

D -정책과 집단도착을 갖는 이산시간 MAP/G/1 대기행렬시스템의 일량 분석

(Workload Analysis of Discrete-Time BMAP/G/1 queue under D -policy)

이 세 원^{1)*}
(Se Won Lee)

요약 본 논문에서는 D -정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 대기행렬시스템의 일량을 분석한다. 유희한 서버는 시스템에 도착한 고객집단의 서비스시간의 총합이 이미 정해진 일량 임계값 D 를 초과하면 시스템에 서비스할 고객이 없을 때까지 서비스를 제공한다. 시스템의 안정상태 일량변환벡터를 유도하고 성능최도로서 평균일량을 구하였다. 시뮬레이션을 통해 이론값들의 타당성을 검증하고 간단한 수치예제를 보였다.

핵심주제어 : 이산시간 집단 마코비안 도착과정(D-BMAP), D -정책, 서버제어정책, 일량 분석

Abstract In this paper, we consider a general discrete-time queueing system with D-BMAP(discrete-time batch Markovian arrival process) and D -policy. An idle single server becomes busy when the total service times of waiting customer group exceeds the predetermined workload threshold D . Once the server starts busy period, the server provides service until there is no customer in the system. The steady-state workload distribution is derived in the form of generating function. Mean workload is derived as a performance measure. Simulation is also performed for the purpose of verification and a simple numerical example is shown.

Key Words : Discrete-Time Batch Markovian Arrival Process(D-BMAP), D -policy, Server Control Policy, Workload Analysis

1. 서론

본 연구에서는 D -정책(delay-dependent policy)을 갖는 집단도착 이산시간 대기행렬시스템을 다룬다. D -정책은 대기행렬이론(queueing theory)

의 대표적인 서버제어정책(server control policy) 중 하나로서 유희 중인 서버가 시스템에 대기 중인 고객들의 서비스 시간의 총합(총 일량)이 임계값 D 를 초과하였을 때 재가동하는 운영정책이다.

D -정책을 갖는 대기행렬시스템의 분석은 Balachandran[1], Balachandran and Tijms[2]으로부터 시작된다. 이들의 주요관심은 D -정책을 갖는 M/G/1 대기행렬시스템에서 한 사이클 동안 일량과정이 만들어내는 면적을 이용하여 평균일량을 구하고 이를 토대로 최적의 D 를 결정하는데 있었다. 대기시간 분석은 Li and Niu[3]에 의

* Corresponding Author : swlee@pknu.ac.kr

† 이 논문은 2013학년도 부경대학교의 지원을 받아 수행된 연구임 (C-D-2013-1341)

Manuscript received Dec. 6, 2016 / revised Dec. 21, 2016 / accepted Dec. 26, 2016

1) 부경대학교 경영학부

해 연구되었다. 이들은 D -정책을 갖는 GI/G/1 대기행렬시스템의 대기시간 분포함수를 구하고 이로부터 평균대기시간을 유도하였다. 고객수 분석은 Dshalalow[4-5]에 의해 최초로 분석되어 이후 D -정책 대기행렬시스템에 대한 연구들이 활발하게 이루어졌다.

D -정책을 포함하는 시스템에 대한 연구로서 Lee et al.[6]은 D -정책을 갖는 $M^X/G/1$ 시스템의 고객수를 분석하였고, Lee et al.[7]은 D -정책과 복수휴가를 갖는 $M/G/1$ 시스템의 고객수와 대기시간을, Baek and Lee[8]는 D -정책을 갖는 $M^X/G/1$ 시스템의 대기시간을 분석하였다. Lee and Seo[9]는 D -정책과 N -정책이 혼합된 $M/G/1$ 대기행렬을, Lee et al.[10]은 D -정책과 N -정책이 혼합된 제어정책 하에서 도착간격들 간에 상관관계가 존재하는 MAP/G/1 대기행렬을 분석하였다. Lee et al.[11]은 $M/G/1$ 시스템을 대상으로 N -, D -, T -정책이 모두 혼합된 연속시간 시스템을 분석하였고, Lee et al.[12]은 단수휴가와 D -정책을 갖는 MAP/G/1 대기행렬을 분석하였다. 이상에서 언급한 모든 연구들은 모두 연속시간 시스템을 대상으로 이루어진 연구들이다.

연속시간 시스템을 대상으로 한 기존의 네트워크 도착과정의 모델링에서 대부분의 연구들이 분석이 용이하다는 이유로 포아송 도착과정을 가정하였으나 실제 인터넷 트래픽의 모델링에는 패킷 도착간격들 사이에 존재하는 상관성으로 인하여 포아송 도착과정으로는 모델링에 한계가 있음이 밝혀졌다(Paxon and Floyd[13]).

Bruneel and Kim[14]은 실제로 통신시스템, 교통시스템 등의 응용분야에서 연속시간 시스템보다는 단위시간(슬롯)을 고려하는 이산시간 시스템으로의 모델링이 더 적합하다는 것을 보였고, 최근 들어서는 D -정책을 포함한 이산시간 대기행렬시스템의 분석에 대한 연구결과들이 새롭게 등장하고 있다. 이산시간 시스템에 대한 자세한 내용은 Takagi[15]에서 찾아볼 수 있다. Lee et al.[16]은 D -정책을 갖는 Geo/G/1 대기행렬시스템의 일량, 고객수, 대기시간, 체제시간의 분포를 하나의 틀/framework 안에서 유도하였다. Lee et al.[17]은 D -정책을 갖는 이산시간 MAP/G/1

대기행렬시스템의 일량, 고객수, 대기시간, 체제시간의 분포를 분석하였다. Kim et al.[18]은 N -정책과 단수휴가, 복수휴가를 갖는 이산시간 Geo^X/G/1 대기행렬시스템의 고객수 분포를 확률적 분해성질(stochastic decomposition property)을 이용하여 분석하였다. Liu and Deng[19]은 변조된(modified) D -정책과 베르누이피드백을 가지는 이산시간 대기행렬시스템의 고객수분포를 분석하였다. Lan and Tang[20]은 N -정책과 D -정책이 혼합된 혼합제어정책을 갖는 이산시간 대기행렬시스템을 분석하였다.

