 \in \mathrm{S}$이므로 $\mathrm{S} \neq \varnothing$이다. 따라서 자연수의 정렬성에 의해 S는 최소원소 m을 갖는다. 가정 (1)로부터 $1 \notin \mathrm{S}$이므로 $m \neq 1$이 되고, 따라서 $m > 1$이 되어 $m-1 \in \mathbb{N}$이 된다. 또한 $m-1 < m$이고 m은 S의 최소원소이므로 $m-1 \notin \mathrm{S}$이다. 즉 $P(m-1)$이 참이므로 가정 (2)에 의해 $P(m) = P((m-1)+1)$은 참이다. 이것은 $m \in \mathrm{S}$라는 사실에 모순이다. 그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $P(n)$은 참이다(정동명 · 조승제, 2004).

이 증명에서 수학적 귀납법에 정당성을 부여하는 것은 바로 자연수의 정렬성이다. 즉 무한강하법에 정당성을 부여하는 자연수의 정렬성이 수학적 귀납법에도 정당성을 부여한다. 따라서 두 증명법은 서로를 정당화하는 관계라고 생각할 수 있다. 이 두 증명법이 논리적으로 서로 동형임을 증명하기로 하자.

(추측) 명제 무한강하법과 수학적 귀납법은 논리적으로 서로 동형이다.

증명 무한강하법은 귀류법의 한 종류로 주어진 명제가 거짓이 되게 하는 자연수가 존재한다면 이 자연수보다 더 작으면서 주어진 명제 역시 거짓이 되게 하는 자연수가 항상 존재한다는 것을 보임으로써 자연수의 정렬성에 대한 모순을 이끌어내는 방법이다. 결국 이것은 다음에 제시된 조건문 p가 참임을 보이는 것으로 충분하다.

p : 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 거짓이라면, $m < n$이고 $P(m)$이 거짓인 자연수 m이 항상 존재한다.

수학적 귀납법을 이와 같은 방식의 조건문으로 나타내면 다음과 같다.

q : 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$에 대하여 $P(1)$이 참이고, 임의의 자연수 k에 대하여 명제 $P(k)$가 참이면, $P(k+1)$도 참이다.

여기서 이 두 조건문은 논리적으로 서로 동형이다. 우선, p를 이용하여 q를 유도해 보자. 결론 q를 부정하면 어떤 자연수 k에 대하여 명제 $P(k)$는 참이고 $P(k+1)$은 거짓이다. 즉 $P(k)$는 참이지만 $P(k+1)$이 거짓이 되게 하는 자연수 k가 적어도 하나 존재한다는 것이다. 이제 집합 S를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathrm{S} = \{k \mid k\text{는 자연수, } P(k)\text{는 참, } P(k+1)\text{은 거짓}\}$$

그러면 S는 공집합이 아닌 자연수의 부분집합이고, 자연수의 정렬성에 의해 최소원소 k_0를 가진다. 즉 $P(k_0)$는 참이고 $P(k_0+1)$은 거짓이다. 분명히 $k_0 \neq 1$이다. 왜냐하면 $k_0 = 1$인 경우 $k_0 + 1 = 2$가 되는데, 가정 p에 의하여 k_0+1보다 작은 자연수 k_1이 존재하여 $P(k_1)$은 거짓이다. 하지만 $P(1)$이 참이기 때문에 2보다 작은 자연수 1은 k_1이 될 수 없고, 따라서 $k_0 \neq 1$이다. 그러므로 $1 < k_1 < k_0$이다. $k_1 = 2$라면 $P(2)$는 거짓이 되고, $1 \in \mathrm{S}$이므로 이것은 k_0의 최소성에 모순이다. 따라서 $2 < k_1 < k_0$이고 $P(2)$는 참이다. 유사한 방법으로 $k_1 = 3$이라면 $P(3)$는 거짓이 되고, $2 \in \mathrm{S}$이므로 이것은 k_0의 최소성에 모순이다. 따라서 $3 < k_1 < k_0$이고, $P(3)$는 참이다. 이와 같은 방식으로 계속하면, $P(k_1)$이 거짓이 되게 하는 k_0+1보다 작은 자연수 k_1이 존재하지 않고 이것은 가정 p에 모순이다.

