

Pasternak 탄성지반위에 놓인 점진기능재료 판의 정적 및 자유진동 해석

이 원 홍¹ · 한 성 천² · 박 원 태^{3*}

¹경남과학기술대학교 토목공학과, ²대원대학교 철도건설과, ³공주대학교 건설환경공학부

Static and Free Vibration Analysis of FGM Plates on Pasternak Elastic Foundation

Won-Hong Lee¹, Sung-Cheon Han² and Weon-Tae Park^{3*}

¹Department of Civil Engineering, Gyeongnam National University of Science and Technology, Jinju, 52725, Korea

²Department of Civil & Railroad Engineering, Daewon University College, Jecheon, 27135, Korea

³Division of Construction and Environmental Engineering Kongju National University, Cheonan, 31080, Korea

Abstract

The simplified plate theory is presented for static and free vibration analysis of power-law(P) and sigmoid(S) Functionally Graded Materials(FGM) plates. This theory considers the parabolic distribution of the transverse shear stress, and satisfies the condition that requires the transverse shear stress to be zero on the upper and lower surfaces of the plate, without the shear correction factor. The simplified plate theory uses only four unknown variables and shares strong similarities with classical plate theory(CPT) in many aspects such as stress-resultant expressions, equation of motion and boundary conditions. The material properties of the plate are assumed to vary according to the power-law and sigmoid distributions of the volume fractions of the constituents. The Hamilton's principle is used to derive the equations of motion and Winkler-Pasternak elastic foundation model is employed. The results of static and dynamic responses for a simply supported FGM plate are calculated and a comparative analysis is carried out. The results of the comparative analysis with the solutions of references show relevant and accurate results for static and free vibration problems of FGM plates. Analytical solutions for the static and free vibration problems are presented so as to reveal the effects of the power law index, elastic foundation parameter, and side-to-thickness ratio.

Keywords : simplified plate theory, power law and sigmoid functionally graded material(FGM), power law index, pasternak elastic foundation

1. 서 론

전단보정계수의 사용없이 해석결과의 정확성을 확보하기 위해 고차 전단변형 이론(higher-order shear deformation theories, HSDTs)(Reddy, 2000; Zenkour, 2006; Xiang *et al.*, 2011; Mechab *et al.*, 2013; Tran *et al.*, 2013; Mantari *et al.*, 2014; Lee *et al.*, 2015)이 널리 사용되었다. 고차 전단변형 이론을 적용하면 두께 방향으로의 전단변형률과 전단응력의 곡선 변화를 고려할 수 있으나 평형

방정식을 유도하는 과정이 고전적 이론과 일차 전단변형 이론에 비해 상대적으로 복잡하다. 이러한 고차 전단변형 이론은 두께 방향으로 고려하는 형상함수에 따라 다양한 이론이 개발되어 왔다(Touratier, 1991; Karama *et al.*, 2003; Mantari *et al.*, 2012).

Senthilnathan 등(1987)은 평형방정식, 경계조건 그리고 함응력이 고전적 이론과 유사한 형태를 가질 수 있도록 5-변수 고차 전단변형 이론을 단순화한 4-변수 고차 전단변형 이론을 개발하였다. 이러한 4-변수 고차 전단변형 이론은 5-변수

* Corresponding author:

Tel: +82-41-521-9305; E-mail: pwtae@kongju.ac.kr

Received September 26 2016; Revised November 6 2016;

Accepted November 7 2016

©2016 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

고차 전단변형 이론에 비해 적은 미지수를 가지게 되고 따라서 평형방정식도 5개에서 4개로 줄어들게 된다. 전단변형률에 고차의 항이 고려되기 때문에 수직방향 전단변형률과 전단 응력의 곡선변화는 5-변수 전단변형 이론과 동일하게 고려할 수 있다. 또한 평형방정식의 형태가 고전적 이론과 유사하게 표현되므로 두꺼운 판이나 셸의 유한요소 모델링에서 전단 잠김 현상이 발생하지 않는다. Han 등(1997)은 4-변수 전단 변형 이론을 적용하여 역대칭 앵글플라이 적층복합판의 휨 및 진동해석을 수행하였다. 그 후 21세기에 들어서면서 Shimpi 등(2006a,b)은 등방성판과 직교이방성판의 해석에 4-변수 이론을 적용하였으며 최근들어 적층복합판(Thai *et al.*, 2010), 점진기능재료 판(Benachour *et al.*, 2011), 점진 기능재료 샌드위치 판(Bourada *et al.*, 2012), 나노 판 (Malekzadeh *et al.*, 2013)의 해석에 4-변수 이론이 널리 이용되고 있다.