도착과정이 이산시간 BMAP을 따르는 대기행렬시스템의 분석은 Lucantoni[21], Latouche and Ramaswami[22], Ramaswami and Latouche[23], Wang and Silverster[24] 등에 의해 주로 네트워크 모형에서 패킷도착과정을 묘사하는 데 사용되었다. 본 연구에서는 Lee et al.[16]이 제안한 통합적 접근방법을 응용하여 D -정책과 집단도착을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 대기행렬시스템의 대기시간, 체제시간, 고객수 분석의 근간이 되는 유희기간을 분석하고 안정상태 일량분포를 유도한다. 마지막으로 이론적 결과의 검증을 위해 시뮬레이션을 수행하고 수치예제를 보인다.

2. 시스템

본 연구의 대상 시스템은 다음과 같이 작동한다.

- (1) 고객들은 이산시간 BMAP 파라미터 행렬 $\{D_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 에 의해 집단으로 도착하여 자기 차례가 되면 서비스를 받고 이탈하는 일량 보존 시스템이다. 각 고객들의 서비스시간은 길이가 1 이상인 이산시간 일반분포 $s(x)$ 로부터 랜덤샘플링하여 취한다. 이산시간 모형으로는 LAS-DA(late arrival system with delayed access)를 가정하였다(Bruneel and Kim[14]).
- (2) 단일 서버는 유희기간 동안 쉼인 시스템 내 총 일량이 임계값 D 를 초과하면 바쁘기 시작하여 더 이상 서비스할 고객이 없을 때까지

지 선입선출(FCFS)로 서비스를 제공하는 완전 서비스 시스템이다.

(3) 고객들의 서비스시간은 집단의 도착과정과 서로 독립이다.

D -정책을 갖는 대기행렬시스템에서는 유틸기간 동안 쌓인 시스템 내 총일량, 즉 도착집단에 속한 각각의 고객들의 서비스시간의 총합에 의해 서버의 재가동이 결정된다. 따라서 시스템의 분석을 위해서는 일량 과정과 고객수 과정을 동시에 추적할 필요가 있다.

Fig. 1은 D -정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 시스템의 일량 과정과 고객수 과정을 동일한 시간 축선 상에 나타낸 것이다. Fig. 1에서는 유틸 중인 서버가 네 번째 집단의 도착(순서대로 3명, 2명, 1명, 2명)으로 바쁜기간을 시작하는 경우이다. 이 때, 각 집단은 이산시간 마코비안 도착과정(Markovian arrival process)에 의해 시스템에 도착하는데 이에 관한 자세한 내용은 Lee[25]를 참고하기 바란다. 논문의 이해를 돕기 위해 간단히 설명하자면 m 개의 독립적인 베르누이 도착과정들 사이에 일정규칙(underlying Markov chain, 이하 UMC)에 따라 움직이는 스위치가 있어 이 스위치가 연결되었을 때에만 도착으로 인정하는 새로운 도착과정으로 이해할 수 있다. 이렇게 하

면 도착간격들 사이에 존재하는 상관성을 묘사할 뿐 아니라 여러 가지 도착과정을 특수한 경우로 유연하게 표현할 수 있다. UMC 변화에 따른 시스템 변화를 추적하는 연구들 중 본 논문에서 다루는 일량 분석과 관련된 연구들로는 Baek et al. [26], Mitra [27] 등이 있으며 그 응용범위가 넓어 여러 분야에서 활발히 연구가 진행되고 있다.

자세한 분석에 앞서 논문 전반에 걸쳐 사용할 기호와 함수들을 다음과 같이 정의하자.

- S : 서비스시간의 길이(이산확률변수)
- $s(k) = \Pr(S=k)$: S 의 확률질량함수(pmf) ($s(0) = 0$)
- $S^*(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} s(k)\omega^k$: S 의 확률생성함수(PGF)
- $S^{(n)}(k) = \Pr(S_1 + S_2 + \dots + S_n \leq k)$: S 의 n 차 중합의 분포함수(DF), ($S^{(0)}(k) = 1$)
- $s^{(n)}(k) = S^{(n)}(k) - S^{(n)}(k-1)$: S 의 n 차 중합의 확률질량함수
- $D_n, (n = 0, 1, 2, \dots)$: D-BMAP의 underlying Markov chain(UMC) 파라미터 행렬
- m : UMC 위상의 갯수
- $J(k)$: k 슬롯 시작점에서의 UMC 위상

