JKIICE Journal of the Korea Institute of Information and Communication Engineering

한국정보통신학회논문지(J. Korea Inst. Inf. Commun. Eng.) Vol. 20, No. 12 : 2243~2251 Dec. 2016

트리의 [1,2]-지배 수 상계에 대한 특성 분석

이훈[1] · 손무영[2*]

Analysis on the characteristics for upper bound of [1,2]-domination in trees

Hoon Lee[1] · Moo Young Sohn[2*]

[1]Department of Information & Communications Engineering, Changwon National University, Changwon 51140, Korea
[2*]Department of Mathematics, Changwon National University, Changwon 51140, Korea

요 약

본 연구에서는 트리구조를 가지는 네트워크의 [1,2]-지배집합에 대한 특성과 지배수의 상계 값에 대한 이론적 모형을 제시하였다. 구체적으로는 트리 네트워크가 가지는 몇 가지 전형적인 제약에 대해서 각 유형이 가지고 있는 지배집합의 지배수의 상계 값을 도출하였다. 본 논문에서는 트리구조의 네트워크에 대한 특성을 해석함에 있어서 그래프이론을 적용하였다. 노드집합 V와 링크집합 E으로 구성되는 그래프 $G=(V,E)$에 대해서 노드집합 V의 부분집합 D를 가정한다. 이때 집합 V에 속하면서 집합 D 에 속하는 않는 임의의 노드 v가 D에 속하는 노드와 1개 이상 2개 이하로만 인접하여 있으면 D를 [1,2]-지배집합이라 한다. 그리고 그래프 G의 [1,2]-지배집합 중 최소 농도를 [1,2]-지배 수라 하고 $\gamma_{[1,2]}(G)$로 표시한다. 본 논문에서는 트리(tree)의 [1,2]-지배 수에 대한 특성과 이의 새로운 상계 값을 증명하였다.

ABSTRACT

In this paper, we propose a theoretical model for characterization and upper bounds of [1,2]-domination set of network which has tree structure. In detail, we propose a theoretic model for upper bounds on [1,2]-domination set of a tree network which has some typical constrains. To that purpose, we introduce a graph theory to model and analyze the characteristics of tree structure networks. We assume a node subset D of a graph G=(V,E). We define that D is a [1,2]-dominant set if for any node v in set V which is not an element of a set D is adjacent to a node or two nodes of an element in a set D (that is, $1 \le |N(v) \cap D| \le 2$ for every node v $\in V-D$). The minimum cardinality of a [1,2]-dominating set of G, which is denoted by $\gamma_{[1,2]}(G)$, is called the [1,2]-domination number of G. In this paper, we show new upper bounds and characteristics about the [1,2]-domination number of tree.

키워드 : 그래프, 트리, 지배 수, [1,2]-지배 수, 상계

Key word : Graph, Tree, Domination Number, [1,2]-Domination Number, Upper Bound

Received 06 July 2016, **Revised** 08 July 2016, **Accepted** 18 July 2016

* **Corresponding Author** Moo-Young Sohn(E-mail:mysohn@cwnu.ac.kr, Tel:+82-55-213-3405)
Department of Mathematics, Changwon National University, Changwon 51140, Korea

Open Access **http://doi.org/10.6109/jkiice.2016.20.12.2243** print ISSN: 2234-4772 online ISSN: 2288-4165

Ⅰ. 서 론

최근 통신서비스의 주된 관심은 유무선네트워크(이하, 네트워크)를 통한 다양한 네트워크 및 디바이스의 상호 연결에 있다. 네트워크 간을 연결하는 장비로서는 라우터와 스위치가 있고 네트워크에 연결되는 디바이스로는 인간, 컴퓨터, 센서, 제어기, 기계, 자동차 등 우리 주변에 있는 거의 모든 사물(Things)이다. 그리고 이와 같은 네트워크 환경을 사물인터넷(Internet of Things, 이하 IoT)이라고 한다[1].

IoT의 구현에 있어서 가장 중요하고도 기본이 되는 목적은 모든 디바이스를 네트워크에 연결하고 또 서로 다른 네트워크를 연결하여 글로벌 인터넷(global Internet)을 구축하는 것인데 이때 제약조건으로 가장 중요한 것이 최소한의 비용으로 가능한 한 최대의 네트워크와 디바이스를 연결하는 것이다.

한편, 네트워크 간 또는 디바이스를 네트워크에 연결하는 방식은 컴퓨터네트워크의 구축에 있어서 가장 기본이 되면서도 중요한 기술로 이미 잘 알려져 있다[2]. 그 중에서 네트워크 내부의 연결이나 고객과 네트워크 사이의 접점인 액세스 네트워크(Access network)에서 가장 많이 사용되는 방식이 트리(tree)구조이다. 그 이유는 트리가 최소비용으로 네트워크와 디바이스를 연결할 수 있기 때문이다.