적층복합구조의 단점인 층간에서의 응력집중 문제를 해결하기 위해 한 면에서 다른 면 까지 재료의 성질이 연속적으로 변하는 특성을 가진 점진기능재료가 적용되고 있다. 세라믹과 금속을 적절하게 혼합하여 만드는 점진기능재료는 항공, 조선, 기계 및 건설 분야의 다양한 구조물들에 적용하기 위해 활발한 연구가 진행되고 있다. 점진기능재료 구조물의 변화하는 재료 특성을 고려하기 위한 함수로는 맥 법칙 함수(Bao *et al.*, 1995)와 S형상 함수(Jung *et al.*, 2014)가 널리 사용되고 있다.

본 연구에서는 맥 법칙 및 S형상 함수를 고려한 점진기능 재료 판의 정적 및 진동 응답을 정확하게 예측하기 위하여 단순화된 4-변수 고차 전단변형 이론을 적용하여 새로운 변수해석을 수행하였다. 본 연구의 목적은 고전적인 판 이론과 유사한 형태의 단순화된 판 이론을 이용하여 점진기능재료 판의 수직 처짐 및 고유진동수에 관한 연구를 수행하는 것이다. 대부분의 판 구조는 지반위에서 구조물을 직접 지지하는 구조재이므로 수직방향 압력과 전단층 효과가 적용된 탄성 지반 효과를 고려하기 위하여 Winkler- Pasternak 탄성 지반 모델을 사용하였다. 동적평형방정식은 Hamilton의 원리를 이용하여 유도하였다. 단순 지지된 직사각형 점진기능재료 판의 휨 및 자유진동 문제에 대한 결과를 제시하였으며 정확도를 검증하기 위하여 여러 참고문헌들의 결과들과 비교/분석 하였다.

2. 단순화된 판 이론

2.1 전단변형이 고려된 4-변수 변위장

전단변형이 고려된 일반적인 5-변수 변위장은 식 (1)로

표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x &= u_x^0 - z \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi(z)\phi_x \\ u_y &= u_y^0 - z \frac{\partial w}{\partial y} + \Psi(z)\phi_y \\ u_z &= w \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, u_x^0, u_y^0 는 중립면($z = 0$)의 한 점에서의 면내 변위들을 나타내고, u_z 는 판의 두께방향으로의 수직방향 변위이고 ϕ_x, ϕ_y 는 전단변형에 의한 전단변형 각이다. 그리고 $\Psi(z)$ 는 형상 함수로서 두께방향으로 전단변형률과 전단응력 분포의 변화를 결정하는 함수이다. 고전적 판 이론의 3-변수 변위장은 $\Psi(z)=0$ 인 경우이고 일차 전단변형이 고려된 판 이론의 5-변수 변위장은 $\Psi(z) = z$ 인 경우로 대체하여 구할 수 있다.

식 (1)은 전단변형 각의 새로운 가정을 도입하면 식 (2)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x &= u_x^0 - z \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi(z)\left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ u_y &= u_y^0 - z \frac{\partial w}{\partial y} + \Psi(z)\left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ u_z &= w \end{aligned} \tag{2}$$

여기서,

$$\theta_x = \phi_x - \frac{\partial w}{\partial x}, \theta_y = \phi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \tag{3}$$

식 (2)는 식 (4)로 변환하여 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x &= u_x^0 + z\theta_x - f(z)\left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ u_y &= u_y^0 + z\theta_y - f(z)\left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ u_z &= w \end{aligned} \tag{4}$$

여기서, $f(z) = z - \Psi(z)$, 형상함수 $\Psi(z) = z(1 - 4z^2/3h^2)$ 이라고 가정하면 식 (4)는 다항식으로 고차 전단변형이 고려된 5개의 변수를 가지는 변위장이다.

단순화된 4개의 변수를 가지는 변위장으로 식 (4)를 개선하기 위해 아래의 3가지 가정을 적용한다.