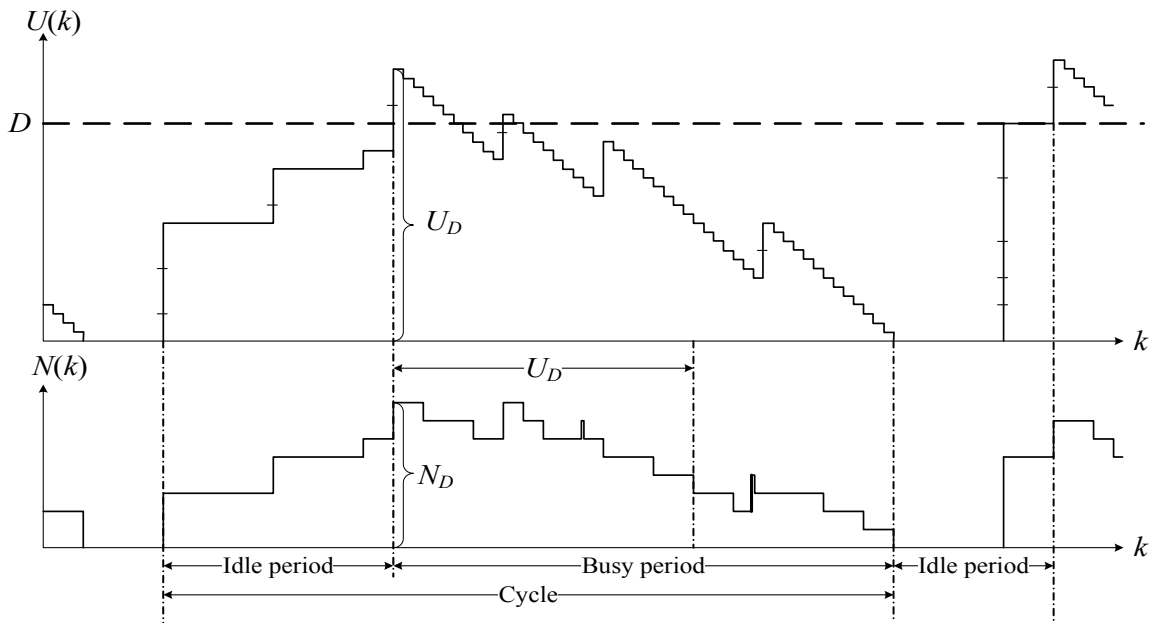


Fig. 1 A sample path of workload and queue length process of the system

$\pi_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pr[J(k) = i]$, ($i = 1, 2, \dots, m$): UMC 위상의 안정상태확률
 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$
 \mathbf{e} : 모든 원소가 1인 크기 ($m \times 1$)의 열벡터
 $\lambda_g = \boldsymbol{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}_n \mathbf{e}$: 단위시간(슬롯)당 평균도착 집단수
 $\lambda = \boldsymbol{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n \mathbf{e}$: 단위시간(슬롯)당 평균도착 고객수
 $\rho = \lambda E(S)$: 교통밀도(traffic intensity)
 $(\mathbf{E})_{i,j}$: 행렬 \mathbf{E} 의 (i, j)-원소
 N_D : 바쁜기간 시작점에서의 고객수
 U_D : 바쁜기간 시작점에서의 일량

3. 유희기간의 분석

본 장에서는 유희기간의 일량을 분석한다. 이는 유희기간에 도착하는 집단이 보는 일량과 집단의 서비스시간에 따라 잔여유희기간이 결정되고 이는 도착집단에 속한 고객들의 대기시간, 이 탈시점 고객수 과정에 영향을 미치기 때문에 시스템 분석의 초석이 된다.

유희기간 시작점의 UMC 위상 i 에서 출발한 일량과정이 유희기간 동안에 k 명의 고객들에 의해 일량 레벨 x 를 지나고 방문 직후의 UMC 위상이 j 이면 1, 그렇지 않으면 0인 지시확률변수 $I_{i,j}(k, x)$ 를 이용하여 다음의 확률을 정의하자.

$$\phi_{i,j}(k, x) = \Pr[I_{i,j}(k, x) = 1] \quad (3.1)$$

$\phi_{i,j}(k, x)$ 를 (i, j)-원소로 갖는 크기 ($m \times m$)의 행렬을 $\boldsymbol{\Phi}(k, x)$ 로 정의하면 다음의 정리를 얻는다.

<정리 1>

$$\boldsymbol{\Phi}(k, x) = \begin{cases} \mathbf{I}, & (k=0, x=0) \\ \mathbf{I}_k^* \cdot s^{(k)}(x), & \\ (x=1, 2, \dots, D)(k=1, 2, \dots, x) \end{cases} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{I}_k^* = \sum_{n=1}^k (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_n \mathbf{I}_{k-n}^*, \quad (\mathbf{I}_0^* = \mathbf{I}). \quad (3.2b)$$

(증명) 유희기간 동안의 일량 과정은 0에서 시작하므로 일량 레벨 0, 고객수 레벨 0를 방문할 확률행렬은 \mathbf{I} 이다. 일량 과정이 k 명의 고객으로 일량 레벨 x 를 지나려면, k 명의 서비스시간의 총합이 x 이면 된다. 유희기간 동안 고객수 과정이 고객수 레벨 k 를 방문할 확률행렬 \mathbf{I}_k^* 는 첫 번째 도착한 집단의 크기에 조건을 취하면 식 (3.2b)와 같다. 따라서 식 (3.2a)를 얻는다.

바쁜 기간 종료점에서의 UMC 위상을 나타내는 확률벡터를 $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ 라고 하자. 임의의 유희기간의 길이를 확률변수 I_D 로 정의하면 평균유희기간은 다음과 같다. $\boldsymbol{\kappa}$ 는 5장에서 구할 것이다.

<정리 2>

$$E(I_D) = \boldsymbol{\kappa} \sum_{x=0}^D \sum_{k=0}^x \boldsymbol{\Phi}(k, x) (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{e} \quad (3.3)$$

(증명) 행렬 $(\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1}$ 는 다음 집단도착까지 각각의 UMC 위상에 머무는 평균시간이다 (Lucantoni[22]). 따라서, 직전 바쁜기간 종료점에서의 UMC 위상이 주어졌다는 조건 하에 유희기간 동안의 확률과정이 일량 레벨 x 과 고객수 레벨 k 를 동시에 방문할 때마다 평균적으로 $(\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1}$ 시간 동안 각각의 UMC 위상에 머무므로 모든 경우를 고려하면 식 (3.3)과 같이 평균유희기간을 구할 수 있다.

이제 임의의 슬롯 시작점에서 서버가 유희하고, 그 때의 일량이 x , UMC 위상이 j 일 결합확률을 $u_x^{idle}(j)$ 로 정의하자. $u_x^{idle}(j)$ 를 원소로 갖는 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_x^{idle} = (u_x^{idle}(1), \dots, u_x^{idle}(m)).$$

행렬 $(\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1}$ 이 평균도착간격의 길이이므로 시간평균확률에 의해 증명 없이 다음의 정리를 얻을 수 있다.

<정리 3>

$$\mathbf{u}_x^{idle} = (1 - \rho) \frac{\kappa \sum_{k=0}^x \Phi(k, x) (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1}}{E(I_D)} \quad (3.4)$$

for $x = 0, 1, 2, \dots, D$.

유휴기간 동안의 확률과정은 바쁜기간 시작점에서의 정보를 결정한다. 임의의 사이클에서 유휴기간 시작점에서의 UMC 위상을 J_{idle} , 바쁜기간 시작점에서의 고객수, 일량, UMC 위상을 각각 N_D, U_D, J_{busy} 라고 하면 이들 결합확률을 (i, j) -원소로 갖는 행렬 $\mathbf{N}_D(n), \mathbf{U}_D(x)$ 는 <정리 4>와 같다.

