

투수층에 적용 가능한 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식의 개발

김건우*†

* 목포해양대학교 해양·플랜트건설공학과

Development of Complementary Mild-slope Equation for Stream Function Over Permeable Bed

Gunwoo Kim*†

* Department of Ocean Civil & Plant Construction Engineering, Mokpo National Maritime University, Mokpo 58628, Korea

요 약 : 본 연구에서는 유한한 깊이의 투수층에 의한 파랑 감쇠 현상을 흐름함수에 대한 확장형 환경사방정식을 사용하여 해석하였다. 에너지 감쇠율을 흐름함수에 대한 환경사방정식에 고려할 수 있도록 감쇠항을 제시하였다. 수치실험 시 계산영역에서 반사된 파가 경계에서 재반사되는 문제를 극복하기 위해서, 델타함수 형태의 원천함수를 유도하여 계산영역 내에서 조파하였다. 경사면 위의 파랑의 반사율 측정 실험을 다양한 주기에 대해서 수행하였다. 투수성이 있는 수중둔덕에 대해서, 수치실험 결과는 해석적인 적분방정식의 결과와 대체로 잘 일치하였다. 그러나, 투수계수가 크고 파장이 길수록 본 연구의 결과가 상대적으로 높은 투과율을 보였다.

핵심용어 : 환경사방정식, 흐름함수, 파랑 감쇠, 투수층, 내부조파

Abstract : In this study, wave damping due to a permeable bed of finite depth was modelled using a complementary mild-slope equation for stream function. The energy dissipating term in the mild-slope equation was presented in terms of stream function. In order to prevent re-reflection of reflected waves along the outer boundary, a delta-function-shaped source function was derived to generate a wave in a computational domain. Numerical experiments were conducted to measure the reflection coefficient of waves over a planar slope for various incident wave periods. The numerical result of the proposed model was compared with that of an integral equation method, showing good agreement in general. However, the proposed model showed relatively higher transmission rate for the larger permeability and the longer wavelength.

Key Words : Mild-slope equation, Stream function, Wave damping, Permeable bed, Internal generation of wave

1. 서 론

파랑변형을 해석하기 위한 수치 모형은 컴퓨터의 발달과 더불어 환경사방정식과 Boussinesq 방정식과 같은 수심적분 모형의 개발로 크게 발전하기 시작하였다. Berkhoff(1972)가 환경사방정식을 개발하여 깊은 바다부터 얕은 바다까지 파랑의 분산성을 정확히 모의할 수 있게 되었으며, 이후 Massel(1993), Chamberlain and Porter(1995), Suh et al.(1997), Chandrasekera and Cheung(1997)는 Berkhoff(1972)의 연구에서 생략된 바닥의 곡률항과 바닥경사의 제곱항을 고려하여 바닥경사가 급하거나 수심이 급변하는 경우에도 정확한 결과를 얻을 수 있는 확장형 환경사방정식을 개발하였다. 대부분의 환경사방정식

은 속도포텐셜에 대하여 유도된 반면에, Kim and Bai(2004)는 Hamilton 이론을 이용하여 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식(Complementary mild-slope equation)을 유도하였다. 흐름함수로 표현된 식은 불규칙한 바닥 경계조건을 정확하게 만족하는 장점이 있다.

투수성이 있는 바닥 위를 진행하는 천해파의 에너지 감쇠는 해안공학에서 중요한 문제로 인식되어 왔다. Reid and Kajiura(1957)는 투수층 내의 흐름이 Darcy의 식을 따른다고 가정하여 두께가 무한한 투수층 위를 진행하는 파의 감쇠율을 유도하였다. 이후, Liu and Dalrymple(1984)는 두께가 유한한 투수층에 대해서 파의 감쇠율을 유도하였으며, Do and Suh(2011)는 깊이가 유한한 다중 투수층 위에서 파의 감쇠율을 유도하여 속도포텐셜로 표현된 확장형 환경사방정식에 이를 고려한 파랑변형식을 제안하였고, Kim and Lee(2012)는

† gwkim@mmu.ac.kr, 061-240-7319

투수층에 의한 파의 감쇠효과가 포함된 속도포텐셜에 고유함수전개법(eigenfunction expansion method)을 적용하여 소멸파의 영향과 파의 감쇠를 동시에 고려할 수 있는 모형을 개발하였다. 본 연구에서는 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식에 투수층에 의한 영향을 고려한 에너지감쇠항을 적용하여 투수층 위를 진행하는 파의 변형을 계산할 수 있도록 Kim and Bai(2004)의 식을 확장한다.