- (a) 모든 변위는 판의 두께에 비해 작고 미소변형 이론이 적용되며 수직방향 응력 σ_z 는 무시한다.
- (b) 수직방향 변위 u_z 는 식 (5)와 같이 휨 성분과 전단 성분으로 분해한다.

$$u_z = w_b + w_s \quad (5)$$

(c) 변위 u_x 와 u_y 는 신장, 휨 그리고 전단 성분으로 식 (6a)로 구성된다.

$$\{u_x, u_y\} = \{u_x^0, u_y^0\} + \{u_{xb}, u_{yb}\} + \{u_{xs}, u_{ys}\} \quad (6a)$$

휨 성분은 고전적 이론과 유사하게 식 (6b)로 가정한다.

$$\{u_{xb}, u_{yb}\} = -z\{\theta_x, \theta_y\} = -z\left\{\frac{\partial w_b}{\partial x}, \frac{\partial w_b}{\partial y}\right\} \quad (6b)$$

전단성분은 전단응력이 판의 상면과 하면에서 0이 된다는 조건을 만족하는 포물선 형태의 식 (6c)로 가정한다.

$$\{u_{xs}, u_{ys}\} = -f(z)\left\{\frac{\partial w_s}{\partial x}, \frac{\partial w_s}{\partial y}\right\} \quad (6c)$$

식 (6b)와 식 (6c)를 식 (4)에 대입하면 식 (7)과 같은 새로운 4-변수 변위장을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x &= u_x^0 - z\frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial x} \\ u_y &= u_y^0 - z\frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z)\frac{\partial w_s}{\partial y} \\ u_z &= w_b + w_s \end{aligned} \quad (7)$$

Hamilton 원리를 이용하여 식 (8)과 같이 동적 평형방정식을 구할 수 있다(Reddy, 2007).

$$\delta II = (\delta K - \delta U) = 0 \quad (8)$$

가상 변형 에너지는 식 (9)와 같다.

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dz dA \quad (9)$$

여기서, σ_{ij} 는 응력 텐서 성분, ε_{ij} 는 변형률 텐서 성분이고 $i, j = x, y, z$ 이다.

가상 운동 에너지는 식 (10)과 같다.

$$\delta K = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u}_i \delta \dot{u}_i) dz dA \quad (10)$$

여기서, ρ 는 밀도이고 \dot{u}_i 는 u_i 를 시간 t 에 대해서 한번 미분한 것을 나타낸다.

3. 점진기능재료 판의 구성방정식

3.1 맥 법칙 및 S형상 함수 점진기능재료 판의 재료특성

점진기능재료는 재료 성질의 변화에 의해 정의할 수 있고 구성성분이 연속적으로 변화하는 비 균질 미세구조라는 특징을 가지고 있다. 점진기능재료의 재료 성질 변화는 지수 법칙, 맥 법칙 및 S형상 함수로 나타난다.

본 연구에서는 점진기능재료 분야에서 현재 가장 일반적으로 연구가 진행되고 있는 맥 법칙 및 S형상 함수를 적용하였다.

3.1.1 맥 법칙 함수

점진기능재료의 재료 특성 변화를 맥 법칙 함수를 이용하여 식 (11)로 정의할 수 있다.

$$F(z) = D_f(z)F_1 + (1 - D_f(z))F_2 \quad (11)$$

여기서, $D_f(z)$ 는 체적요소로 식 (12)와 같다.

$$D_f(z) = \left(\frac{z+h/2}{h}\right)^p \quad (12)$$

여기서, h 는 판의 두께, $F(z)$ 은 재료 성질의 변화를 나타내는 함수이고 F_1 과 F_2 는 각각 판의 상/하면의 재료성질이다. 그리고 p 는 두께를 따라 변하는 재료 성질을 나타내며 거듭제곱 지수로 표현되는 재료 매개변수이다.