> 반대로, q를 이용하여 p를 유도해 보자. p를 부정하면 어떤 자연수 n이 존재하여 $P(n)$이 거짓이지만 n보다 작은 모든 자연수 m에 대하여 $P(m)$이 모두 참이다. 그러면 분명히 $P(n-1)$은 참이고 q를 적용하면 $P(n) = P((n-1)+1)$도 참이다. 이것은 가정에 모순이다.

본 연구자들의 증명에서와 같이 무한강하법과 수학적 귀납법은 자연수에 관한 명제에 대하여 논리적으로 서로 동형인 증명법이다. 즉, 수학적 귀납법으로 증명 가능한 명제는 무한강하법으로도 증명 가능하다. 또한 이들의 정당성을 보장하는 근본적인 원리는 바로 자연수의 정렬성이고, 이것을 도식화하면 [그림 3]과 같다.

무한강하법 $\Leftrightarrow$ 수학적 귀납법

$\Uparrow$ $\Uparrow$

자연수의 정렬성

[그림 3] 무한강하법과 수학적 귀납법의 관계

1889년 페아노(Peano)는 <새로운 방법으로 표현된 산술의 원칙(Arithmetices principia: nova methodo exposita)>에서 수학적 귀납법을 하나의 공리로 정착시켰다. 여기서 페아노는 자연수에 관한 다섯 가지 공리를 아래와 같이 제시하였는데, 이 중 다섯 번째 공리가 수학적 귀납법을 나타내고 있다.

> **정의 (페아노의 공리)** 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$은 다음의 다섯 가지 공리를 만족한다.
>
> (1) $1 \in \mathbb{N}$ (여기서 1은 무정의 용어)
> (2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N}$ (여기서 n^+는 자연수 n의 후자(successor))
> (3) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \neq 1$
> (4) $m, n \in \mathbb{N}, m^+ = n^+ \Rightarrow m = n$
> (5) $S \subset \mathbb{N}, 1 \in S, (n \in S \rightarrow n^+ \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}$

이처럼 무한강하법과 수학적 귀납법은 무한의 대상을 다섯 번째 공리와 같이 하나의 기호언어 또는 공식으로 나타낼 수 있다는 것에 그 의의가 있다. 푸앵카레(Poincaré, 1903)는 이것을 <과학과 가설(Science and hypothesis)>에서 다음과 같이 강조하였다.

> 재시행법[3]에 의한 추리의 본질적인 성질은, 말하자면 단독 공식에 집중되어 있기는 하나, 사실은 삼단논법을 무한하게 사용하고 있다는 것이다(푸앵카레, 김형보 역(1983) 재인용).

이 책에서 푸앵카레는 수학적 귀납법을 유한에서 무한으로 옮겨가는 도구라고 하였고, 이것은 유용한 정도가 아니라 버릴 수 없는 중요한 도구라고 강조하였다. 아무리 작은 정리라도 이것을 얻으려면 수학적 귀납법의 추리를 빌리지 않고는 불가능하며, 이 증명법을 빼면 일반적인 정리는 아무것도 존재할 수 없게 된다고 하였다.

Ⅲ. 무한강하법의 학교수학에의 적용

본 장에서는 고등학교 <수학Ⅱ> 교과서에 제시된 문제를 무한강하법을 이용하여 증명해 보고, 이것을 수학적 귀납법을 이용한 증명과 서로 비교·분석한다. 이를 바탕으로 학교수학에서 무한강하법의 적용에 관한 시사점을 도출한다.

무한강하법은 수학적 귀납법보다 그 적용의 범위가 넓다고 할 수 있다. 이것은 제Ⅱ장에서 살펴본 황금비가 무리수임을 밝힌 증명에서 알 수 있듯이 무한강하법이 수학적 귀납법과는 달리 자연수에 관한 명제가 아닌 명제에도 적용 가능한 증명법이기 때문이다. 이러한 장점을 활용하여 $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명해 보자. 우선 고등학교 <수학Ⅱ> 교과서에서 제시된 증명은 [그림 4]와 같다.