한편, 새로운 서비스의 도입이나 신규 개발 지역에 대한 네트워크 설비의 투자를 앞두고 통신사업자는 기존의 네트워크와 새로이 구축할 네트워크의 접속이 예상되는 경우에 투입되어야 하는 통신 장비의 규모 및 구조에 대한 예측이 반드시 필요하다. 특히 고객의 디바이스와 그 디바이스들을 수용하는 노드의 규모 및 수 사이의 관계에 대한 정보는 통신사업자가 네트워크를 구축하는데 있어서 아주 중요한 기본 정보이다. 그럼에도 불구하고 이에 대한 기반 연구는 거의 없는 실정이다.

본 연구를 수행함에 있어서 연구의 모티브가 된 연구가 참고문헌[3, 4]인데, 두 논문에서는 컴퓨터네트워크를 그래프로 표현하였을 때 [1,2]-지배 집합의 지배수에 대한 계산방법을 수학적 모형으로 제시하였다. 그런데, 나중에 정리1에서 소개할 예정이지만, 그들이 제시한 해답은 트리구조의 아주 특별한 경우에 한해서만 성립한다는 약점을 가지고 있다.

그러나, 실제로 컴퓨터 네트워크의 구조는 그렇게 단순하지가 않고 아주 다양한 유형을 가지고 있다.

이에 본 연구에서는 네트워크가 상호 접속되는 경우여러 가지 유형의 접속구조에 대한 네트워크의 성능 특성을 규명하기 위한 기반연구의 하나로서 다양한 유형의 트리구조에서 [1,2]-지배집합의 기본 특성을 규명하고 지배수의 상계에 대한 새로운 결과를 제시하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제II장에서는 본 연구에서 사용될 그래프에 대한 기본적인 용어 및 개념을 소개한다. 제III장에서는 트리의 [1,2]-지배집합에 대한 기본 특성을 소개한다. 제 IV장에서는 트리의 [1,2]-지배집합에 대한 새로운 특성과 [1,2]-지배 수 상계 값에 대한 새로운 결과를 소개한다. 마지막으로 제V장에서는 본 연구의 결론을 맺는다.

Ⅱ. 그래프이론의 기본 개념

제II장에서는 본 연구에서 사용되는 그래프이론의 용어에 대해서 간단히 요약 정리한다. 본 연구에서 사용되는 용어는 참고문헌 [5, 6]에 기반하고 있다.

그래프 G는 노드의 집합 V와 V의 2-중복조합의 다중부분집합 E의 쌍 $G=(V,E)$으로 정의한다. V의 원소를 노드(node)라고 하고 E의 원소를 링크(link)라고 한다. 주어진 두 노드 u,v가 링크로 이어져 있을 때, u,v가 서로 **인접하다**(adjacent) 또는 **이웃**(neighbors)이라고 한다.

어떤 두 개의 노드 u,v에 대하여 u와 v를 연결하는 링크의 개수가 두 개 이상일 때, 이 링크들을 **다중**링크라 한다. 고리나 다중변이 없는 그래프를 **단순(simple) 그래프**라 한다.

$G=(V,E)$를 $n=|V|$ 개의 노드와 $m=|E|$개의 링크를 갖는 유한 단순그래프라 하자 (단, $|X|$는 집합 X의 농도). 그래프 G의 노드 v와 이웃해 있는 노드 집합과 그 닫힌 이웃 노드 집합을 각각 $N(v)$ 및 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$라 표시한다.

그래프 G의 노드 v에 연결되어 있는 링크의 수를 노드 v의 **차수**(degree)라고 부르고 $d(v)$로 표기한다. 차수가 1인 노드를 **단말**노드**(end node)** 또는 **리프(leaf)**라 하고 그 이웃해 있는 노드를 **받침점**(support node)이라 한다. 컴퓨터네트워크에서 단말노드는 디바이스

에 해당하고 받침점은 액세스 노드(access node)에 해당한다.

그래프 G의 차수들 중에서 최고차수를 $\Delta = \Delta(G)$ 라고 하고 최저차수를 $\delta = \delta(G)$라 한다. 두 그래프 $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ 에 대하여, $|V_1| = |V_2|$ 이고, 그래프의 인접성을 보존하는 일대일 대응 $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ 이 존재할 때, 즉, 임의의 두 노드 $u, v \in V_1$ 에 대하여 G_2 에서 $\phi(u), \phi(v)$ 사이의 링크의 개수와 G_1 에서 u, v 사이의 링크의 개수가 같을 때, 두 그래프 G_1 과 G_2 가 **동형(isomorphic)**이라고 한다. 그리고 회로(cycle)를 포함하지 않는 연결그래프를 트리라 한다.