파랑변형모형에서 파랑에너지를 계산영역에 공급하는 방법으로 외해경계에 수면변위나 유속을 지정하면, 계산영역에서 구조물이나 수심의 영향으로 발생한 반사파의 에너지가 외부의 조파경계에서 완전히 빠져나가지 못하고 재반사되어 영역의 내부로 퍼져나가는 문제가 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 계산영역 내부에서 조파항에 의해서 조파하고, 외부에 스폰지 층을 두어 반사파를 소산시키는 내부조파기법이 개발되었다. Kim et al.(2006; 2007)은 일정수심 가정 하에 Helmholtz 식으로 귀결되는 여러 종류의 파랑변형식에서 사용가능한 조파함수를 미분방정식의 Green 함수 해법으로 구한 바 있다. 이전의 연구에서는 속도포텐셜 또는 수면변위와 유속을 변수로 하는 파랑변형식에 대해서 조파함수가 유도되어왔다. 본 연구에서는 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식에 적용할 수 있는 조파함수를 유도하여 계산영역 내에서 파를 조파한다.

본 연구에서는 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식을 투수층 위에서 감쇠현상을 재현할 수 있도록 감쇠항을 포함하여 확장하였다. 또한, 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식의 수치실험을 위해서, 내부조파기법을 사용하여 조파함수를 유도하였다. 수심이 일정한 조건에서 수치실험을 수행하여 조파함수에서의 조파 성능과 스폰지층에서의 감쇠 성능을 검증하였고, 흐름함수에 대한 확장형 환경사방정식에서 바닥의 곡률항과 수심경사의 제곱항의 영향을 살펴보기 위해서, 수평 1차원의 일정 경사면 위로 파랑이 전파할 때 경사도에 따른 반사율을 비교하는 수치실험을 수행하였다. 마지막으로, 유한한 깊이의 투수성 바닥 위를 진행하는 파의 투과율을 계산하여 적분식 모형의 결과와 비교하여 감쇠항을 검증하였다.

2. 흐름함수 확장형 환경사방정식의 감쇠항

2.1 흐름함수에 대한 확장형 환경사방정식

수평방향을 x 방향, 정수면에서 위 방향을 $+z$ 방향으로 정의한 직각좌표계에서 바닥수심 $z = -h(x)$ 위를 진행하는 선형파에 대해 흐름함수(stream function) $\psi(x, z)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\psi(x, z) \equiv \int_{-h}^z u(x, z_0) dz_0 \quad (1)$$

여기서, 유속 (u, w)과 수면변위 η 는 흐름함수 ψ 와 다음의 관계에 있다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2)$$

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\eta = \frac{i}{\sigma} w \quad \text{at } z = 0 \quad (4)$$

여기서, σ 는 각주파수($\sigma = 2\pi/T$, T 는 주기)이다. 흐름함수 ψ 는 아래와 같은 지배방정식과 경계조건을 따른다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad -h < z < 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{g}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (6)$$

$$\psi = 0, \quad \text{at } z = -h \quad (7)$$

여기서, g 는 중력가속도이다. 식(6)은 선형의 결합수면경계 조건이고, 식(7)은 식(1)에서 $z = -h$ 일 때 구해지는 바닥경계 조건이다. 변수심 위를 진행하는 파에 대해서, 소멸파 성분을 제외한 진행파 성분에 적용되는 흐름함수의 수심방향 성분을 분리하면 다음과 같다.

$$\psi(x, z) = \tilde{\psi}(x) f(h, z), \quad f(h, z) = \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh kh} \quad (8)$$

여기서, $\tilde{\psi}(x)$ 는 수면에서의 흐름함수이다. 파수 k 는 다음의 선형분산관계식을 만족한다.

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (9)$$

Kim and Bai(2004)는 Hamilton 이론을 사용하여 다음과 같이 흐름함수에 대한 확장형 환경사방정식을 유도하였다.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left\{ a \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial x} \tilde{\psi} \right\} + b \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + \left[-k^2 a + c \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \tilde{\psi} = 0 \quad (10)$$

여기서, 계수 a, b, c 는 각각 다음과 같다.

$$a(h) = \int_{-h}^0 f^2 dz - \frac{g}{\sigma^2} = -\frac{gk^2}{\sigma^4} CC_g \quad (11)$$

$$b(h) = \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz = \frac{1}{4\sinh^2 kh} \frac{2kh \cosh 2kh - \sinh 2kh}{2kh + \sinh 2kh} \quad (12)$$

$$c(h) = \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial f}{\partial h} \right)^2 dz = \frac{k}{12\sinh^2 kh} \times \frac{-12kh + 8k^3 h^3 + 3\sinh 4kh + 12(kh)^2 \sinh 2kh}{(2kh + \sinh 2kh)^2} \quad (13)$$

여기서, C 와 C_g 는 각각 파의 위상속도와 군속도이다. 위의 식을 재배열하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_g}{C} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right) + \left[k^2 \frac{C_g}{C} + f_c \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f_s \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] \tilde{\psi} = 0 \quad (14)$$

여기서, f_c 와 f_s 는 각각 수심의 곡률항과 바닥경사 제곱항의 계수로써 다음과 같다.