3.1.2 S형상 함수

점진기능재료의 완전한 응력 분포를 확보하기 위해 2개의 거듭제곱 함수를 적용한 S형상 함수는 체적요소를 식 (13)으로 정의할 수 있다.

$$D_f^1(z) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h-2z}{h}\right)^p \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (13a)$$

$$D_f^2(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h+2z}{h}\right)^p \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (13b)$$

Voigt의 혼합법칙을 적용하면, S형상 점진기능재료의 재료 성질은 식 (14)로 표현할 수 있다.

$$F(z) = D_f^1(z)F_1 + (1 - D_f^1(z))F_2 \quad (14a)$$

$$\text{for } 0 \leq z \leq h/2$$

$$F(z) = D_f^2(z)F_1 + (1 - D_f^2(z))F_2 \quad (14b)$$

for $-h/2 \leq z \leq 0$

포아송 비의 변화는 다른 재료 성질의 변화에 비해 무시할 수 있을 정도로 작으므로 상수로 가정하여 해석에 적용한다 (Hosseini-Hashemi *et al.*, 2011).

3.2 탄성지반 모델

수직방향 압력과 전단층 효과가 동시에 고려된 Winkler-Pasternak 탄성지반 모델을 적용하였다. 수직방향 압력은 등가 스프링으로 가정하여 수직방향 변형에 저항하고 비압축성 전단층이 전단변형에 저항하는 것으로 탄성지반 효과를 고려하였다. 이러한 하중은 식 (15)로 표현할 수 있다.

$$q_P = \bar{k}_W u_z - \bar{k}_P \nabla^2 u_z \quad (15)$$

$$= \bar{k}_W (w_b + w_s) - \bar{k}_P \nabla^2 (w_b + w_s)$$

여기서, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, \bar{k}_W 그리고 \bar{k}_P 는 Winkler 지반 계수 그리고 Pasternak 전단 지반계수를 의미한다. Pasternak 탄성지반 효과로 인해 추가되는 가상 변형 에너지는 식 (16)과 같다.

$$\delta U_{EF} = \int_A \left[\bar{k}_W u_3 \delta u_z + \bar{k}_P \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial \delta u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial \delta u_z}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (16)$$

3.3 점진기능재료 판의 구성방정식

식 (17)은 점진기능재료 판의 구성방정식이다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

점진기능재료 판의 합응력은 식 (18)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx}^{(0)}, Q_{xx}^{(1)}, Q_{xx}^{(2)} \\ Q_{yy}^{(0)}, Q_{yy}^{(1)}, Q_{yy}^{(2)} \\ Q_{xy}^{(0)}, Q_{xy}^{(1)}, Q_{xy}^{(2)} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}(1, z, f(z)) \\ \sigma_{yy}(1, z, f(z)) \\ \sigma_{xy}(1, z, f(z)) \end{Bmatrix} dz \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} g(z) dz$$

여기서, $g(z) = \frac{d\Psi(z)}{dz}$ 이다.

4. 동적 평형방정식

식 (9)와 식 (10)을 식 (8)에 대입하고 부분 적분하여 정리하면 식 (19)와 같은 동적 평형방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta u_x : Q_{xx,x}^{(0)} + Q_{xy,y}^{(0)} &= d_0 \ddot{u}_x - d_1 \ddot{w}_{b,x} - d_2 \ddot{w}_{s,x} \quad (19) \\ \delta u_y : Q_{xy,x}^{(0)} + Q_{yy,y}^{(0)} &= d_0 \ddot{u}_y - d_1 \ddot{w}_{b,y} - d_2 \ddot{w}_{s,y} \\ \delta w_b : (Q_{xx,x}^{(1)} + Q_{xy,y}^{(1)})_{,x} + (Q_{xy,y}^{(1)} + Q_{yy,y}^{(1)})_{,y} + q & \\ &- \bar{k}_W (w_b + w_s) + \bar{k}_P \nabla^2 (w_b + w_s) \\ &= d_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + d_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial y} \right) - d_3 \nabla^2 \ddot{w}_b - d_4 \nabla^2 \ddot{w}_s \\ \delta w_s : (Q_{xx,x}^{(2)} + Q_{xy,y}^{(2)})_{,x} + (Q_{xy,y}^{(2)} + Q_{yy,y}^{(2)})_{,y} + Q_{xz,x} + Q_{yz,y} & \\ &+ q - \bar{k}_W (w_b + w_s) + \bar{k}_P \nabla^2 (w_b + w_s) \\ &= d_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + d_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial y} \right) - d_4 \nabla^2 \ddot{w}_b - d_5 \nabla^2 \ddot{w}_s \end{aligned}$$