D를 그래프 G의 노드 부분집합이라 할 때, D에 속하는 않는 임의의 노드 v가 D에 속하는 노드와 인접하여 있으면 D를 그래프 G의 지배집합이라 한다. 그래프 G의 지배집합 중 최소 농도를 갖는 값을 그래프 G의 지배 수라 하고 $\gamma(G)$로 표시한다. $\gamma(G) = |D|$를 만족하는 그래프 G의 지배 집합 D를 $\gamma(G)$-지배집합이라 한다. D가 G의 노드들의 지배집합으로서, D에 속한 어떠한 노드들 사이에도 링크가 없을 때, D를 G의 독립 지배집합 (**independent domination set**)이라 한다. G의 독립 지배집합들의 원소의 개수의 최댓값을 G의 독립지배수(**independent domination number**)라고 하고 $i(G)$로 표기한다. 그래프 $G = (V, E)$ 에 대하여 노드 집합이 $S(S \subset V)$이고 S 내에 있는 노드들 사이에 있는 G의 링크를 모두 포함하는 G의 부분그래프를 **S로 유도된 G의 부분그래프**라고 하고 $G[S]$ 로 표기한다. $G - S$를 유도된 그래프 G의 부분그래프 $G[V - S]$ 라 표시한다. 그래프 G의 **연결성분**(components)이 트리일 때 그 성분을 트리 성분이라 한다.

G, H 를 그래프라 하자. 그래프 G에 유도된 부분그래프로 H를 포함하지 않으면 H-free 그래프라 한다. 특별히 유도된 완전이분그래프 $K_{1,3}$를 포함하지 않는 그래프를 claw-free 그래프라 한다.

양의 정수 j, k에 대하여, 그래프 $G = (V, E)$의 노드 부분집합 D에 속하는 않는 임의의 원소 v가 D에 속하는 노드와 j 개 이상 k 개 이하로 인접하여 있으면 D를 $[j,k]$-집합이라 한다. 정수 $j \geq 1$에 대하여 $[j,k]$-집합은 하나의 지배집합이 된다. $[j,k]$-집합과 $[j,k]$-지배집합의 개념은 최근 Chellali 등 [3]에 의하여 소개되었다. 정수 $j \geq 1$에 대하여, $[j,k]$-집합에 대한 연구는 컴퓨터 네트워크에서 서버(server) 또는 감시(surveillance) 장치의 역할을 하는 지배집합이 다중복성을 줄이고 효과적인 최소의 비용을 갖도록 지배집합을 어떻게 구축할 수 있을까 하는 문제에서 연구하게 되었다.

Chellali 등 [3] 은 다음과 같은 문제를 제시했다.

문제(Question): 트리 T가 n개의 노드와 ℓ개의 리프를 갖는다면, $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n - \ell$ 이다. 이 때 어떤 모양의 트리에서 이 부등식이 성립하겠느냐?

해답(Answer): Yang, wu는 논문[4]에서 정리1과 같은 부분 해(등호가 성립하는 해)를 제시했다.

정리 1

트리 T가 n개의 노드와 ℓ개의 리프를 가지고, 리프가 아닌 모든 노드의 차수가 적어도 4 이상이라면, $\gamma_{[1,2]}(G) = n - \ell$ 이다.

한편, 본 연구에서는 정리 1의 해뿐만 아니라 Chellali 등이 제시한 부등식보다 더욱 다양한 트리 구조에 대해서도 보다 더 정확한 해법이 존재한다는 것에 착안하여 새로운 모형을 제시하였는데 이에 대해서 아래에 기술하기로 한다.

Ⅲ. $[1,2]$-지배집합의 기본 성질

Chellali 등은 논문[3]에서 그래프의 $[1,2]$-지배 수의 특성과 관련하여 다음의 기본적인 정리들을 규명하였다.

정리 3. 1. ([3]) 그래프 G가 claw-free 이면, 그래프 G의 지배 수 $\gamma(G)$, 독립 지배 수 $i(G)$, $[1,2]$-지배 수 $\gamma_{[1,2]}(G)$는 모두 같다.

정리 3. 2. ([3]) 그래프 G가 P_4-free 이면, 그래프 G의 지배 수 $\gamma(G)$와 $[1,2]$-지배 수 $\gamma_{[1,2]}(G)$는 같다.

정리 3. 3. ([3]) 그래프 G의 최대차수 $\Delta(G) \le 2$ 이면, 그래프G의 지배 수 $\gamma(G)$와 $[1,2]$-지배 수 $\gamma_{[1,2]}(G)$는 같다.

따름정리 3. 4. ([3]) 그래프 G가 경로 P_n 또는 사이클 C_n이면, 그래프 G의 지배 수 $\gamma(G)$와 $[1,2]$-지배 수 $\gamma_{[1,2]}(G)$는 같다.

본 연구에서는 트리의 $[1,2]$-지배 수의 특성 및 상계 값에 대하여 관심을 둔다.