$$f_c = \frac{\sigma^2}{4g \sinh^2 kh} \frac{\sinh 2kh - 2kh \cosh 2kh}{2kh + \sinh 2kh} \quad (15)$$

$$f_s = \frac{\sigma^2}{g} \left\langle \frac{k \sinh 2kh}{2\sinh^3 kh (2kh + \sinh 2kh)^3} \times \{2kh \sinh 2kh \sinh kh (2kh + \sinh 2kh) - (2kh \cosh 2kh - \sinh 2kh) \times [\cosh kh (2kh + \sinh 2kh) + \sinh kh (1 + \cosh 2kh)]\} + \frac{k}{12\sinh^2 kh} \frac{3\sinh 4kh + 12(kh)^2 \sinh 2kh - 12kh + 8(kh)^3}{2kh + \sinh 2kh} \right\rangle \quad (16)$$

식(14)는 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식이다. 이 식은 다음과 같이 속도포텐셜로 표현된 확장형 환경사방정식 (Massel, 1993; Suh et al., 1997)과 비교할 수 있다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \tilde{\phi}) + [k^2 CC_g + P_c \nabla^2 h + P_s (\nabla h)^2] \tilde{\phi} = 0 \quad (17)$$

여기서, $\tilde{\phi}$ 는 수면에서의 속도포텐셜이고, 다음과 같이 정의된다.

$$\phi = \tilde{\phi} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (18)$$

그리고, P_s 와 P_c 는 각각 바닥곡률과 수심경사 제곱항의 계수이다.

2.2 흐름함수에 대한 에너지 감쇠항

Booij(1981)은 속도포텐셜에 대한 환경사방정식에 쇄파에 의한 에너지 소산을 고려할 수 있는 항을 추가한 식을 제안하였으며, 이를 흐름함수에 대한 확장형 환경사방정식에 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_g}{C} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right) + \left[k^2 \frac{C_g}{C} + f_c \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f_s \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + i\gamma \right] \tilde{\psi} = 0 \quad (19)$$

여기서, γ 는 에너지 감쇠계수이다. 일정수심을 가정하면, 식(19)는 다음과 같은 Helmholtz 식의 형태가 된다.

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + k_c^2 \tilde{\psi} = 0 \quad (20)$$

여기서, 파수 k_c 는 다음과 같다.

$$k_c^2 = k^2 + i\sigma\gamma \frac{C}{C_g} = k^2 \left(1 + \frac{i\sigma\gamma}{nk^2} \right) \quad (21)$$

여기서, $n = C_g/C$ 이다.

파랑의 감쇠를 고려하는 경우에 파수 k_c 는 복소수의 형태를 하며 $k_r + ik_i$ 로 표현할 수 있다. 여기서 실수부 k_r 은 식(9)의 분산관계를 만족하며, 허수부 k_i 는 쇄파 및 투수층으로 인한 파의 감쇠율을 의미한다. $k_c = k_r + ik_i$ 를 식(21)에 대입하면, 에너지 감쇠항 γ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\gamma = 2nk_i k_r \sqrt{1 + \left(\frac{k_i}{k_r} \right)^2} \quad (22)$$

Reid and Kajiura(1957)은 투수층 내 유체의 흐름이 Darcy의 법칙을 따른다는 가정 하에, 무한히 깊은 두께의 투수성 바닥 위를 전파하는 파의 감쇠율을 다음과 같이 구하였다.

$$k_i = \frac{\sigma K}{\nu} \frac{2k}{2kh + \sinh 2kh} \quad (23)$$

여기서, K 는 투수계수, ν 는 유체의 동점성계수이다. Liu and Dalrymple(1984)은 투수성 바닥의 두께가 d 로 제한된 경우에 파의 감쇠율을 다음과 같이 구하였다.

$$k_i = \frac{\sigma K}{\nu} \frac{2k}{2kh + \sinh(2kh)} \tanh(kd) \quad (24)$$

식(24)에서 투수성 바닥의 두께 d 가 무한대가 되면, 식(23)와 같아진다. 식(23)과 (24)에서 계산된 파의 감쇠율 k_i 를 식(22)에 대입하여 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식에 적용가능한 에너지 감쇠계수 γ 를 결정한다.

2.3 흐름함수에 대한 조파항

계산영역에서 구조물이나 바닥경사로부터 반사된 파가 조파경계에서 적절히 빠져나가지 못하고 재반사되는 문제를 해결하기 위해서, 내부조파항을 외부의 에너지감쇠대(스폰지층)와 함께 사용하는 방법이 널리 이용되고 있다. Kim et al.(2006; 2007)은 미분방정식에 대한 Green 함수 해법을 사용해서, 속도포텐셜에 대한 환경사방정식과 Boussinesq 방정식류에 대해서 조파함수를 유도한 바 있다. 기존의 연구에서는 속도포텐셜 또는 수면변위와 유속을 변수로 하는 파랑변형식에서 조파함수를 유도하였으며, 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식에는 조파함수에 대한 연구는 이루어지지 않았다.

본 연구에서는 흐름함수방식의 확장형환경사방정식에 적용 가능한 델타함수 형태의 조파함수를 유도하고, 식(25)와 같이 지배방정식의 우변에 조파함수를 더하여 조파하였다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_g}{C} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right) + \left[k^2 \frac{C_g}{C} + f_c \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f_s \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + i\gamma \right] \tilde{\psi} = S \quad (25)$$

여기서, 조파함수는 다음과 같다.

$$S(x,t) = D\delta(x-x_s) \quad (26)$$

여기서, D 는 조파함수의 강도, δ 는 델타함수, x_s 는 조파위치이다.