여기서,

$$d_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, f(z), z^2, z f(z), f^2(z)) dz \quad (20)$$

5. Navier 방법

Navier 방법을 이용하여 락 법칙 및 S형상 함수 점진기능 재료 판의 정적 및 자유진동 해석을 수행하였다. 기존의 5-변수 전단변형이론을 단순화하여 단순지지 판의 휨 및 자유진동 해석 방법을 제시하였다. 본 연구에서 판의 중립면에서의 변위는 식 (21)과 같이 이중 푸리에 급수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_x^0(x, y, t) \\ u_y^0(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} A_1 \\ V_{mn} A_2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{Bmatrix} w_b(x, y, t) \\ w_s(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} A_3$$

여기서, $A_1 = \cos \xi x \sin \eta y \cdot e^{i\omega_{mn} t}$,

$$A_2 = \sin \xi x \cos \eta y \cdot e^{i\omega_{mn} t}, \quad A_3 = \sin \xi x \sin \eta y \cdot e^{i\omega_{mn} t}$$

그리고 $\xi = m\pi/a$, $\eta = n\pi/b$, ω_{mn} 은 고유진동수이다. 수직하중 q 는 식 (22)로 주어진다.

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \xi x \sin \eta y \quad (22)$$

식 (21)을 식 (19)에 대입하면 식 (23)과 같은 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{K}] - \omega_{mn}^2 [\mathbf{M}] \{\Delta\} = \{\mathbf{Q}\} \quad (23)$$

여기서, $\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}$ 그리고 $[\mathbf{K}]$ 는 강성행렬, $[\mathbf{M}]$ 은 질량행렬이고 $\{\mathbf{Q}\}$ 는 하중벡터이다. $\{\mathbf{Q}\} = 0$ 으로 가정하면 자유진동 해석을 수행할 수 있고, $[\mathbf{M}] = 0$ 으로 가정하면 휨 해석을 수행할 수 있다.

6. 결과 분석

떡 범칙 및 S형상 함수 점진기능재료 판의 정적 및 자유진동해석 결과를 참고문헌의 결과들과 비교, 분석하기 위하여 Table 1과 Fig. 1에 점진기능재료 판의 재료 및 기하학적 성질을 제시하였다.

Table 1 Material properties of FGM plate

Material Properties	Metal	Ceramic
	Aluminum	Alumina
Elastic Modulus: E_2, E_1 (GPa)	70	380
Poisson's ratio: ν	0.3	0.3
Density: ρ_2, ρ_1 (kg/m ³)	2702	3800

점진기능재료의 축방향 변위, 수직처짐과 고유진동수는 식 (24)를 이용하여 무차원화 하였다.

$$\hat{w} = w \frac{E_1 h^3}{q_0 a^4} \times 10, (\bar{u}_x, \bar{w}) = (u_x, w) \frac{E_2 h^3}{q_0 a^4} \times 10^3 \quad (24)$$

$$\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}, \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}$$

폭-두께 비가 4, 10 그리고 100인 경우의 P-FGM 판의 중앙점 수직처짐을 참고문헌들의 결과와 비교하기 위하여 Table 2에 나타내었다. 전단변형의 효과가 무시될 수 있는 폭-두께비가 100인 경우에는 3가지 결과의 오차가 거의 발생하지 않았지만 폭-두께비가 4인 경우에는 유사 3차원 해석 결과인 Neves 등(2013)의 결과와 3.8%의 오차가 발생하였다.