T 를 트리라 하자. $1 \le i \le \Delta(T)$에 대하여, $S_i(T) = \{ \mathrm{v} \mid \mathrm{v} \in \mathrm{V}(\mathrm{T}), \mathrm{d}(\mathrm{v}) = \mathrm{i} \}$라 하자. 트리 T 가 ℓ 개의 리프를 갖는다면, $|S_1(T)| = \ell$이다. 트리 T의 받침점들의 집합을 $S(T)$라 하자. 그리고 $I(T) = V(T) - S_1(T)$라 하자. $[1,2]$-지배 수에 대한 정의에 따라, 만약 $v \in S(T)$ 이고 $|N(v) \cap S_1(T)| \ge 3$ 이면, v는 트리 T의 모든 $[1,2]$-지배 집합에 포함이 된다.

Ⅳ. $[1,2]$-지배집합의 특성과 상계값

[1,2]-지배집합의 특성을 나타내는 트리네트워크의 유형으로는 여러 가지가 있는데 그 중에서도 가장 전형적인 예를 먼저 들고 각 경우에 대한 특성과 상계값을 도출하기로 한다.

정리 1에서 리프가 아닌 모든 노드의 차수가 적어도 4 이상을 갖는다면 $\gamma_{[1,2]}(G) = n - \ell$을 만족하지만 그림1에서 처럼 $S_2(T) - S(T) \ne \varnothing$(단, $\varnothing$는 공집합)이고, 리프도 아니고 받침점 노드도 아닌 노드의 차수가 2 또는 3을 가지는 경우에는 $\gamma_{[1,2]}(G) < n - \ell$을 만족하는 예가 많이 있다.

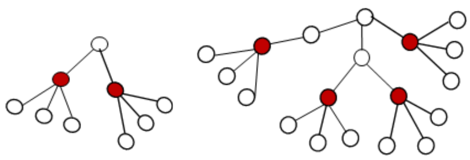

Fig. 1 Trees with condition $\gamma_{[1,2]}(T) < n - \ell$

그림에서 각 받침점에 대해서 리프를 세 개만 나타내었는데 이것은 단순히 편의를 위한 것이고 리프의 수는 3보다 더 커도 무방하다.

정리 4.1. 트리 T가 n개의 노드와 ℓ개의 리프를 갖는다고 하자. $S_2(T) - S(T) \ne \varnothing$이면,

$$\gamma_{[1,2]}(T) \le n - \ell - \left\lceil \frac{2}{3} |S_2(T) - S(T)| \right\rceil$$

이다.

[증명] 트리 T의 노드 부분집합 $S_2(T) - S(T)$에 의해 유도된 그래프의 $T[S_2(T) - S(T)]$의 성분들을 $T_1, T_2, \cdots, T_j$라 하자. $S_2(T)$ 의 노드들의 차수가 2 이므로, 각 부분 트리 T_i는 경로 모양이 되어야 한다. 경로 T_i의 노드들을 $v_1, v_2, \cdots, v_{a_i}$라 하자. 각 경로 T_i의 노드의 개수 a_i에 대하여 집합 S_{T_i} 다음과 같이 정의하자.

$a_i \equiv 0 \pmod 3$ 이면,

$$S_{T_i} = \{ \mathrm{v}_{3k+1}, \mathrm{v}_{3k+2} \mid \mathrm{k} = 0,1,\cdots,\frac{\mathrm{a_i}-3}{3} \},$$

$a_i \equiv 1 \pmod 3$ 이면,

$$S_{T_i} = \{ \mathrm{v}_{3k+1}, \mathrm{v}_{3k+2} \mid \mathrm{k} = 0,1,\cdots,\frac{\mathrm{a_i}-3}{3} \} \cup \{ \mathrm{a}_{\mathrm{a_i}} \},$$

$a_i \equiv 2 \pmod 3$ 이면,

$$S_{T_i} = \{ \mathrm{v}_{3k+1}, \mathrm{v}_{3k+2} \mid \mathrm{k} = 0,1,\cdots,\frac{\mathrm{a_i}-4}{3} \} \cup \{ \mathrm{v}_{\mathrm{a_i}-1}, \mathrm{v}_{\mathrm{a_i}} \}.$$

그러면 $I(T) - (\bigcup_{i=1}^{j} S_{T_i})$는 트리 T의 $[1,2]$-지배 집합이 되고 $|S_{T_i}| = \left\lceil \frac{2a_i}{3} \right\rceil$ 이다.

그러므로 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\gamma_{[1,2]}(T) &\le |I(T) - (\bigcup_{i=1}^{j} S_{T_i})| \\ &= |I(T)| - |(\bigcup_{i=1}^{j} S_{T_i})| \\ &= n - \ell - \sum_{i=1}^{j} |S_{T_i}|\end{aligned}$$

$$= n - \ell - \sum_{i=1}^{j} \lceil \frac{2a_i}{3} \rceil$$

$$\le n - \ell - \lceil \frac{2}{3}|S_2(T) - S(T)| \rceil .$$

(끝)

위의 정리가 의미하는 물리적 의미를 설명하기 위해서 간단한 예를 들어본다. 아래의 그림은 $S_2(T) - S(T) \neq \varnothing$ 라는 조건을 가지는 트리그래프이다.