수심이 일정한 경우에, 조파위치에서 투수층의 영향을 무시하면, $w = -i\sigma\eta = ik\tilde{\psi}$ 의 관계를 사용하여, 수면변위 η 에 대한 Helmholtz 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + k^2 \eta = -\frac{D}{C_g} \delta(x-x_s) \quad (27)$$

Kim et al.(2007)은 미분방정식에 대한 Green 함수 해법을 이용해서 델타함수 형태의 조파함수를 포함한 Helmholtz의 특수해를 구한 바 있다. 동일한 해법에 의하면, 조파함수에 의해 조파되는 파는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\eta = -\frac{iD}{2kC_g} \exp[\pm ik(x-x_s)] \quad (28)$$

조파함수의 강도 D 는 식(28)과 조파하고자 하는 파의 수면변위 $\eta = a \exp[\pm ik(x-x_s)]$ 의 관계로부터 결정할 수 있으며, 조파함수는 다음과 같다.

$$S = 2iakC_g \delta(x-x_s) \quad (29)$$

여기서, a 는 조파하고자 하는 파의 진폭이다. 유한차분모형에서 델타함수는 조파위치에서 $\delta = 1/\Delta x$ 로 표현되며, 조파함수는 다음과 같이 된다.

$$S = \frac{2iakC_g}{\Delta x}, \quad \text{at } x = x_s \quad (30)$$

조파함수와 함께 사용하는 스폰지 층을 포함하면, 식(25)는 다음과 같이 수정된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_g}{C} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \right) + \left[k^2 \frac{C_g}{C} + f_c \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f_s \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + i\gamma + iD_s \sigma \right] \tilde{\psi} = S \quad (31)$$

여기서, D_s 는 스폰지 층의 감쇠계수이고, 스폰지 층 내에서 다음과 같이 정의된다.

$$D_s = \frac{\exp(l/W) - 1}{\exp(1) - 1}, \quad \text{inside sponge layer} \quad (32)$$

여기서, l 은 에너지감쇠대가 시작하는 위치로부터의 거리이고, 감쇠대의 폭 W 는 파장의 3배로 설정하였다.

3. 수치실험

3.1 조파함수의 검증

Fig. 1과 같은 영역에서 양방향파를 조파하여 조파기법 및 스폰지 층의 거동을 확인하였다. 수심은 10m로 하였고, 주기 $T = 5s$ 인 파를 조파하였다. 격자간격은 $\Delta x = L/20$ 로 하였고, 여기서 L 은 파장이다.

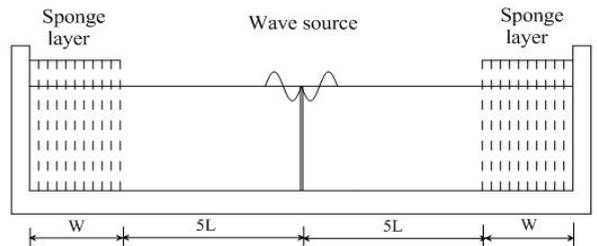


Fig. 1. Computational domain for wave generation.

Fig. 2는 계산된 수면변위와 파고를 도시한 것이다. 조파하고자 한 파의 수면변위와 파고가 정확하게 재현되었고, 스폰지 층에서 효과적으로 에너지가 감소하는 것을 확인할 수 있다.

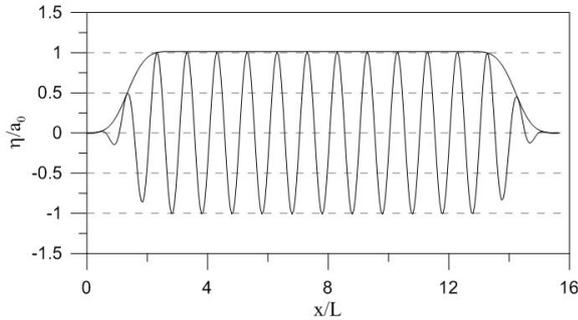


Fig. 2. Normalized water surface elevations and amplitudes of monochromatic waves.

3.2 경사면에 의한 파의 반사

Booij(1983)의 경사면 수치실험은 수평 1차원 경사면 위로 파랑이 전파하는 현상을 모의하여 경사도에 따른 파랑의 반사율을 측정하여 속도포텐셜로 표현된 환경사방정식의 적용한계를 구하기 위해서 사용된 이래로 파랑변형모형의 검증에 위해서 많이 사용되고 있다. 계산영역은 Fig. 3과 같다. 수심이 $h_1 = 0.6\text{ m}$ 와 $h_2 = 0.2\text{ m}$ 인 두 수평면 사이에 경사면을 두고 선형파가 0.6 m 수심에서 출발하여 경사면을 지나가면서 발생한 반사율을 측정한다.