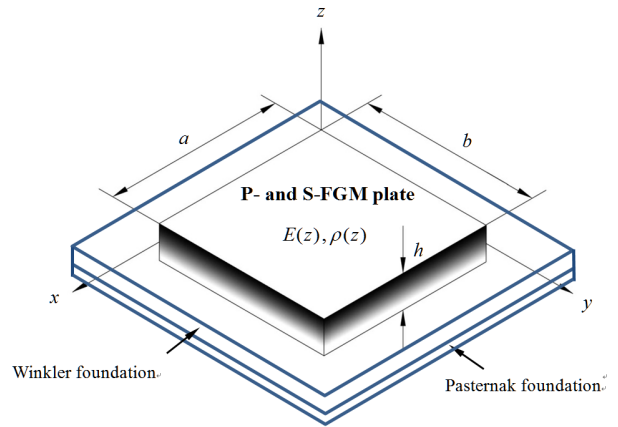


Fig. 1 Geometry of FGM plate

본 연구의 결과는 Thai 등(2013)의 결과들 보다 Neves 등(2013)의 결과에 조금 더 가까운 결과를 나타내었다. 이러한 이유는 Thai 등(2013)는 일차 전단변형 이론을 적용하였기 때문으로 판단된다. 전체적으로 거듭제곱 지수가 증가하면 수직처짐이 증가하였고 폭-두께 비가 증가할 때는 수직처짐이 감소하였다.

고유진동수를 비교하기 위하여 폭-두께 비가 2, 5 그리고 10인 경우의 P-FGM 판의 무차원 진동수를 참고문헌들의

Table 2 Comparison of nondimensional deflection(\hat{w}) of P-FGM plate under sinusoidal loads

a/h	Method	P-FGM Power-law index(p)		
		1	4	10
4	Neves <i>et al.</i> 2013	0.7020	1.1108	1.3334
	Thai <i>et al.</i> 2013	0.7291	1.1125	1.3178
	Present	0.7284	1.1599	1.3909
10	Neves <i>et al.</i> 2013	0.5868	0.8700	0.9888
	Thai <i>et al.</i> 2013	0.5890	0.8736	0.9966
	Present	0.5890	0.8815	1.0087
100	Neves <i>et al.</i> 2013	0.5647	0.8240	0.9227
	Thai <i>et al.</i> 2013	0.5625	0.8286	0.9361
	Present	0.5625	0.8287	0.9362

Table 3 Comparison of nondimensional frequency($\hat{\omega}$) of P-FGM plate

a/h	Method	P-FGM Power-law index(p)			
		0.5	1	4	10
2	Thai <i>et al.</i> 2013	0.8062	0.7333	0.6116	0.5644
	Matsnaga, 2008	0.8232	0.7476	0.5997	0.5460
	Present	0.8110	0.7356	0.5924	0.5412
5	Thai <i>et al.</i> 2013	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
	Matsnaga, 2008	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
	Present	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
10	Thai <i>et al.</i> 2013	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
	Matsnaga, 2008	0.0492	0.0443	0.0381	0.0364
	Present	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364

결과와 비교하기 위하여 Table 3에 나타내었다. 본 연구의 결과는 참고문헌의 결과들과 전반적으로 정확하게 일치하였다. 거듭제곱 지수가 증가하는 경우에 진동수가 감소하였고 폭-두께 비가 증가하는 경우에도 진동수가 감소하였다.

특히 매우 두꺼운 FGM 판의 고유진동수를 비교하기 위하여 폭-두께 비가 2인 경우의 무차원 진동수를 비교하였다. 폭-두께 비가 2인 매우 두꺼운 FGM 판의 경우에도 본 연구의 결과는 Matsnaga(2008)의 결과들과 1.5% 정도의 오차만 발생하였다. 반면에 일차 전단변형 이론을 적용한 Thai 등(2013)의 결과는 2.1%의 오차가 발생하였다.

탄성지반 효과를 고려하기 위하여 식 (25)의 무차원 식을 이용하였다.

$$k_W = \frac{\bar{k}_W a^4}{D}, k_P = \frac{\bar{k}_P a^2}{D}, D = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (25)$$

Winkler 탄성지반 효과와 Pasternak 탄성지반 효과가 동시에 고려된 S-FGM 판의 고유진동수를 표 4에서 비교하였다. 폭-두께비와 거듭제곱 지수는 4가지 경우를 적용하였다. Jung 등(2014)는 일차 전단변형을 고려하였기 때문에 폭-두께비가 작은 경우에 전반적으로 약간의 오차가 발생하였다. Reddy(2000)는 5개의 변수를 가지는 3차 전단변형 이론을 적용하여 해석한 결과이다. 본 연구는 4개의 변수만을 적용하였음에도 5개의 변수가 고려된 경우와 매우 잘 일치하는 결과를 나타내었다.