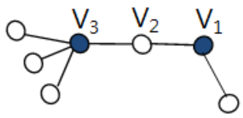

Fig. 2 A tree with condition

$$S_2(T) - S(T) \neq \varnothing$$

위의 그림에서 $n = 7, \ell = 4$이며,

$|S_2(T) - S(T)| = 1$이므로

$\gamma_{[1,2]}(T) \le 7 - 4 - \lceil \frac{2}{3} \rceil = 2$

이다. 이 결과는 위의 그림2 에서 속이 채워진 노드의 수와 같으며 위와 같은 구조의 트리에 대해서는 지배노드의 수를 2개 이하로 설정할 수 있음을 나타낸다.

본 정리의 의의를 요약하자면, 본 연구에서 제시하는 지배수의 상한은 $S_2(T) - S(T) \neq \varnothing$ 인 트리구조에 대해서 기존의 연구에서 제시한 상한보다 더 작은 값을 제시하였는데 이 결과를 이용하여 네트워크의 트리구조를 설계할 경우 지배노드의 수를 줄일 수 있고 지배노드의 지배수가 작을수록 저비용의 네트워크 설계가 가능하므로 결국 네트워크를 구축하는데 들어가는 비용을 줄일 수 있다.

정리 4.2. T를 n 개의 노드, ℓ개의 리프를 갖는 트리라 하자. 이때 만약 $v \in S(T)$, $|N(v) \cap S_1| \ge 3$이고, $N(v) - S_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$이고, T_i를 노드 v_i를 포함하는 $T - v$ 의 성분이라 하자.

$T_i' = T - \bigcup_{j=1, j \neq i}^{k} T_j$ ($i = 1, 2, \cdots, k$)를 T의 부분 트리라 하자. 그러면 다음은 동치이다.

(i) $\gamma_{[1,2]}(T) = n - \ell$.

(ii) $i = 1, 2, \cdots, k$에 대하여, $\gamma_{[1,2]}(T_i') = n(T_i') - S_1(T_i')$.

[증명] ($\Rightarrow$) 노드 집합 $\bigcap_{j=1}^{k}(I(T_j')) = \{v\}$ 이고 $\bigcup_{j=1}^{k}(I(T_j'))) = I(T)$이다. 트리 T의 [1,2]-지배 수 $\gamma_{[1,2]}(T)$ 를 $n - \ell$라 하자.

그러면 $I(T)$는 트리 T의 [1,2]-지배집합이 된다. 만약 $\gamma_{[1,2]}(T_i') < n(T_i') - S_1(T_i')$를 만족하는 i가 존재한다면, $D_i' \cup \bigcup_{j=1, j \neq i}^{k} I(T_j')$는 $\gamma_{[1,2]}(T)$ 보다 작은 노드 수를 갖는 트리 T의 [1,2]-지배 집합이 되므로 이는 모순이다. (단, D_i'는 트리 T_i'의 [1,2]-지배 집합.)

($\Leftarrow$) D를 트리 T의 지배집합이라 하자. 집합 $D_i' \cup \bigcup_{j=1, j \neq i}^{k} I(T_j')$를 부분 트리 T_i'의 [1,2]-지배 집합이라 하자. $\gamma_{[1,2]}(T) < n - \ell$이므로,

$|D \cap V(T_i')| < I(T_i')$를 만족하는 i가 존재한다. 그러면 $\gamma_{[1,2]}(T_i') < n(T_i') - S_1(T_i')$이므로 이는 모순이다. (끝)

정리 4.1로 부터 다음의 따름정리가 성립한다.

따름정리 4.3. T를 n 개의 노드, ℓ개의 리프를 갖는 트리라 하자. 만약 $S_2(T) - S(T) \neq \varnothing$ 이면, $\gamma_{[1,2]}(T) < n - \ell$ 이다.

정리 4.1로부터 $S_2(T) - S(T) \neq \varnothing$ 이라고 가정할 수 있다.

정리 4.4. 트리 T가 n 개의 노드, ℓ개의 리프를 가지고 $S_2(T) - S(T) \neq \varnothing$ 라고 하자.

만약 $|\, S_2(\,T\,) \cup S_3(\,T\,)| = 1$ 이면,
$\gamma_{[1,2]}(T) = n - \ell$ 이다.

[증명] $\gamma_{[1,2]}(T) < n - \ell$ 이라고 가정하자. 트리 T의 모든 $\gamma_{[1,2]}$-지배 집합 D 중에서 $|\, D \cap I(\,G\,)|$를 극대화 시키는 트리 T의 $\gamma_{[1,2]}$ - 지배 집합이라 하자. $\gamma_{[1,2]}(T) < n - \ell$ 이므로, $u \in V(T) - D$를 만족하는 $I(T)$ 속하는 노드 u 가 있다. W을 다음과 같이 정의하자.