예제 2 $\sqrt{2}$는 무리수임을 증명하여라.

증명 $\sqrt{2}$가 무리수가 아니라고 가정하자.
그러면 $\sqrt{2}$는 유리수이므로 서로소인 두 자연수 m, n에 대하여

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$$

으로 나타낼 수 있다. 즉 $n=\sqrt{2}m$이고 양변을 제곱하면

$$n^2=2m^2$$

이때 n^2이 짝수이므로 n도 짝수이다.
따라서 $n=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$4k^2=2m^2,\ 즉\ 2k^2=m^2$$

이때 m^2이 짝수이므로 m도 짝수이다.
따라서 m, n이 모두 짝수이므로 m, n이 서로소라는 가정에 모순이다.
그러므로 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

[그림 4] $\sqrt{2}$의 무리수성(황선욱 외, 2014b)

---
3) 이것은 수학적 귀납법을 의미한다.

이제 무한강하법을 이용하여 $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명해 보자.

증명 1 귀류법을 사용하기 위해, 우선 $\sqrt{2}$가 무리수가 아니라고 가정하자. 그러면 $\sqrt{2}$는 유리수이므로 두 자연수 m, n에 대하여

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

으로 나타낼 수 있다. 즉 $n = \sqrt{2}m$이고 양변을 제곱하면

$$n^2 = 2m^2$$

이다. 이때 n^2이 짝수이므로 n도 짝수이다[4]. 따라서 $n = 2n'$(n'는 자연수)로 나타낼 수 있고 이것을 대입하면

$$4(n')^2 = 2m^2$$
$$2(n')^2 = m^2$$

이다. 이때 m^2이 짝수이므로 m도 짝수이다. 따라서 $m = 2m'$(m'는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$2(n')^2 = 4(m')^2$$
$$(n')^2 = 2(m')^2$$

이다. 여기서 m'와 n'는 자연수를 2로 나눈 값이므로 분명히 $m > m'$, $n > n'$이다.

이제 $(n')^2$이 짝수임을 이용하면 n'는 짝수이고, 위와 동일한 방법을 적용하면 다음과 같은 순감소하는 자연수의 수열들을 얻게 된다.

$$m > m' > m'' > \cdots, \ n > n' > n'' > \cdots$$

이것은 자연수의 정렬성에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$는 무리수이다.

[그림 4]의 증명과 증명 1를 비교해보면, 어떤 정수 m, n에 대하여 $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$이라 할 때, m과 n이 서로소라는 가정을 하지 않고 증명을 했다는 차이점이 있

4) 대우를 이용하면 쉽게 증명할 수 있다.

다. m과 n이 서로소라고 가정을 했지만 m, n이 모두 짝수이므로 이것이 가정에 모순됨을 보이는 것과, m, n을 2로 나눌 수 있고 이와 같은 논리를 반복하여 순감소하는 자연수의 수열을 구성할 수 있다는 것은 결국 같은 의미이다. 유사한 방법을 적용하면 $\sqrt{3}$이 무리수임을 밝힐 수 있다[5].

무한강하법은 순감소하는 자연수의 수열을 구성하는 방법에 따라 다양한 증명이 가능하다. Eves(1953)는 $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하는 또 다른 방법을 제시하였다.

증명 2 귀류법을 사용하기 위해, 우선 $\sqrt{2}$가 무리수가 아니라고 가정하자. 그러면 $\sqrt{2}$는 유리수이므로 두 자연수 m, n에 대하여

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

이다. $\sqrt{2}+1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$임을 이용하면

$$\frac{n}{m}+1 = \frac{1}{\dfrac{n}{m}-1} = \frac{m}{n-m}$$

이고, 따라서

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} = \frac{m}{n-m} - 1 = \frac{2m-n}{n-m} = \frac{n'}{m'}$$

이다. $1 < \sqrt{2} < 2$이므로 $1 < \dfrac{n}{m} < 2$이고 각 변에 m을 곱하면 $m < n < 2m$ 이다. 따라서

$$n' = 2m-n > 0,\ n' = 2m-n < n$$

이므로 n'는 n보다 작은 자연수이다. 이 과정을 다시 적용하면 n''가 n'보다 작은 자연수일 때 $\sqrt{2} = \dfrac{n''}{m''}$를 만들 수 있다. 이 과정은 무한히 계속될 수 있다. 그러나 자연수는 크기가 무한히 작아질 수 없으므로 $\sqrt{2}$는 유리수가 될 수 없다(Eves, 이우영 · 신항균 역(2005) 재인용).