기존의 수치실험(Massel, 1993; Chamberlain and Porter, 1995; Suh et al., 1997; Chandrasekera and Cheung, 1997; Kim and Bai, 2004)은 주파수 $f = 0.50\text{ Hz}$ 에서 이루어졌으며, 이 경우 상대수심은 비교적 얇은 중간수심역 ($kh = 0.15\pi \sim 0.28\pi$)이다. 본 연구에서는 동일한 수심조건에서 주파수를 $f = 0.20, 0.35, 0.50, 0.75, 1.00\text{ Hz}$ 로 다양하게 테스트하여 다양한 범위의 상대수심에서 파랑의 반사율을 비교하였다.

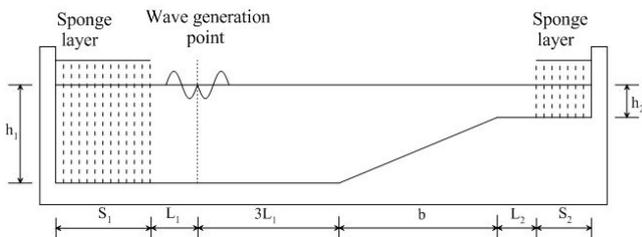


Fig. 3. Computational domain for numerical test of waves propagating over a planar slope.

Table 1에 입사파 조건과 이에 따른 상대수심을 경사면 전후의 일정수심 구간에 대해서 정리하였다. 가장 낮은 주파수($f = 0.20\text{ Hz}$)에서는 상대수심이 모두 천해조건인 $kh = 0.06\pi \sim 0.10\pi$ 의 범위에 있으며, 가장 높은 주파수($f = 1.00\text{ Hz}$)에서는 상대수심이 $kh = 0.33\pi \sim 0.78\pi$ 인 상대수심 조건이다.

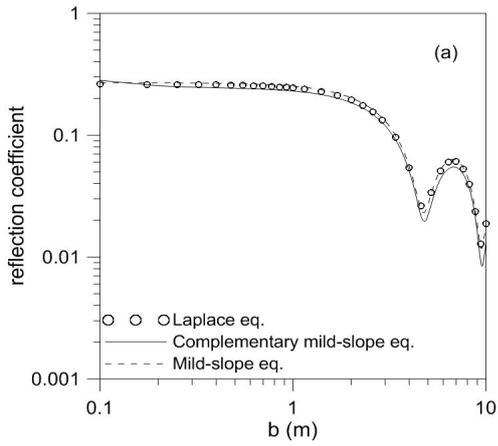
Table 1. Incident wave frequency and relative water depths.

Frequency (period)	$k_1 h_1$	$k_2 h_2$
0.2 Hz (5.00 s)	0.10π	0.06π
0.35 Hz (2.86 s)	0.18π	0.10π
0.50 Hz (2.00 s)	0.28π	0.15π
0.75 Hz (1.33 s)	0.48π	0.23π
1.00 Hz (1.00 s)	0.78π	0.33π

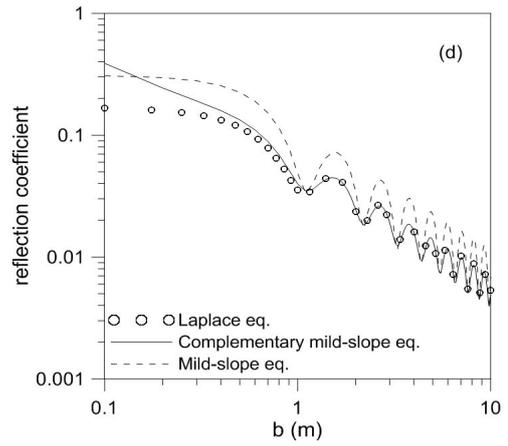
수심의 곡률항과 바닥경사 제곱항의 포함여부에 따른 흐름 함수방식 파랑변형모델의 정확도를 살펴보기 위해서, 확장형 환경사방정식과 환경사방정식의 결과를 Laplace 식을 유한요소법으로 해석한 결과와 비교하여 Fig. 4에 나타내었다. 여기서, 유한요소법으로 해석한 결과는 엄밀해에 해당된다.