$W = \{\, \mathrm{w}\,|\, \mathrm{w}$ 는 u 에서 $V - D$에 속하지 않는 노드들의 경로로 연결되어 지는 노드 $\}$.

(경우 1.) $|\, W\,| = 1$이면 $W = \{\, \mathrm{u}\,\}$이다. D는 트리 T의 $\gamma_{[1,2]}$-지배집합이므로, $u \in S(\,T\,)$이고 $d(u) = 2$ 이다. $N(u) \cap S_1(\,T\,)$ 에 속하는 노드를 v 라 하자 . $D' = (D - \{\mathrm{v}\}) \cup \{\mathrm{u}\,\}$라 두면. 이 때 D'는 $|D' \cap I(\,G\,)| > |D \cap I(\,G\,)|$를 만족하는 T의 $\gamma_{[1,2]}$-지배 집합이 된다. 이는 모순이다.

(경우 2.) $|W| \geq 2$이면 $T[\,W]$는 적어도 두 개의 리프를 갖는 T의 부분 트리이다. u 와 t 를 $T[\,W]$의 두 개의 리프라 하자. $|S_2(\,T\,) \cup S_3(T)| = 1$이므로, $d(v) \geq 4$이거나 $d(\,t\,) \geq 4$이다. 여기서 $d(v) \geq 4$라 가정할 수 있다. 그러면 v 는 적어도 세 번 이상 D에 있는 노드들에 의해 지배되므로 이는 모순이다. (끝)

정리 4.4.로부터 $|\, S_2(T) \cup S_3(\,T\,)| \geq 2$라 가정할 수 있다. $u, v \in S_2(\,T\,) \cup S_3(\,T\,)$라 하자. $P_{uv} = \{\, \mathrm{u} = \mathrm{u}_1,\, \mathrm{u}_2,\, \cdots,\, \mathrm{u}_\mathrm{k} = \mathrm{v}\,\}$를 트리$T$에 있는 유일한 $u - v$ 경로라 하자. 이 경우에 $u - v$경로 상에는 여러 가지 유형의 노드들이 존재하는데, 먼저 리프의 수가 3개 이상인 경우는 본 연구의 대상영역이 아니므로 제외된다. 이제 남은 경우는 리프의 수가 2 이하인 경우이다.

첫 째, 경로 상의 모든 노드가 리프를 가지지 않는 경우는 이들 노드가 중계노드의 역할을 담당하는 경우인데 이 경우가 A_0이다. 예를 들면 이들 노드는 서로 다른 네트워크 간 혹은 규모가 큰 네트워크의 내부를 연결하는 중계노드(이를 확장노드라고도 부름)이다.

한편, 리프의 수가 1 혹은 2인 경우는 이들 노드가 네트워크 간의 확장을 위한 역할을 함과 동시에 고객들을 직접 접속시키는 역할을 하는 경우로서 각 경우를 각각 A_1, A_2라고 정의한다.

이상의 경우를 고려하여 경로 P_{uv}의 노드들의 집합 $V(\,P_{uv}\,)$을 다음과 같이 세 부분집합 A_0, A_1, A_2로 분류하자.

$$A_0 = \mathrm{w}\,|\,\mathrm{w} \in \mathrm{V}(\mathrm{P_{uv}}),\, |\mathrm{N}(\mathrm{w}) \cap \mathrm{S_1}(\mathrm{T}\,)| = 0\,,$$
$$A_1 = \{\,\mathrm{w}\,|\,\mathrm{w} \in \mathrm{V}(\mathrm{P_{uv}}),\, |\mathrm{N}(\mathrm{w}) \cap \mathrm{S_1}(\mathrm{T}\,)| = 1\,\},$$
$$A_2 = \{\,\mathrm{w}\,|\,\mathrm{w} \in \mathrm{V}(\mathrm{P_{uv}}),\, |\mathrm{N}(\mathrm{w}) \cap \mathrm{S_1}(\mathrm{T}\,)| = 2\,\}.$$

이때 $i, j \in \{\,0, 1, 2\,\}(\,i \neq j)$에 대하여
$A_i \cap A_j = \varnothing$ 이고
$A_0 \cup A_1 \cup A_2 = V(P_{uv})$이다.
$|\, S_2(T) \cup S_3(\,T\,)| = 2$ 인 경우
다음의 정리가 유도된다.

정리 4.5. 트리 T가 n 개의 노드, ℓ개의 리프를 갖고 $S_2(\,T\,) - S(\,T\,) = \varnothing$ 이며
$|\, S_2(\,T\,) \cup S_3(\,T\,)| = 2$이라 가정하자.

만약 $|A_2| < |A_0|$, $\Delta(P_{uv}) \leq 4$이면,
$\gamma_{[1,2]}(T) = n - \ell + |A_2| - |A_0|$이고 그 외에는
$\gamma_{[1,2]}(T) = n - \ell$ 이다.