<정리 4>

$$\mathbf{N}_D(n) = \begin{cases} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_1 \sum_{x=D+1}^{\infty} s(x), & (n=1) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_n \sum_{x=D+1}^{\infty} s^{(n)}(x) \\ + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{y=n-1}^D \sum_{k=1}^y [\Phi(k, y) \times \\ (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_{n-k} s^{(n-k)}(x-y)], & (n \geq 2) \end{cases} \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{U}_D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_n s^{(n)}(x) \quad (3.5b)$$

$$+ \sum_{n=2y=n-1}^{\infty} \sum_{k=1}^D \sum_{y=1}^y [\Phi(k, y) \times (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_{n-k} s^{(n-k)}(x-y)], \quad (x \geq D+1)$$

(증명) 바쁜기간 시작점에서 고객수가 n 명이려면 유휴기간 동안 처음으로 도착한 집단의 총서비스 시간이 $D+1$ 이상이고 집단의 크기가 n 이면 된다. $n \geq 2$ 인 경우에는 바쁜기간 시작점에서 대기 중인 집단의 수가 2개 이상도 가능하므로 마지막 도착집단의 크기에 조건을 취하여 모든 경우에 대하여 정리하면 식 (3.5a)를 얻는다.

또한, 바쁜기간 시작점에서의 일량이 $x (x > D)$ 이려면 유휴기간 동안 처음으로 도착한 집단의 총일량이 x 이거나, D 를 넘지 않는 일량 y 에 머물다가 마지막 도착한 집단의 총일량이 $(x-y)$ 이면 되므로 이를 정리하면 식 (3.5b)를 얻는다.

$$\mathbf{N}_D^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{N}_D(n) z^n \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{U}_D^*(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} \mathbf{U}_D(x) \omega^x \quad (3.6b)$$

이제 $[\mathbf{I}_D^*(\omega)]_{ij}$ 를 D -정책 하에서 유휴기간 시작점에서의 UMC 위상이 i 라는 조건 하에 바쁜기간 시작점에서의 UMC 위상이 j 인 유휴기간의 길이에 대한 조건부 결합변환이라고 정의하자. 이는 바쁜기간 시작점에서의 고객수에 조건을 취하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

<정리 5>

$$\mathbf{I}_D^*(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} (\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}_0)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}_k s^{(k)}(x) \omega \quad (3.7)$$

$$+ \sum_{x=1}^D (\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}_0)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}_k s^{(k)}(x) \omega \mathbf{I}_{D-x}^*(\omega)$$

(증명) 식 (3.7)에서 $(\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}_0)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}_k \omega$ 는 임의 시점(또는 도착 직후)의 UMC 위상이 주어진 조건 하에서 다음 집단도착까지의 시간과 그 도착 직후의 위상을 나타내는 결합변환행렬이다. 유휴기간 동안 처음으로 도착한 집단의 총일량에 조건을 취하면 식 (3.7)을 얻는다.

유휴기간 동안 처음으로 도착한 집단의 총일량 x 가 임계값 D 를 초과하면 그 도착간격이 유휴기간이 되고, 그렇지 않으면($x \leq D$) 도착시점에서의 잔여유휴기간은 $(D-x)$ -정책을 갖는 이산 시간 BMAP/G/1 시스템의 유휴기간과 확률적으로 동일하므로 식 (3.7)의 우변의 마지막 항을 얻는다.

4. 일량 분석

임의의 슬롯 시작점에서의 일량, 그 때의 UMC 위상, 서버의 상태를 포함한 결합확률을

다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} u_{x,j}^{idle} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Pr[U(k) = x, J(k) = j, \text{server is idle}], \\ &\quad (x = 0, 1, \dots, D) \\ u_{x,j}^{busy} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Pr[U(k) = x, J(k) = j, \text{server is busy}], \\ &\quad (x = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

각각의 결합확률벡터와 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x^{idle} &= (u_{x,1}^{idle}, u_{x,2}^{idle}, \dots, u_{x,m}^{idle}), \\ \mathbf{u}_{idle}^*(\omega) &= \sum_{x=0}^D \mathbf{u}_x^{idle} \omega^x, \\ \mathbf{u}_x^{busy} &= (u_{x,1}^{busy}, u_{x,2}^{busy}, \dots, u_{x,m}^{busy}), \\ \mathbf{u}_{busy}^*(\omega) &= \sum_{x=1}^{\infty} \mathbf{u}_x^{busy} \omega^x. \end{aligned}$$

위의 정의에 따르면 임의의 슬롯 시작점에서의 일량분포에 관한 변환은 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^*(\omega) = \mathbf{u}_{idle}^*(\omega) + \mathbf{u}_{busy}^*(\omega) \quad (4.1)$$

먼저 임의의 유희시점에서의 일량에 대한 벡터 생성함수(이하 벡터GF) $\mathbf{u}_{idle}^*(\omega)$ 는 식 (3.4)로부터 간단히 유도된다. 독자들은 $\mathbf{u}_{idle}^*(\omega)$ 가 임의의 시점이 유희기간일 확률을 포함하고 있음을 상기하기 바란다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{idle}^*(\omega) &= \sum_{x=0}^D \omega^x \mathbf{u}_x^{idle} \\ &= \frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{E(I_D)} \left[\mathbf{I} + \sum_{x=1}^D \omega^x \boldsymbol{\Phi}(k, x) \right] (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

바쁜기간 중 임의의 슬롯 시작점에서의 일량은 바쁜기간의 한 슬롯 동안 발생하는 일량의 변화를 추적하여 다음의 시스템방정식으로부터 구한다. 임의의 슬롯 시작점에서 서버가 바쁘고 일량이 x 인 상황은 임의의 슬롯 시작점이 바쁜기간 시작점인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어진다. 두 가지 상황에 대하여 모두 고려하여 정리하면 다음과 같은 시스템 방정식을 얻는다.

$$\mathbf{u}_0^{busy}(k+1) = \mathbf{u}_1^{busy}(k) \mathbf{D}_0 \quad (4.3a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x^{busy}(k+1) &= \mathbf{u}_{x+1}^{busy}(k) \mathbf{D}_0 \\ &+ \sum_{y=1}^x \mathbf{u}_{x-y+1}^{busy}(k) \sum_{n=1}^y \mathbf{D}_n s^{(n)}(y) \\ &+ I_{(x>D)} \left\{ \mathbf{u}_0^{idle}(k) \sum_{n=1}^x \mathbf{D}_n s^{(n)}(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{y=1}^D \mathbf{u}_{x-y}^{idle}(k) \sum_{n=1}^y \mathbf{D}_n s^{(n)}(y) \right\}, \quad (x \geq 1) \end{aligned} \quad (4.3b)$$