상대적으로 경사가 완만한 경우에 확장형 환경사방정식의 결과는 유한요소법에 의한 수치해와 거의 일치하는 반면에 바닥곡률과 수심경사 제곱항을 생략한 환경사방정식에 의한 결과는 경사가 완만한 경우에도 유한요소법에 의한 수치해와 차이가 있었다. 고차 수심항 포함 유무에 의한 차이는 속도포텐셜에 대한 환경사방정식과 확장형 환경사방정식의 수치실험(Chamberlain and Porter, 1995; Suh et al., 1997; Chandrasekera and Cheung, 1997)에서도 유사하게 나타났으나, 속도포텐셜에 대한 식에서는 고차 수심항을 포함하지 않으면 반사율을 약간 낮게 재현하는 데 반해서, 흐름함수에 대한 식에서는 반사율을 약간 높게 재현하는 차이가 있다. 주기가 비교적 긴(a, b) 경우에는 모든 경사에서 확장형 방정식과 환경사방정식이 엄밀해와 잘 일치하였다. 주기가 비교적 짧은(c, d, e) 경우에는 경사가 완만하더라도 환경사방정식이 약간 높은 반사율을 보였고, 고차 수심항을 포함한 확장형 환경사방정식은 $f = 0.50\text{ Hz}$ 경우에 1:2 경사, $f = 0.75\text{ Hz}$ 경우에 1:1 경사, $f = 1.00\text{ Hz}$ 경우에는 2.5:1 경사보다 낮은 경사에서는 엄밀해와 거의 일치하였다. 그러나, 이보다 경사가 급해지면, 확장형 환경사방정식으로 계산된 반사율이 엄밀해보다 커지는 경향을 보였으며, 경사가 가장 급한 4:1 경사 ($b = 0.1$)에서의 반사율은 $f = 0.50\text{ Hz}$ 경우에 0.34, $f = 0.75\text{ Hz}$ 경우에는 0.38, $f = 1.00\text{ Hz}$ 경우에는 0.23으로 계산되어, 각각의 경우에 최대 49% ($f = 0.50\text{ Hz}$), 119% ($f = 0.75\text{ Hz}$), 125% ($f = 1.00\text{ Hz}$) 높게 반사율이 계산되었다. $f = 0.50\text{ Hz}$ 경우의 결과는 Kim and Bai(2004)에서의 결과와 동일하다.

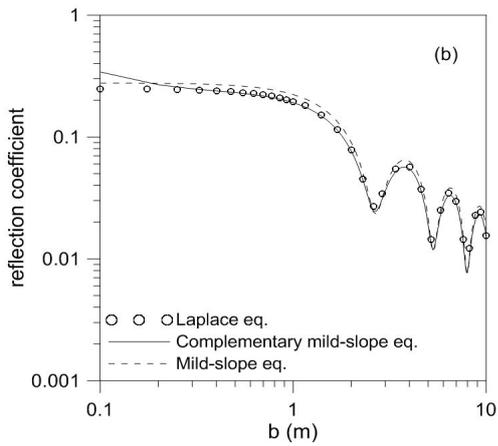
투수층에 적용 가능한 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식의 개발



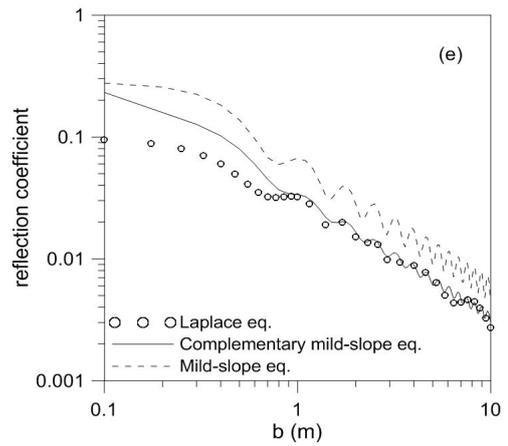
(a) $f = 0.20$ Hz



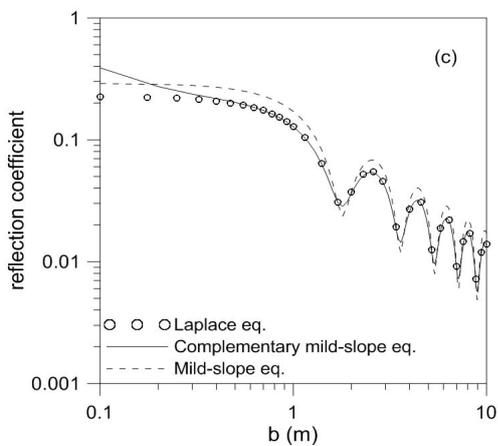
(d) $f = 0.75$ Hz,



(b) $f = 0.35$ Hz



(e) $f = 1.00$ Hz



(c) $f = 0.50$ Hz

Fig. 4. Variation of reflection coefficients with width of a planar slope.

3.3 투수층 위를 진행하는 파

Flaten and Rygg(1981)은 투수층 바닥 위를 진행하는 파의 파랑변형을 Green 함수를 이용하여 지배방정식과 경계조건을 직접 해석하는 적분식 모형을 제시하였으며, 이전의 연구(Do and Suh, 2011; Kim and Lee, 2012)에서 유한한 깊이의 투수층 위를 지나는 파의 감쇠율을 고려한 파랑변형모형을 Flaten and Rygg(1991)의 결과와 비교하여 모형을 검증한 바 있다. 본 연구에서도 동일한 조건에 대해서 수치실험하여 식(22)로 구한 흐름함수에 대한 확장형 환경사방정식에서의 감쇠항을 검증하고자 한다. Fig. 5는 바닥에 투수층이 존재하는 경우의 모형도이다.

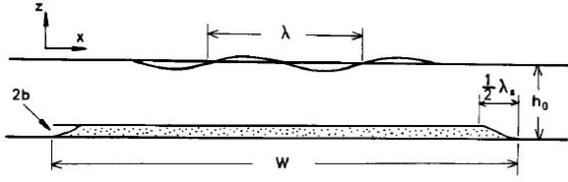


Fig. 5. Definition sketch of porous shoal.