Fig. 2에는 S-FGM 판과 등방성 판의 중앙선($y=b/2$)을 따라서 처짐을 나타내었다. 거듭제곱 지수의 증가에 따라 S-FGM 판의 처짐이 증가하였다. 기존의 S-FGM 판에 대한 정적해석은 수직처짐을 연구하는 것이 대부분이었다. 따라서

Table 4 Comparison of nondimensional frequency($\bar{\omega}$) of S-FGM plate on Pasternak elastic foundation($k_W = k_P = 100$)

a/h	Method	S-FGM Power-law index(p)			
		1	2	5	10
5	Jung <i>et al.</i> 2014	14.6299	-	14.1959	14.1341
	Reddy, 2000	14.6305	14.4031	14.2029	14.1425
	Present	14.6305	14.4031	14.2029	14.1425
10	Jung <i>et al.</i> 2014	15.1886	-	14.7019	14.6340
	Reddy, 2000	15.1887	14.9295	14.7043	14.6368
	Present	15.1887	14.9295	14.7043	14.6368
20	Jung <i>et al.</i> 2014	15.3663	-	14.8575	14.7869
	Reddy, 2000	15.3663	15.0940	14.8582	14.7876
	Present	15.3663	15.0940	14.8582	14.7876
100	Jung <i>et al.</i> 2014	15.4276	-	14.9107	14.8390
	Reddy, 2000	15.4276	15.1504	14.9107	14.8390
	Present	15.4276	15.1504	14.9107	14.8390

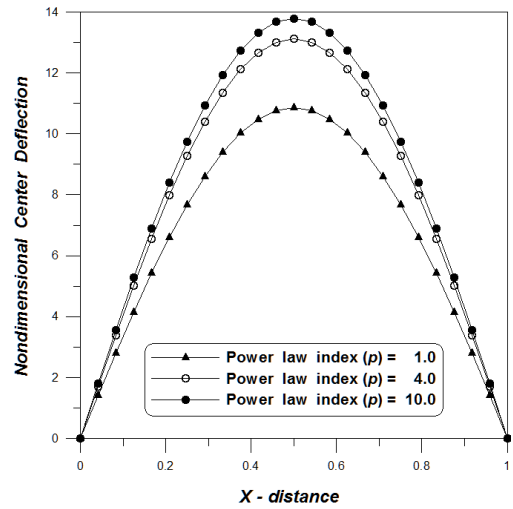


Fig. 2 Nondimensional deflection(\bar{w}) of sigmoid functionally graded material plate with various power law index

축방향 변위와 합응력에 대한 연구는 거의 전무한 실정이다. 다음 예제는 거듭제곱 지수의 변화에 따른 S-FGM 판의 축방향 변위와 합응력을 중앙선($y=b/2$)을 따라서 구하고 Fig. 3과 Fig. 4에 나타내었다. 합응력을 구하기 위하여 식 (26)을 이용하여 무차원화 하였다. 쉽게 예측할 수 있듯이 축방향 변위와 합응력 또한 거듭제곱 지수의 증가에 따라서 증가하였다.

$$\bar{Q}_{xz} = \frac{Q_{xz}}{q_0 a} \quad (26)$$

폭-두께 비의 변화와 Winkler 탄성지반 계수의 변화에 따른 점진기능재료 판의 무차원 중앙점 수직처짐과 고유진동수를 Fig. 5와 Fig. 6에 나타내었다. Winkler 탄성지반

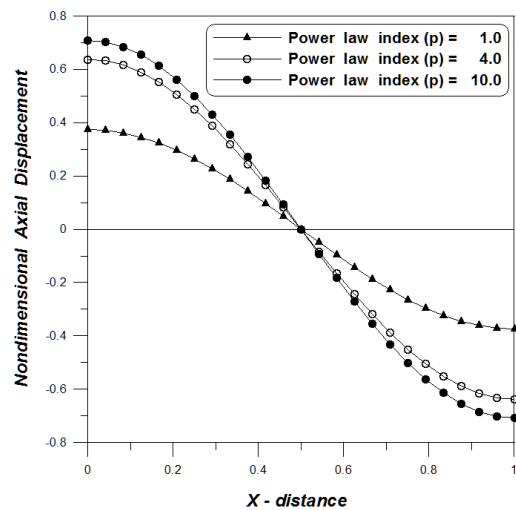


Fig. 3 Nondimensional displacement(\bar{u}_x) of sigmoid functionally graded material plate with various power law index