5) 어떤 정수 m, n에 대하여 $\sqrt{3} = \dfrac{n}{m}$이라 하면 m, n이 모두 3의 배수이므로 두 수를 3으로 나눌 수 있고 이와 같은 논리를 반복할 수 있다.

이제 수학적 귀납법을 이용하여 증명할 수 있는 자연수에 관한 명제를 무한강하법을 이용하여 증명해보자. 수학적 귀납법 단원의 문제들을 살펴보면 크게 '등식의 증명'과 '부등식의 증명'으로 나눌 수 있다. 우선 부등식보다 비교적 증명이 간단한 등식을 증명하는 문제를 살펴보자. [그림 5]의 문제는 수학적 귀납법을 이용하여 등식을 증명하는 문제이다.

예제 1 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \cdots\cdots ①$$

증명 (i) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=1^2=1, \quad (\text{우변})=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=1$$

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$n=k+1$일 때,

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{k+1}{6}\{k(2k+1)+6(k+1)\}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

[그림 5] 수학적 귀납법을 이용한 등식의 증명(황선욱 외, 2014b)

이제 [그림 5]의 문제를 무한강하법을 이용하여 증명해 보자.

증명 3 우선 결론을 부정하면, 어떤 자연수 n_0가 존재하여

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n_0)^2\neq\frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}$$

이 성립한다. 여기서 기호 '$\neq$'는 '$>$ 또는 $<$'와 같은 뜻이므로

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n_0)^2 > \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}$$

또는

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n_0)^2 < \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}$$

과 같이 표현할 수도 있다. 양변에 $(n_0)^2$를 빼면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n_0-1)^2 \neq \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}-(n_0)^2$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n_0-1)^2 \neq \frac{2(n_0)^3+3(n_0)^2+n_0}{6}-\frac{6(n_0)^2}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n_0-1)^2 \neq \frac{2(n_0)^3-3(n_0)^2+n_0}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n_0-1)^2 \neq \frac{n_0(n_0-1)(2n_0-1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n_0-1)^2 \neq \frac{(n_0-1)\{(n_0-1)+1\}\{2(n_0-1)+1\}}{6}$$

유사한 방법으로, 양변에 $(n_0-1)^2$을 빼면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n_0-2)^2 \neq \frac{(n_0-2)\{n_0-1\}\{2n_0-3\}}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n_0-2)^2 \neq \frac{(n_0-2)\{(n_0-2)+1\}\{2(n_0-2)+1\}}{6}$$

따라서 [그림 5]의 등식 ①이 성립하지 않는 순감소하는 자연수의 수열

$$n_0 > n_0-1 > n_0-2 > \cdots$$

을 얻을 수 있고, 이것은 자연수의 정렬성에 모순이다. 즉 모든 자연수 n에 대하여 등식 ①이 성립한다.

무한강하법을 이용한 등식의 증명을 [그림 5]의 수학적 귀납법을 이용한 증명과 비교해 보면, 우선 초기조건의 성립 여부를 확인할 필요가 없다. 즉 $n=1$ 또는 다

른 몇몇의 자연수에 대하여 주어진 등식이 참이 되는지를 확인할 필요가 없다. 다음으로, 수학적 귀납법이 임의의 자연수 k에 대하여 참이라 가정한 등식으로부터 $k+1$에 대한 등식을 유도하기 위해 등식의 양변에 같은 수 $(k+1)^2$을 더한 반면에, 무한강하법은 어떤 자연수 n_0에 대하여 등식이 성립하지 않음을 가정한 다음, n_0보다 더 작은 자연수에 대해서도 이 등식이 성립하지 않음을 보이기 위해 식의 양변에 같은 수 $(n_0)^2$을 뺐다. 결국 무한강하법을 이용한 등식의 증명은 수학적 귀납법을 이용한 증명과는 달리, 임의의 자연수에 대한 주어진 등식의 성립을 가정하는 대신에 결론을 부정하여 어떤 자연수에 대하여 주어진 등식이 성립하지 않음을 가정한다. 이후 양변에 같은 수를 더하는 것 대신에 같은 수를 빼는데, 이것은 본질적으로 큰 차이가 없다.