[증명] 다음의 세 경우로 나누어 증명하자.

(경우 1.) $|A_2| < |A_0|$, $\Delta(P_{uv}) \leq 4$.
$L_1 = N(A_1) \cap S_1(\,T),$
$L_2 = N(A_2) \cap S_1(T)$라 하자.
그러면 $|L_1| = |A_1|$, $|L_2| = 2|A_2|$ 이다.
$(I(\,T) - V(P_{uv})) \cup (L_1 \cup L_2)$는 트리$T$의 $\gamma_{[1,2]}$-지배 집합이 되는 것은 자명하다.

그러므로 다음의 식이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{[1,2]}(T)\\
&\leq |(I(T)-V(P_{uv}))\cup(L_1\cup L_2)|\\
&=|I(T)|-|V(P_{uv})|+|L_1|+|L_2|\\
&=|I(T)|-|A_0|-|A_1|-|A_2|+|L_1|+|L_2|\\
&=n-l+|A_2|-|A_0|.
\end{aligned}
$$

(경우 2.) $|A_2| < |A_0|$, $\Delta(P_{uv}) \geq 5$. $\gamma_{[1,2]}(T) < n-\ell$ 이라고 가정하자.

트리 T의 모든 $\gamma_{[1,2]}$-지배 집합 D 중에서 $|D \cap I(G)|$를 극대화 시키는 트리 T의 $\gamma_{[1,2]}$ - 지배 집합이라 하자.

D의 구성으로 부터 $u \in V(T)-D$를 만족하는 노드 중 $I(T)$ 속하는 노드 u 가 있다. 여기서 W을 다음과 같이 정의하자.

$W=\{$ w | w 는 u 에서 $V-D$에 속하지 않는 노드들의 경로로 연결되어 지는 노드 $\}$.

(부분 경우 2.1.) $|W|=1$(즉, $W=\{$ u $\}$).

D는 트리 T의 $\gamma_{[1,2]}$-지배 집합이므로, $u \in S(T)$이고 $d(u)=2$ 이다.

$N(u) \cap S_1(T)$ 에 속하는 노드를 v 라 하자 . $D^{'}=(D-\{\mathrm{v}\})\cup\{\mathrm{u}\}$라 두면 $D^{'}$는 $|D' \cap I(G)| > |D \cap I(G)|$를 만족하는 T의 $\gamma_{[1,2]}$-지배 집합이 된다. 이는 모순이다.

(부분 경우 2.2.) $|W| \geq 2$이면 $T[W]$는 적어도 두 개의 리프를 갖는 T의 부분 트리이다.

모든 리프는 적어도 두 개의 D의 노드와 인접하므로, 모든 리프는 $S_2(T)$ 또는 $S_3(T)$에 속한다. $S_2(T) \cup S_3(T)|=2$이므로, $T[W]$는 정확히 두 개의 리프를 갖는다. 그러므로 $T[W]$는 경로와 동형이다. (즉, $T[W] \cong P_{uv}$).

더욱이 $V-D-W \subseteq S_1(T)$이다.

$\Delta(P_{uv}) \geq 5$이므로, $d(w) \geq 5$를 만족하는 $w \in V(P_{uv})$가 있다. 이것은 노드 w 가 적어도 세 개의 서로 다른 D의 노드에 의해서 지배 된다. 이는 모순이다.

(경우 3.) $|A_2| > |A_0|$. $\gamma_{[1,2]}(T) < n-\ell$ 이라고 가정하자. 트리 T의 모든 $\gamma_{[1,2]}$ - 지배 집합 D 중에서 $|D \cap I(G)|$를 극대화 시키는 트리 T의 $\gamma_{[1,2]}$- 지배 집합이라 하자. $\gamma_{[1,2]}(T) < n-\ell$ 이므로, D의 구성으로 부터 $u \in V(T)-D$를 만족하는 노드 중 $I(T)$ 속하는 노드 u 가 있다.

(부분 경우 3.1.) $|W|=1$(즉, $W=\{$ u $\}$). D는 트리 T의 $\gamma_{[1,2]}$-지배 집합이므로, $u \in S(T)$이고 $d(u)=2$ 이다.

$N(u) \cap S_1(T)$에 속하는 노드를 v 라 하자. $D^{'}=(D-\{\mathrm{v}\})\cup\{\mathrm{u}\}$라 두면 여기서 $D^{'}$는 $|D' \cap I(G)| > |D \cap I(G)|$를 만족하는 T의 $\gamma_{[1,2]}$-지배 집합이 된다. 이는 모순이다.

(부분 경우 3.2.) $|W| \geq 2$이면 $T[W]$는 적어도 두 개의 리프를 갖는 T의 부분 트리이다.