식 (4.3a), (4.3b)에 $k \rightarrow \infty$ 를 취하여 안정상태 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_0^{busy} = \mathbf{u}_1^{busy} \mathbf{D}_0 \quad (4.3c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x^{busy} &= \mathbf{u}_{x+1}^{busy} \mathbf{D}_0 \\ &+ \sum_{y=1}^x \sum_{n=1}^y \mathbf{u}_{x-y+1}^{busy} \mathbf{D}_n s^{(n)}(y) \\ &+ I_{(x>D)} \left\{ \mathbf{u}_0^{idle} \sum_{n=1}^x \mathbf{D}_n s^{(n)}(x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{y=1n=1}^D \sum_{n=1}^y \mathbf{u}_{x-y}^{idle} \mathbf{D}_n s^{(n)}(y) \right\}, \quad (x \geq 1) \end{aligned} \quad (4.3d)$$

바쁜기간 임의시점의 일량에 대한 결합변환행렬을 $\mathbf{u}_{busy}^*(\omega) = \sum_{x=1}^{\infty} \omega^x \mathbf{u}_x^{busy}$ 라고 하자. 식(4.3c), 식 (4.3d)의 양변에 ω^x 를 곱하고 모두 더하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{busy}^*(\omega) + \mathbf{u}_0^{busy} &= \mathbf{u}_{busy}^*(\omega) \mathbf{D}_0 \omega^{-1} \\ &+ \sum_{x=1}^{\infty} \omega^x \sum_{y=1}^x \sum_{n=1}^y \mathbf{u}_{x-y+1}^{busy} \mathbf{D}_n s^{(n)}(y) \\ &+ \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{n=1}^x \mathbf{u}_0^{idle} \mathbf{D}_n s^{(n)}(x) \\ &+ \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{y=1n=1}^D \sum_{n=1}^y \mathbf{u}_{x-y}^{idle} \mathbf{D}_n s^{(n)}(y) \end{aligned} \quad (4.3e)$$

위 식에서 우변의 두 번째 항을 정리하면 다음

과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{x=1}^{\infty} \omega^x \sum_{y=1}^x \sum_{n=1}^y \mathbf{u}_{x-y+1}^{busy} \mathbf{D}_n s^{(n)}(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y=n}^{\infty} s^{(n)}(y) \omega^y \sum_{x=y}^{\infty} \omega^{x-y} \mathbf{u}_{x-y+1}^{busy} \mathbf{D}_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [S^*(\omega)]^n \mathbf{u}_{busy}^*(\omega) \mathbf{D}_n \omega^{-1} \\ &= \mathbf{u}_{busy}^*(\omega) [\mathbf{D}[S^*(\omega)] - \mathbf{D}_0] \omega^{-1} \end{aligned} \quad (4.3f)$$

식 (3.4), (3.6a), (3.6b)를 이용하면 식 (4.3e)의 우변의 3번째, 4번째 항은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \left[\sum_{n=1}^x \mathbf{u}_0^{idle} \mathbf{D}_n s^{(n)}(x) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{y=1n=1}^D \sum_{y=1}^y \mathbf{u}_{x-y}^{idle} \mathbf{D}_n s^{(n)}(y) \right] \\ &= \frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{E(I_D)} \mathbf{U}_D^*(\omega) \end{aligned} \quad (4.3g)$$

다시 쓰면,

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{busy}^*(\omega) [\omega \mathbf{I} - \mathbf{D}[S^*(\omega)]] \\ &= -\mathbf{u}_0^{busy} \omega + \frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{E(I_D)} \mathbf{U}_D^*(\omega) \omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

식 (4.4)의 \mathbf{u}_0^{busy} 는 단위시간당 바쁜기간이 끝나는 평균횟수와 그 때의 UMC 위상을 나타내는 벡터이다. 임의의 바쁜기간 끝점에서의 UMC 위상을 나타내는 벡터는 $\boldsymbol{\kappa}$ 이므로,

$$\mathbf{u}_0^{busy} = \frac{\boldsymbol{\kappa}}{E(C)} = \frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{E(I_D)}. \quad (4.5)$$

식 (4.5)를 이용하여 식 (4.4)를 정리하면,

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{busy}^*(\omega) \\ &= \frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{E(I_D)} [\mathbf{U}_D^*(\omega) - \mathbf{I}] [\omega \mathbf{I} - \mathbf{D}[S^*(\omega)]]^{-1} \omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

식 (4.1), (4.2), (4.6)으로부터 임의시점에서의 일량의 벡터GF $\mathbf{u}^*(\omega)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(\omega) &= \frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{E(I_D)} \times \\ & \left\{ \left[\mathbf{I} + \sum_{x=1}^D \omega^x \boldsymbol{\Phi}(k, x) \right] (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \right. \\ & \left. + [\mathbf{U}_D^*(\omega) - \mathbf{I}] [\omega \mathbf{I} - \mathbf{D}[S^*(\omega)]]^{-1} \omega \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

5. $\boldsymbol{\kappa}$ 의 결정

사이클의 시작점(바쁜기간의 종료점)에서의 UMC 위상을 나타내는 확률벡터 $\boldsymbol{\kappa}$ 는 사이클 시작점에서의 UMC 위상이 주어졌다는 조건 하에 사이클 끝점의 UMC 위상과 그 사이클 동안 서비스 받은 고객수에 대한 행렬 GF $\mathbf{K}(z)$ 로부터 구한다(Lucantoni[22], Lucantoni and Neuts[28]).

<정리 6>

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}(z) \\ &= \sum_{x=D+1}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_1 s(x) [\mathbf{D}(\mathbf{G}(z))]^x \\ & \quad + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_k z^k s^{(k)}(x) [\mathbf{D}(\mathbf{G}(z))]^x \\ & \quad + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} z^k \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{y=1}^D \left\{ \mathbf{I}_n^* s^{(n)}(y) (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \right. \\ & \quad \left. \times \mathbf{D}_{k-n} s^{(k-n)}(x-y) [\mathbf{D}(\mathbf{G}(z))]^x \right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

여기서, $\mathbf{G}(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n [\mathbf{G}(z)]^n$ 이다.