다음으로 무한강하법을 이용하여 부등식을 증명하는 문제를 살펴보자. [그림 6]의 문제는 수학적 귀납법을 이용하여 부등식을 증명하는 문제이다.

예제 2 $h>0$일 때, $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$(1+h)^n>1+nh \quad \cdots\cdots ①$$

증명 (ⅰ) $n=2$일 때,

$$(\text{좌변})=(1+h)^2=1+2h+h^2, \quad (\text{우변})=1+2h$$

이때 $h^2>0$이므로

$$1+2h+h^2>1+2h$$

따라서 $n=2$일 때 ①이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k>1+kh$$

$n=k+1$일 때,

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&=(1+h)(1+h)^k\\&>(1+h)(1+kh)\\&=1+(k+1)h+kh^2\end{aligned}$$

이때 $kh^2>0$이므로

$$1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$$

$$(1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

[그림 6] 수학적 귀납법을 이용한 부등식의 증명(황선욱 외, 2014b)

이제 [그림 6]의 문제를 무한강하법을 이용하여 증명해 보자.

증명 4 우선 결론을 부정하면 2보다 크거나 같은 어떤 자연수 n_0가 존재하여

$$(1+h)^{n_0} \le 1+n_0 h$$

가 성립한다. $h>0$이므로 부등식의 양변을 $1+h$로 나누면

$$(1+h)^{n_0-1} \le \frac{1+n_0 h}{1+h}$$

$$(1+h)^{n_0-1} \le \frac{1+h-h+n_0 h}{1+h}$$

$$(1+h)^{n_0-1} \le \frac{1+h}{1+h}+\frac{-h+n_0 h}{1+h}$$

$$(1+h)^{n_0-1} \le 1+\frac{n_0-1}{1+h}h < 1+(n_0-1)h \ \ (\because \ \ 1+h>1)$$

이다. 동일한 방법으로 계속하면, [그림 6]의 부등식 ①이 성립하지 않는 순감소하는 자연수의 수열

$$n_0 > n_0-1 > n_0-2 > \ \cdots$$

을 얻을 수 있고, 이것은 자연수의 정렬성에 모순이다. 즉 모든 자연수 n에 대하여 부등식 ①이 성립한다.

무한강하법을 이용한 부등식의 증명을 [그림 6]의 수학적 귀납법을 이용한 증명과 비교해 보면, 우선 초기조건의 성립 여부를 확인할 필요가 없다. 즉 $n=1$ 또는 다른 몇몇의 자연수에 대하여 주어진 부등식이 참이 되는지를 확인할 필요가 없다. 다음으로, 수학적 귀납법이 임의의 자연수 k에 대하여 참이라 가정한 부등식으로부터 $k+1$에 대한 부등식을 유도하기 위해 부등식의 양변에 같은 수 $1+h$를 곱하고 $h>0$인 조건을 이용한 반면에, 무한강하법은 어떤 자연수 n_0에 대하여 부등식이 성립하지 않음을 가정한 다음, n_0보다 더 작은 자연수에 대해서도 이 부등식이 성립하지 않음을 보이기 위해 식의 양변에 같은 수 $1+h$을 나누었고 $h>0$인 조건을 이용하였다. 결국 무한강하법을 이용한 부등식의 증명은 수학적 귀납법을 이용한 증명과는 달리, 임의의 자연수에 대한 주어진 부등식의 성립을 가정하는 대신에 결론을 부정하여 어떤 자연수에 대하여 주어진 부등식이 성립하지 않음을 가정

한다. 이후 양변에 같은 수를 곱하는 것 대신에 같은 수를 나누는데, 이것은 본질적으로 큰 차이가 없다.