여기서, 투수층의 두께를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$h = \begin{cases} h_0 & x < 0 \\ h_0 - b - b \sin(lx - \pi/2) & 0 < x < 0.5\lambda_s \\ h_0 - 2b & 0.5\lambda_s < x < W - 0.5\lambda_s \\ h_0 - b - b \sin(lx - \pi/2) & W - 0.5\lambda_s < x < W \\ h_0 & x > W \end{cases} \quad (33)$$

여기서, $\lambda_s = 2\pi/L$, W 는 둔덕의 길이이다. 본 연구에서 사용한 값은 $h_0 = 10\text{m}$, $b = 2\text{m}$, $W = 6\lambda_s = 300\text{m}$ 이며, 수치실험은 투수층의 투수계수를 0.0m^2 , $1.0 \times 10^{-8}\text{m}^2$, $4.0 \times 10^{-8}\text{m}^2$ 로 달리하여 3 case를 수행하였다.

흐름함수에 대한 확장형 환경사방정식과 Flaten and Rygg (1991)의 적분식 모형으로 계산한 투과율의 제곱을 Fig. 6에 비교하였다. (a)의 경우는 투수계수 $K = 0.0\text{m}^2$ 인 불투수성 둔덕이며, (b)와 (c)는 각각 투수계수가 $K = 1.0 \times 10^{-8}\text{m}^2$, $4.0 \times 10^{-8}\text{m}^2$ 인 투수성 둔덕이다. 파의 감쇠율 k_i 를 사용하여 해석한 흐름함수에 대한 확장형 환경사방정식의 수치실험 결과는 Flaten and Rygg(1991)의 적분식 모형과 비교해서 결과의 경향은 매우 유사하였으나, 약간 높은 투과율을 보였다. 가장 많은 오차를 보이는 $\lambda/h = 4$ 경우에, 확장형 환경사방정식의 결과는 적분식 모형에 비해서, $K = 1.0 \times 10^{-8}\text{m}^2$ 인 경우에 3%, $K = 4.0 \times 10^{-8}\text{m}^2$ 인 경우에 11% 더 크게 계산되었으며, 속도포텐셜에 대해서 파의 감쇠율을 고려하여 수행된 다른 연구결과(Do and Suh, 2011; Kim and Lee, 2012)의 결과와 매우 유사한 경향을 보였다.

4. 결론

본 연구에서는 투수층에 의한 에너지 감쇠를 고려한 감쇠항을 사용하여 Kim and Bai(2004)의 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식을 투수층 위를 진행하는 파에 적용할 수 있도록 확장하였다. 또한, 계산영역 내부에서 조파할 수 있도록 흐름함수에 대한 확장형 환경사방정식에 적합한 델타함수 형태의 조파함수를 유도하여 수치실험에 적용하였다.

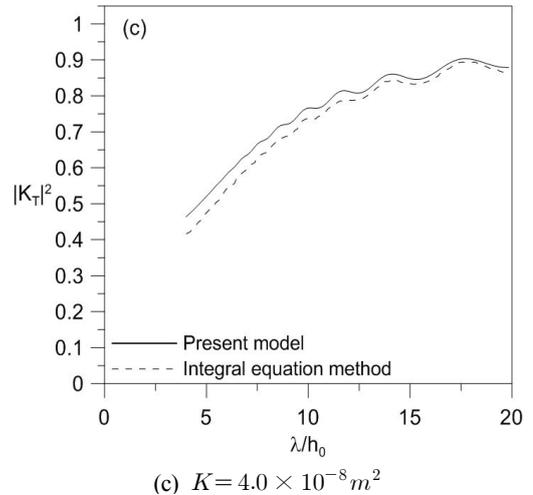
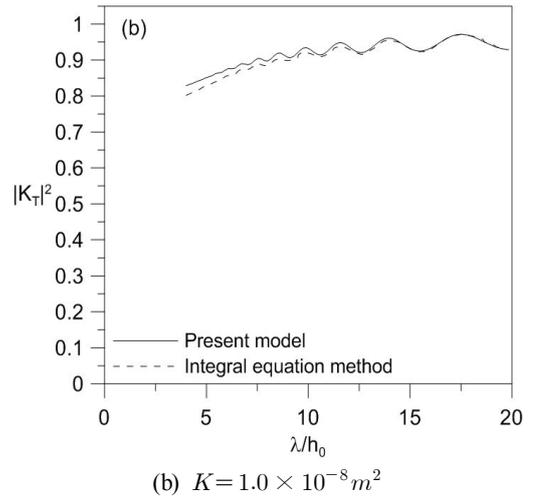
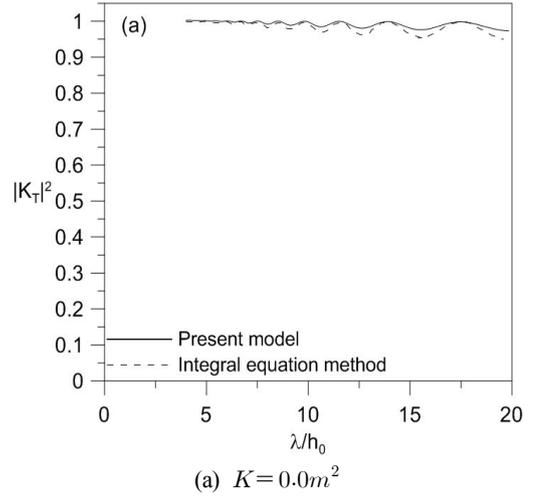


Fig. 6. Squared transmission coefficient for periodic waves over a permeable shoal.