(증명) 임의의 사이클 시작점에서의 UMC 위상이 i 라는 조건 하에 바쁜기간 시작점에서의 고객수가 k_1 이고, 유휴기간 동안 도착한 마지막 고객이 남기는 고객수가 k_2 , 그 때의 위상이 j 일 결합확률을 (i, j) -원소로 갖는 확률행렬 $\mathbf{Q}(k_1, k_2)$ 를 정의하자. 이 때, k_1 명의 고객들은 모두 유휴기간 중에 도착한 고객들이고, k_2 명의 고객들은 모두 바쁜기간 중에 도착한 고객들이다. 이렇게 고객의 유형을 둘로 나누어 분석하는 이유는 D -정책을 갖는 대기행렬시스템에서는 유휴기간 동안 도착한 서비스시간들이 서로 독립이 아니기 때문이다.

UMC 위상 i 에서 시작해서 x 슬롯 동안 고객

이 n 명 도착하고 도착 직후의 UMC 위상이 j 일 확률 $p(n, x)_{ij}$ 의 행렬을 $\mathbf{P}(n, x)$ 라고 하면 $\mathbf{Q}(k_1, k_2)$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{Q}(k_1, k_2) = \begin{cases} \sum_{x=D+1}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_1 s(x) \mathbf{P}(k_2, x), & (k_1 = 1, k_2 \geq 0) \\ \sum_{x=D+1}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_{k_1} s^{(k_1)}(x) \mathbf{P}(k_2, x) \\ + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k_1-1} \sum_{y=1}^D \mathbf{I}_n^* s^n(y) (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \\ \times \mathbf{D}_{k_1-n} s^{(k_1-n)}(x-y) \mathbf{P}(k_2, x) & (k_1 \geq 2, k_2 \geq 0) \end{cases} \quad (5.2)$$

$\mathbf{Q}(k_1, k_2)$ 의 행렬 생성함수를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{Q}^*(z_1, z_2) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \mathbf{Q}(k_1, k_2) \quad (5.3)$$

식 (5.2)를 대입하여 정리하면 식 (5.3)은 다음과 같다.

$$\mathbf{Q}^*(z_1, z_2) = \sum_{x=D+1}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_1 z_1 s(x) [\mathbf{D}(z_2)]^x \\ + \sum_{k_1=2}^{\infty} z_1^{k_1} \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k_1-1} \sum_{y=1}^D \mathbf{I}_n^* s^n(y) (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \\ \times \mathbf{D}_{k_1-n} s^{(k_1-n)}(x-y) [\mathbf{D}(z_2)]^x \quad (5.4)$$

식 (5.4)에서 유휴기간 동안 도착한 고객을 나타내는 z_1 에 z 를 대입하고, 바쁜기간을 시작하여 U_D 의 길이 x 동안 도착한 고객들은 각각 기본기간 $\mathbf{G}(z)$ 를 형성하므로 $z_2 = \mathbf{G}(z)$ 를 대입하면 식 (5.1)을 얻는다(Lucantoni and Neuts[28]).

<정리 6>으로부터 다음과 같이 $\mathbf{K}(z)|_{z=1} = \mathbf{K}$ 를 얻는다.

$$\mathbf{K} = \sum_{x=D+1}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_1 [\mathbf{D}(\mathbf{G})]^x s(x) \quad (5.5) \\ + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_k [\mathbf{D}(\mathbf{G})]^x s^{(k)}(x) \\ + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{y=1}^D \mathbf{I}_n^* (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \\ \times \mathbf{D}_{k-n} [\mathbf{D}(\mathbf{G})]^x s^{(n)}(y) s^{(k-n)}(x-y)$$

$\boldsymbol{\kappa}$ 는 식 (5.5)에서 구한 \mathbf{K} 의 정상확률벡터이므로 최종적으로 다음 관계식으로부터 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa} \mathbf{K}, \quad \boldsymbol{\kappa} \mathbf{e} = 1 \quad (5.6)$$

6. 성능척도

본 장에서는 시스템의 성능척도로서 평균일량을 유도한다. 표현의 간소화를 위해 어떤 행렬 생성함수 $\mathbf{H}(\omega)$ 에 대하여 다음을 정의하자.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\omega)|_{\omega=1}, \quad \mathbf{H}^{(n)} = \left. \frac{d^n}{d\omega^n} \mathbf{H}(\omega) \right|_{\omega=1}$$

임의의 슬롯 시작점에서의 평균일량 $E(U)$ 는 다음과 같다.

$$E(U) = \mathbf{u}^{*(1)} \mathbf{e} = \mathbf{u}_{idle}^{*(1)} \mathbf{e} + \mathbf{u}_{busy}^{*(1)} \mathbf{e} \quad (6.1)$$

유휴기간 동안의 평균일량은 식 (4.2), 식 (6.1)로부터 다음과 같다.

$$E(U_{idle}) = \mathbf{u}_{idle}^{*(1)} \mathbf{e} \quad (6.2) \\ = \frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{E(I_D)} \sum_{x=1}^D \sum_{k=0}^x x \boldsymbol{\Phi}(k, x) (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{e}$$

바쁜기간 임의시점에서의 평균일량을 구하기 위하여 식 (4.6)을 다음과 같이 다시 쓰자.

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{busy}^*(\omega) [\omega \mathbf{I} - \mathbf{D}[S^*(\omega)]] \\ &= \frac{(1-\rho)\kappa}{E(I_D)} [\mathbf{U}_D^*(\omega) - \mathbf{I}]\omega \end{aligned} \quad (6.3)$$

식 (6.3)를 ω 에 대하여 1차 미분, 2차 미분한 후 각각의 식에 $\omega = 1$ 을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{busy}^{*(1)}(\mathbf{I} - \mathbf{D}) \\ &= \frac{(1-\rho)\kappa}{E(I_D)} [\mathbf{U}_D^{*(1)} + \mathbf{U}_D^* - \mathbf{I}] \\ & \quad - \mathbf{u}_{busy}^* \left[\mathbf{I} - \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S) \right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{busy}^{*(2)}(\mathbf{I} - \mathbf{D}) + 2\mathbf{u}_{busy}^{*(1)} \left[\mathbf{I} - \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S) \right] \\ &= \frac{(1-\rho)\kappa}{E(I_D)} [\mathbf{U}_D^{*(2)} + 2\mathbf{U}_D^{*(1)}] \\ & \quad + \mathbf{u}_{busy}^* \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \mathbf{D}_n E^2(S) + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n S^{*(2)} \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