Ⅳ. 무한강하법의 적용방안

지금까지 고등학교 <수학Ⅱ> 교과서에 제시된 [그림 4], [그림 5], [그림 6]의 문제를 무한강하법을 적용하여 해결해 보았다. 무한강하법은 황금비나 $\sqrt{2}$가 무리수임을 보이는 문제와 같이 자연수에 대한 명제가 아닌 경우에도 적용할 수 있는 증명법이다. 그리고 순감소하는 자연수의 수열을 구성하는 방법에 따라 다양한 증명이 가능하다. 따라서 무한강하법은 수학적 귀납법보다 그 적용의 범위가 넓다고 할 수 있으며, 수학적 귀납법을 이용한 증명은 무한강하법을 이용한 증명과 비교했을 때 다소 획일적이라고 볼 수 있다. 또한 학교수학에서 지도되는 수학적 귀납법은 무한강하법에 비해 논리적 엄밀성이 약하다고 할 수 있다. 제Ⅱ장에서 살펴본 수학적 귀납법은 그 논리적 근거를 자연수의 정렬성에 두고 있지만, 학교수학에서 지도되는 수학적 귀납법은 도미노나 기차에 비유되는 등 그 논리적 이해를 학생의 직관에 의존한다. 박근생(1996)에 따르면, 수학적 귀납법을 배운 학생들은 이것이 과연 타당한 증명법인지에 대한 의문을 완전히 떨쳐버리지 못하고 증명의 형식적 절차에 대한 숙달에만 치중하기 쉽다고 하였다. 특히 그는 수학적 귀납법의 두 번째 조건의 정당성에 대해 $n=k$일 때 주어진 명제가 참이라고 가정하는 것은 참인 것을 증명함에 있어서 참이라고 가정하는 순환론적인 주장이라고 하며, 이것에 대한 의문을 해소하는 것이 수학적 귀납법의 학습에서 가장 중요함을 강조하였다.

결국 수학적 귀납법에 정당성을 부여하는 것은 자연수의 정렬성이다. 하지만 수학적 귀납법은 1씩 증가하는 자연수에 대한 명제가 참임을 보이는 증명법으로 최소원소에 대한 원리인 자연수의 정렬성과 직접 연관을 짓기 어렵다. 그러므로 자연수의 정렬성을 직접 이용하는 무한강하법이 수학적 귀납법보다 논리적으로 엄밀한 증명법이라고 할 수 있다.

무한강하법은 그 적용의 범위나 방법의 다양성을 고려했을 때, 수학적 귀납법보다 더 수준 높은 증명법이라고 할 수 있다. 따라서 이해수준이 조금 더 높다고 할 수 있다. 하지만 이 증명법의 논리적 엄밀성을 고려했을 때 앞에서 지적한 수학적 귀납법의 문제점에 대한 대안이 될 수 있다. 즉, 수학적 귀납법의 논리에 의문을 제기하는 학생에게 교사는 무한강하법을 소개할 수 있다. 여기서 교사는 무한강하법을 있는 그대로 제시할 필요는 없다. 왜냐하면 학교수학에서 수학적 귀납법으로 증명할 수 있는 명제들은 모두 무한강하법의 단순한 형태만으로도 증명할 수 있기 때문이다. 우정호(2011)는 학문으로서의 수학을 곧바로 학교수학으로 가르칠 수는 없으며, 수학교사의 주된 일은 가르치기 위하여 수학적 지식을 재조직하는 것

이라고 하였다.

따라서 본 연구는 학문적 지식으로써의 무한강하법이 아닌 학생들에게 가르칠 지식으로써의 무한강하법을 아래의 정리 5와 같이 제안한다.

증명법에 대한 명칭은 무한강하법이라는 새로운 이름을 제시하는 것보다 이미 학생들이 알고 있는 수학적 귀납법과 귀류법을 연결하여 '수학적 귀납법에 대한 귀류법'으로 제시하는 것이 효과적일 것이다. 그리고 무한강하법은 순감소하는 자연수의 수열을 구성하는 것이나 정리 5의 증명법은 1씩 감소하는 자연수의 수열만을 다루는 것으로 단순화하였다. 또한 자연수의 정렬성은 직접 드러내지 않고, 계산하기 쉬운 초기조건과의 모순을 유도하는 것으로 변형하였다.