흐름함수방식의 확장형 환경사방정식의 정확도를 검증하기 위해서, 수평 1차원의 일정 경사면 위로 파랑이 전파할 때 경사도에 따른 반사율을 비교하는 수치실험을 다양한 주기에 대해서 수행하였다. 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식은 주기가 비교적 긴 경우에는 모든 경사에서 엄밀해와 잘 일치하였으며, 주기가 비교적 짧은 경우에는 $f = 0.50$ Hz 경우에 1:2 경사, $f = 0.75$ Hz 경우에 1:1 경사, $f = 1.00$ Hz 경우에는 2.5:1 경사보다 낮은 경사에서는 엄밀해와 거의 일치하였고, 이보다 급한 경사에서는 확장형 환경사방정식으로 계산된 반사율이 엄밀해에 비해서 커지는 경향을 보였다.

흐름함수에 대한 확장형 환경사방정식에서 감쇠항에 의한 파의 감쇠율을 검증하기 위하여 투수성 수중둔덕 위를 진행하는 파의 수치실험을 수행하였다. 감쇠항을 포함한 흐름함수방식의 확장형 환경사방정식의 결과와 Flaten and Rygg (1991)의 적분식 모형의 결과를 비교하여 유사한 투과율을 확인하였다. 투수계수가 크고 파장이 길수록 본 연구의 결과가 상대적으로 높은 투과율을 보였으며, 최대 오차는 투수계수가 $K = 4.0 \times 10^{-8} m^2$ 인 경우에 11%였다.

References

- [1] Berkhoff, J. C. W.(1972), Computation of Combined Refraction-diffraction, Proceedings of 13th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, pp. 471-490.
- [2] Booij, N.(1981), Gravity Waves on Water with Non-uniform Depth and Current, Report No. 81-1, Department of Civil Engineering, Delft University, Delft.
- [3] Booij, N.(1983), A Note on the Accuracy of the Mild-slope Equation, Coastal Engineering, Vol. 7, pp. 191-203.
- [4] Chamberlain, P. G. and D. Porter(1995), The Modified Mild-slope Equation, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 291, pp. 393-407.
- [5] Chandrasekera, C. N. and K. F. Cheung(1997), Extended Linear Refraction-diffraction Model, Journal of Waterway, Port, Coast and Ocean Engineering, ASCE, Vol. 123, No. 1 5, pp. 280-296.
- [6] Do, K. D. and K. D. Suh(2011), Wave Damping over a Multilayered, Permeable Seabed, Journal of Coastal Research, Vol. 27, No. 6, pp. 1183-1190.
- [7] Flaten, G. and O. B. Rygg(1991), Dispersive Shallow Water Waves over a Porous Sea Bed, Coastal Engineering, Vol. 15, p. 347, 369.
- [8] Kim, J. W. and K. J. Bai(2004), A New Complementary Mild-slope Equation, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 511, pp. 25-40.
- [9] Kim, G., C. Lee and K. D. Suh(2006), Generation of Random Waves in Time-dependent Extended Mild-slope Equations Using a Source Function Method, Ocean Engineering, Vol. 33, pp. 2047-2066.
- [10] Kim, G., C. Lee and K. D. Suh(2007), Internal Generation of Waves: Line Source Method and Source Function Method, Ocean Engineering, Vol. 36, pp. 842-851, 191-203.
- [11] Kim, G. and M. E. Lee(2012), Damping of Water Waves over Permeable Bed of Finite Depth, Journal of the Korean Society of Marine Environment & Safety, Vol. 18, No. 3, pp. 199-205.
- [12] Liu, P. L. F. and R. A. Dalrymple(1984), The Damping of Gravity Water Waves due to Percolation, Coastal Engineering, Vol. 8, pp. 33-49.
- [13] Massel, S. R.(1993), Extended Refraction-Diffraction Equation for Surface Waves, Coastal Engineering, Vol. 19, pp. 97-126.
- [14] Reid, R. O. and K. Kajiura(1957), On the Damping of Gravity Waves over a Permeable Seabed, Transactions of American Geophysical Union, Vol. 38, pp. 662-666.
- [15] Suh, K. D., C. Lee and W. S. Park(1997), Time-dependent Equations for Wave Propagation on Rapidly Varying Topography, Coastal Engineering, Vol. 32, pp. 91-117.

Received : 2016. 09. 21.

Revised : 2016. 10. 24.

Accepted : 2016. 10. 27.