식 (6.4)에서 $\mathbf{D} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{D}_n$ 이다. 그리고 $(\mathbf{I} - \mathbf{D})$ 는 역행렬이 존재하지 않으므로 양변에 $\mathbf{u}_{busy}^{*(1)}\mathbf{e}\pi$ 를 더하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{busy}^{*(1)} \\ &= \frac{(1-\rho)\kappa}{E(I_D)} [\mathbf{U}_D^{*(1)} + \mathbf{U}_D^* - \mathbf{I}][\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{e}\pi]^{-1} \\ & \quad - \mathbf{u}_{busy}^* \left[\mathbf{I} - \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S) \right][\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{e}\pi]^{-1} \\ & \quad + \mathbf{u}_{busy}^{*(1)}\mathbf{e}\pi \end{aligned} \quad (6.6)$$

식 (6.5)에 \mathbf{e} 를 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{busy}^{*(1)} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S) \mathbf{e} \\ &= \mathbf{u}_{busy}^{*(1)} \mathbf{e} - \frac{1-\rho}{2E(I_D)} [E(U_D^2) + E(U_D)] \\ & \quad - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{busy}^* \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \mathbf{D}_n E^2(S) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n S^{*(2)} \right] \mathbf{e} \end{aligned} \quad (6.7)$$

식 (6.6)에 $\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S) \mathbf{e}$ 를 곱한 후,

$\mathbf{u}_{busy}^* = \pi - \mathbf{u}_{idle}^*, \rho = \lambda E(S) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n \mathbf{e} E(S)$ 를 이용하여 식 (6.7)과 함께 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(U_{busy}) &= \mathbf{u}_{busy}^{*(1)} \mathbf{e} \\ &= \frac{1}{2E(I_D)} [E(U_D^2) + E(U_D)] \\ & \quad + \frac{\kappa}{E(I_D)} [\mathbf{U}_D^{*(1)} + \mathbf{U}_D^* - \mathbf{I}][\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{e}\pi]^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S) \mathbf{e} \\ & \quad + \frac{1}{2(1-\rho)} (\pi - \mathbf{u}_{idle}^*) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \mathbf{D}_n E^2(S) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n S^{*(2)} \right] \mathbf{e} \\ & \quad - \frac{1}{1-\rho} (\pi - \mathbf{u}_{idle}^*) \left[\mathbf{I} - \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S) \right][\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{e}\pi]^{-1} \\ & \quad \times \end{aligned} \quad (6.8)$$

식 (6.8)의 \mathbf{u}_{idle}^* 은 식 (4.2)로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{idle}^* &= \sum_{x=0}^D \mathbf{u}_x^{idle} \\ &= \frac{(1-\rho)\kappa}{E(I_D)} \left[\mathbf{I} + \sum_{x=1}^D \Phi(k, x) \right] (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \end{aligned} \quad (6.9)$$

7. 수치예제

본 연구의 분석을 통하여 구한 이론값들과 모의실험결과를 비교·확인한다. 이론값은 Mathematica 6을, 모의실험결과는 SIMSCRIPT II.5를 사용하여 구하였다. 여러 가지 수치 예에 대하여 확인해 본 결과 모두 백분율상대오차 0.2% 이내의 결과를 얻을 수 있었으며, Table 1은 그 중 일부이다. 서비스시간의 분포는 기하분포(geometric distribution)와 음이항분포(negative binomial distribution)를 사용하였으며 각 분포의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$\text{Geom}(p): s(k) = (1-p)^{k-1}p, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\text{NB}(n,p): s(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n},$$

$$(k = n, n+1, \dots)$$

(Example)

고객집단의 도착이 없이 UMC 위상만 변화하는 확률은 D_0 에, n 명으로 구성된 고객 집단이 도착하여 UMC 위상을 바꾸는 확률은 각각 D_n 에 포함되어 있다. 본 예제에서는 UMC 위상이 2개이고, 고객집단의 크기가 최대 2명인 경우를 예로 들었다.

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.1 \\ 0.5 & 0.35 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$D = 15, \lambda_g = 0.075, \lambda = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n D_n \mathbf{e} = 0.1.$$

$$\text{상대오차}(\%) = \frac{T-A}{T} \times 100(\%)$$

(T :이론값, A :시뮬레이션 결과)

Table 1 Theoretical and simulation values of mean workload

Measure	$E(U)$	
	Geom(1/9)	NB(2,2/3)
Service distribution	Geom(1/9)	NB(2,2/3)
ρ	0.9	0.3
Theoretical value(T)	100.2130	7.7654
Simulation value(A)	100.3749	7.7625
Relative error(%)	-0.1617	0.0377

8. 결론 및 추후연구과제

본 연구에서는 D -정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 대기행렬시스템의 안정상태 일량을 분석하였다. 안정상태 일량 벡터생성함수를 유도하고 이로부터 성능척도로서 평균일량을 계산하여 시뮬레이션 결과와 비교하였다.

추후연구과제로는 본 연구의 결과들을 바탕으로 시스템의 고객수, 대기시간, 체재시간을 분석이 필요하다. 그리고 D -정책을 갖는 $\text{Geo}^x/\text{G}/1$ 대기행렬시스템과의 비교를 통하여 고객들의 도착간격 사이에 존재하는 상관관계가 시스템의 성

능척도에 어떠한 영향을 미치는지를 살펴보는 것도 좋을 것이다. Lee et al.[29]과 같이 시뮬레이션 프로그램을 바탕으로 작업처리 우선순위에 따른 성능척도의 변화를 살펴보는 것도 의미가 있다. D -정책과 다른 서버 제어정책이 포함된 D -BMAP/G/1 대기행렬시스템의 분석은 보다 유연한 시스템의 운영을 위해 이론적 근거를 제시할 수 있을 것이다. 또한 본 논문에서 대상으로 한 LAS-DA 외에 다른 이산시간시스템(EAS, LAS)을 분석한다면 보다 폭넓은 적용이 가능할 것이다.