정리 5 (수학적 귀납법에 대한 귀류법)
자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명할 때, 다음을 증명하면 된다.

(i) $n=k$일 때 명제 $P(n)$이 성립하지 않음을 가정하면, $n=k-1$일 때도 명제 $P(n)$이 성립하지 않는다.
(ii) $n=1$일 때 명제 $P(n)$이 성립한다.

이것은 $n \le k$인 모든 자연수 n에 대하여 명제 $P(n)$이 성립하지 않는다는 사실과 모순이다.

이제 정리 5의 증명법을 적용하여 [그림 5]와 [그림 6]에 제시된 문제를 다시 증명해 보자.

예제 1 (수학적 귀납법에 대한 귀류법을 이용한 등식의 증명) 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 귀류법으로 증명하여라.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \cdots\cdots ①$$

증명 $n=k$일 때 ①이 성립하지 않는다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 \neq \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

이다. $n=k-1$일 때,

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2 &\neq \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-k^2 \\
&= \frac{2k^3+3k^2+k}{6}-\frac{6k^2}{6} \\
&= \frac{2k^3-3k^2+k}{6} \\
&= \frac{k(k-1)(2k-1)}{6} \\
&= \frac{(k-1)\{(k-1)+1\}\{2(k-1)+1\}}{6}
\end{aligned}
$$

이다. 따라서 $n=k-1$일 때도 ①이 성립하지 않는다. 그러므로 $n \leq k$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립하지 않는다. 그러나 $n=1$일 때,

$$(\text{좌변}) = 1^2 = 1,\ (\text{우변}) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$$

이것은 모순이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

예제 2 (수학적 귀납법에 대한 귀류법을 이용한 부등식의 증명) $h>0$일 때, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 귀류법으로 증명하여라.

$$(1+h)^n > 1+nh \quad \cdots\cdots ①$$

증명 $n=k\ (k \geq 2)$일 때 ①이 성립하지 않는다고 가정하면

$$(1+h)^k \leq 1+kh$$

이다. $n=k-1$일 때, $h>0$이므로 부등식의 양변을 $1+h$로 나누면

$$
\begin{aligned}
(1+h)^{k-1} &\leq \frac{1+kh}{1+h} \\
&= \frac{1+h-h+kh}{1+h} \\
&= \frac{1+h}{1+h}+\frac{-h+kh}{1+h}
\end{aligned}
$$

$$= 1 + \frac{k-1}{1+h}h$$

이다. 이때 $1+h > 1$이므로

$$1 + \frac{k-1}{1+h}h < 1 + (k-1)h$$

$$(1+h)^{k-1} < 1 + (k-1)h$$

이다. 따라서 $n = k-1$일 때도 ①이 성립하지 않는다. 그러므로 $n \le k$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립하지 않는다. 그러나 $n = 2$일 때,

$$(\text{좌변}) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2,\ (\text{우변}) = 1 + 2h$$

이다. 이때 $h^2 > 0$이므로

$$1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$$

인데, 이것은 모순이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 수학적 귀납법의 발달에 관한 역사적 고찰을 통해 무한강하법에 주목하였고, 이 증명법이 수학적 귀납법과 논리적으로 서로 동형임을 수학적으로 증명하였다. 이후 고등학교 <수학Ⅱ> 교과서에 제시된 문제에 무한강하법을 적용하여 이 증명법이 학교수학에서 수학적 귀납법의 대안적인 역할을 할 수 있도록 이 방법이 가지는 장점을 분석하고 이를 토대로 그 적용방안을 모색하였다.