모든 리프는 적어도 두 개의 D의 노드와 인접하므로, 모든 리프는 $S_2(T)$ 또는 $S_3(T)$에 속한다. $S_2(T) \cup S_3(T)|=2$이므로, $T[W]$는 정확히 두 개의 리프를 갖는다. 따라서 $T[W]$는 경로 P_{uv}와 동형이며 $D \cup W \subseteq I(T)$이다.

$L_1=N(A_1) \cap S_1(T)$, $L_2=N(A_2) \cap S_1(T)$라 하자. 그러면 $|L_1|=|A_1|$, $|L_2|=2|A_2|$ 이다.

여기서 $(D \cup W)-(L_1 \cup L_2)$는 트리 T의 $\gamma_{[1,2]}$ -지배 집합이 된다. 그러므로 다음의 식이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{[1,2]}(T)\\
&\leq |(D\cup W))-(L_1\cup L_2)|\\
&\leq |D|-|W|-|L_1|-|L_2|\\
&=|D|+|A_0|+|A_1|+|A_2|-|L_1|-|L_2|\\
&=|D|+|A_0|-|A_2|.
\end{aligned}
$$

만약 $|A_2| = |A_0|$이면
$|(D \cup W) - (L_1 \cup L_2)| = |D|$이다.

그러므로 $(D \cup W) - (L_1 \cup L_2)$는 T의 $\gamma_{[1,2]}$-지배 집합이다. 이 집합의 구성으로 부터

$$\gamma_{[1,2]}(T) = |(D \cup W) - (L_1 \cup L_2)| < n - \ell.$$

$D \cup W \subseteq I(T)$이므로,
$(D \cup W) - (L_1 \cup L_2) \supseteq I(T)$이다.

그러므로 $|(D \cup W) - (L_1 \cup L_2)| \geq n - \ell$.
이는 모순이다.

만약 $|A_2| > |A_0|$이면, $(D \cup W) - (L_1 \cup L_2)$는 $|D|$ 보다 작은 수형도 T의 $\gamma_{[1,2]}$-지배 집합이므로 이는 모순이다. (끝)

Ⅴ. 결 론

본 연구에서는 트리구조를 가지는 네트워크의 [1,2]-지배집합에 대한 특성과 지배수의 상계값에 대한 이론적 모형을 제시하였다. 구체적으로는 트리 네트워크가 가지는 몇 가지 제약에 대해서 각 유형이 가지고 있는 지배집합의 지배수의 상계값을 도출하였다. 이 결과는 지금까지 어느 연구에서도 규명이 되지 않은 문제를 해결하였다는 점에서 의의가 크다고 할 수 있다.

본 연구가 가지는 또 다른 의미는 크게 두 가지가 있다. 첫 번째로는 트리구조의 네트워크에 대한 특성을 해석함에 있어서 그래프이론을 접목시켰다는 것이다. 즉, 몇 가지 전형적인 트리구조의 네트워크에 대해서 받침점 노드와 리프간의 접속 관계에 대한 특성의 규명 및 성능의 한계값을 그래프 이론으로 도출하였다는 것이다. 본 연구의 두 번째 의미는 위에서 제시한 이론적 모형을 이용하여 향후 컴퓨터 네트워크 엔지니어링에 다양하게 적용될 수 있다는 것이다.

구체적으로는 통신사업자가 사물인터넷이나 클라우드 등 신규 사업의 전개나 새로운 장소에 네트워크를 구축하여서 기존에 구축된 네트워크와 연결할 때 본 연구의 결과를 활용하여 최소비용으로 네트워크 장비를 배치하여 확장된 네트워크을 설계하는 기본 자료로 사용할 수 있다.

본 연구에서 밝혀낸 이론적 토대를 바탕으로 향후에는 사물인터넷이나 클라우드 네트워크 등 본 연구가 적용될 수 있는 보다 더 구체적인 또는 현실적인 네트워크 토폴로지를 가정하여 실제로 최소비용의 최적 트리 구조를 도출하는 연구를 수행할 예정이다.

ACKNOWLEDGMENTS

This research was financially supported by Changwon National University in 2015-2016.

REFERENCES

[1] H. Kim, *Internet of Things*, Hong-Leung Publishing Co., Seoul, Korea, 2014.

[2] H. Lee, *Internetworkology*, Hong-Leung Publishing Co., Seoul, Korea, 2013.

[3] M. Chellali, T.W. Haynes, S. T. Hedetniemi, “[1,2]-sets in graphs,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 161, no. 18, pp 2885- 2893, Dec. 2013.

[4] X. J. Yang, B. Wu, “[1,2]-domination in graphs,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 175, no. 1, pp 79-86, Jan. 2014.

[5] D. B. West, I*ntroduction to graph theory, second ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.

[6] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

이훈(Hoon Lee)

창원대학교 정보통신공학과 교수, 공학박사
※관심분야 : 인터넷 설계, IoT, QoS 및 네트워크 보안

손무영(Moo Young Sohn)

창원대학교 수학과 교수, 이학박사
※관심분야 : 그래프이론