References

- [1] Balachandran, K.R., "Control Policies for a Single Server System", Management Science, Vol. 19, No. 9, pp. 1013-1018, 1973.
- [2] Bachandran, K.R. and Tijms, H., "On the D -policy for the M/G/1 Queue", Management Science, Vol. 21, No. 9, pp. 1073-1076, 1975.
- [3] Li, J. and Niu, S.C., "The Waiting Time Distribution for the GI/G/1 Queue under the D -policy", Probability in the Engineering and Informational Sciences, Vol. 6, No. 3, pp. 287-308, 1992.
- [4] Dshalalow, J.H., "Queueing Processes in Bulk Systems under the D -policy", Journal of Applied Probability, Vol. 35, No. 4, pp. 976-989, 1998.
- [5] Dshalaow, J.H., "A Note on D -policy Bulk Queueing Systems", Journal of Applied Probability, Vol. 38, No. 1, pp. 280-283, 2001.
- [6] Lee, H. W., Baek, J. W. and Jeon, J., "Analysis of the $M^X/\text{G}/1$ Queue under D -policy", Stochastic Analysis and Applications, Vol. 23, No. 4, pp. 785-808, 2005.
- [7] Lee, H. W., Cheon, S. H. and Seo, W. J., "Queue Length and Waiting Time of the M/G/1 Queue under the D -policy and

- Multiple Vacations”, Queueing Systems, Vol. 54, No. 4, pp. 261-280, 2006.
- [8] Baek, J. W. and Lee, H. W., “Waiting Time Analysis of a Batch Arrival Queue under a Workload Control”, International Journal of Industrial Engineering Vol. 14, No. 3, pp. 298-306, 2007.
- [9] Lee, H. W. and Seo, W. J., “The Performance of the M/G/1 Queue under the Dyadic $\text{Min}(N,D)$ -policy and Its Cost Optimization”, Performance Evaluation, Vol. 65, No. 10, pp. 742-758, 2008.
- [10] Lee, H. W., Seo, W. J., Lee, S. W. and Jeon, J., “Analysis of MAP/G/1 Queue under $\text{Min}(N,D)$ -policy”, Stochastic Models, Vol. 26, No. 1, pp. 98-123, 2010.
- [11] Lee, H. W., Seo, W. J. and Lee, S. W., “Analysis of the M/G/1 Queueing System under the Triadic (N,D,T) -policies”, Quality Technology and Quantitative Management, Vol. 8, No. 3, pp. 333-357, 2011.
- [12] Lee, H. W., Cheon, S. H., Lee, S. W. and Baek, J. W., “MAP/G/1 Queue under Workload Control and Postprocessing”, Stochastic Analysis and Applications, Vol. 27, No. 2, pp. 331-352, 2009.
- [13] Paxson, V. and Floyd, S., “Wide Area Traffic: The Failure of Poisson Modeling”, IEEE/ACM Transactions on Networking, Vol. 3, No. 3, pp. 226-244, 1995.
- [14] Bruneel, H. and Kim, B. G., “Discrete-Time Models for Communication Systems Including ATM”, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [15] Takagi, H., “Queueing Analysis: Vol III, Discrete-Time Systems”, North-Holland, 1993.
- [16] Lee, S. W., Lee, H. W., and Baek, J. W., “Analysis of Discrete-Time Geo/G/1 Queue under the D -policy”, 6th International Conference on Queueing Theory and Network Analysis, 2011, Seoul, Korea, QTNA2011.
- [17] Lee, S. W., Lee, H. W., and Baek, J. W., “Analysis of Discrete-Time MAP/G/1 Queue under Workload Control”, Performance Evaluation, Vol. 69, No. 2, pp. 71-85, 2012.
- [18] Kim, S. J., Kim, N. K., Park, H. M., Chae, K. C., and Lim, D. E., “On the Discrete-Time $\text{Geo}^X/G/1$ Queues under N -policy with Single and Multiple Vacations”, Journal of Applied Mathematics, Vol. 2013, Article ID 587163, 2013.
- [19] Liu, R. and Deng, Z., “The Steady-State System Size Distribution for a Modified D -policy Geo/G/1 Queueing System”, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2014, Article ID 345129, 2014.
- [20] Lan, S. and Tang, Y., “Analysis of a Discrete-Time $\text{Geo}^{\lambda_1, \lambda_2}/G/1$ Queue with N -policy and D -policy”, Journal of Applied Mathematics and Computing, pp. 1-25, 2016. (online first article)
- [21] Lucantoni, D. M., “New Results for the Single Server Queue with a Batch Markovian Arrival Process”, Stochastic Models, Vol. 7, No. 1, pp. 1-46, 1991.
- [22] Latouche, G. and Ramaswami, V., “A Unified Stochastic Model for the Packet Stream from Periodic Sources”, Performance Evaluation, Vol 14, No. 12, pp. 103-121, 1992.
- [23] Ramaswami, V. and Latouche, G., Modeling Packet Arrivals from Asynchronous Input Lines, in “Teletraffic Science for New Cost-Effective Systems, Networks and Services”, ITC-12, M. Bonatti Ed., North-Holland, Amsterdam, pp. 721-727, 1989.
- [24] Wang, S. S. and Silvester, J. A., “A Discrete-Time Performance Model for Integrated Service ATM Multiplexers”, Proceeding of IEEE COLBECOM, pp.

- 757-761, 1993.
- [25] Lee, H. W., "Queueing Theory", Sigma Press, 2006 (in Korean)
- [26] Baek, J. W., Lee, H. W., Lee, S. W., and Ahn, S., "A Markov-Modulated Fluid Flow Queueing Model under D -policy", Numerical Linear Algebra with Applications, Vol. 18, No. 6, pp. 993-1010, 2011.
- [27] Mitra, D., "Stochastic Theory of Fluid Model of Producers and Consumers Coupled by a Buffer", Advances in Applied Probability, Vol. 20, No. 3, pp.646-676, 1988
- [28] Lucantoni, D. M. and Neuts, M.F., "Simpler Proofs of Some Properties of the Fundamental Period of the MAP/G/1 Queue", Journal of Applied Probability, Vol. 31, No. 1, pp. 235-243, 1994.
- [29] Lee, K. G., Choi, S. and Ryu, S. W., "Development of Simulation System for Evaluating Performance of the Flat Display Manufacturing Line with Repetitive Process", The Journal of Information Systems, Vol. 17, No. 4, pp. 301-319, 2008.



이 세 원 (Se Won Lee)

- 종신회원
 - 성균관대학교 산업공학과 학사
 - 성균관대학교 산업공학과 석사
 - 성균관대학교 산업공학과 박사
- 부경대학교 경영대학 경영학부 조교수
- 관심분야: 대기행렬이론, 확률모형, 시스템 최적화