무한강하법은 수학적 귀납법에 비해 그 적용 범위가 넓다. 수학적 귀납법은 자연수에 대한 명제의 증명에 적용할 수 있는데 비해, 무한강하법은 이러한 명제뿐만 아니라 황금비나 $\sqrt{2}$가 무리수임을 밝히는 증명에도 적용될 수 있다. 그리고 무한강하법은 순감소하는 자연수의 수열을 구성하는 방식에 따라 다양한 증명이 가능하다. 이에 비해 수학적 귀납법의 증명은 다소 획일적이라고 할 수 있다. 또한 무한강하법은 수학적 귀납법보다 논리적으로 더 엄밀하다. 학교수학에서 수학적 귀납법은 그 정당성에 대한 이해를 학생들의 직관에 의존하고 있지만, 무한강하법은 자연수의 정렬성과 모순을 유도함으로 논리적으로 엄밀한 증명이 가능하다. 따라서 무한강하법은 학교수학의 증명교육에 논리적 엄밀성과 방법의 다양성을 제공할 수

있다.

이러한 고찰의 결과를 바탕으로 본 연구는 학교수학에서 무한강하법의 적용방안을 제안했는데, 순감소하는 자연수의 수열을 구성해야 하는 학문적 지식으로써의 무한강하법을 학생들에게 비교적 쉽게 지도할 수 있는 가르칠 지식으로써의 무한강하법으로 재조직하였고, 이것을 ‘수학적 귀납법에 대한 귀류법’으로 명명하였다. 또한 고등학교 <수학Ⅱ> 교과서 문제에 적용한 예시를 제시하였다.

본 연구는 수업소재 개발의 측면에서 무한강하법을 이용한 증명지도에 대한 이론적 접근을 시도하였다. 향후 실제 수업을 통해 본 연구에서 제안한 무한강하법의 적용방안이 학교수학에서 증명지도에 다양성을 부여하고 학생에게 더 깊이 있는 사고력을 요구하는 과제가 되는지, 그리고 유한의 과정을 통하여 무한의 대상을 탐구하는 도구인 이 증명법이 극한, 미분, 적분 단원에서 무한에 대한 학습을 계속하게 될 학생들의 이해의 증진에 효과가 있는지에 대한 검증이 필요하다.

참 고 문 헌

[1] 교육과학기술부(2012). 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8].

[2] 김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤(2011). 예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구 개정판, 서울: 경문사.

[3] 박근생(1996). 수학적귀납법의 지도에 관하여, 중등교육연구, 제8집, 381-396.

[4] 우정호(2007). 학교수학의 교육적 기초 제2증보판, 서울: 서울대학교출판문화원.

[5] 우정호(2011). 수학 학습-지도 원리와 방법 제2개정판 수정판, 서울: 서울대학교출판문화원.

[6] 정동명 · 조승제(2004). 실해석학 개론 제2판, 서울: 경문사.

[7] 황석근(2012). ENV 정수론, 서울: 교우미디어.

[8] 황선욱 · 강병개 · 김영록 · 윤갑진 · 김수영 · 송미현 · 이성원 · 도종훈 · 이문호 · 박효정 · 박진호(2014a). 고등학교 수학Ⅰ, 서울: ㈜좋은책신사고.

[9] 황선욱 · 강병개 · 김영록 · 윤갑진 · 김수영 · 송미현 · 이성원 · 도종훈 · 이문호 · 박효정 · 박진호(2014b). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: ㈜좋은책신사고.

[10] 황혜정 · 나귀수 · 최승현 · 박경미 · 임재훈 · 서동엽(2012). 수학교육학신론 개정증보판, 서울: 문음사.

[11] Eves, H.(1953). 수학사(이우영 · 신항균 역, 2005), 서울: 경문사.

[12] Poincaré, H.(1903). 과학과 가설(김형보 역, 1983), 서울: 단국대학교출판부.

[13] NCTM(2000). 학교수학을 위한 원리와 규준(류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙 역, 2007), 서울: 경문사.

[14] The Inter-IREM Commission(1997). History of Mathematics Histories of Problems, Paris: Ellipses.

Lee, Dong Won
Changshin High School
Changwon, 630-803, Republic of Korea

Kim, Boo Yoon
Pusan National University
Busan, 609-735, Republic of Korea

Chung, Young Woo
Kyungsung University
Busan, 608-736, Republic of Korea
e-mail : young38woo@daum.net