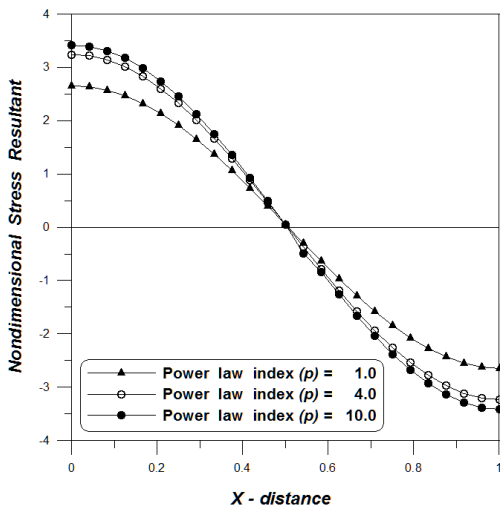


Fig. 4 Nondimensional stress resultant($\overline{Q_{xz}}$) of sigmoid functionally graded material plate with various power law index

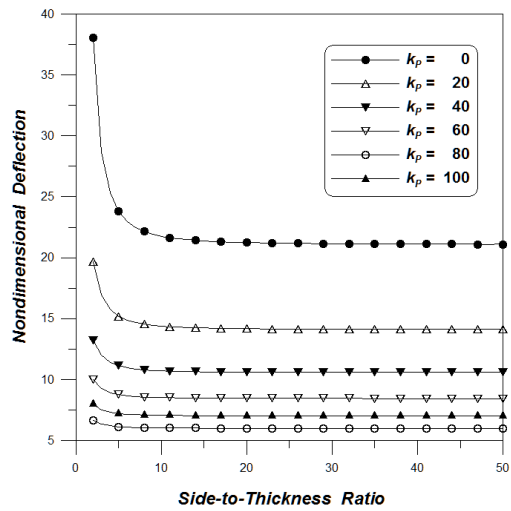


Fig. 7 Nondimensional deflection(\bar{w}) of sigmoid functionally graded material plate($k_W=0, p=10.0$)

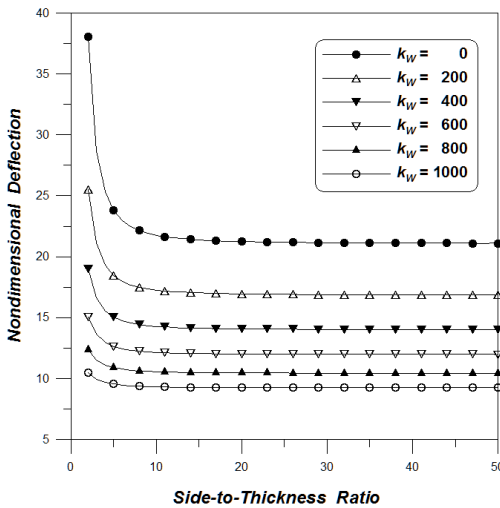


Fig. 5 Nondimensional deflection(\bar{w}) of sigmoid functionally graded material plate($k_p=0, p=10.0$)

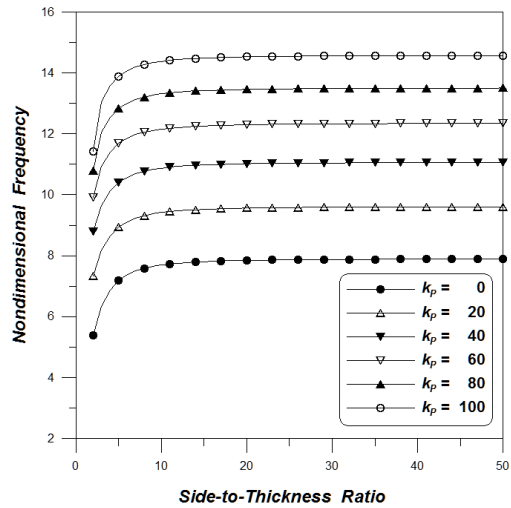


Fig. 8 Nondimensional frequency($\bar{\omega}$) of sigmoid functionally graded material plate($k_W=0, p=10.0$)

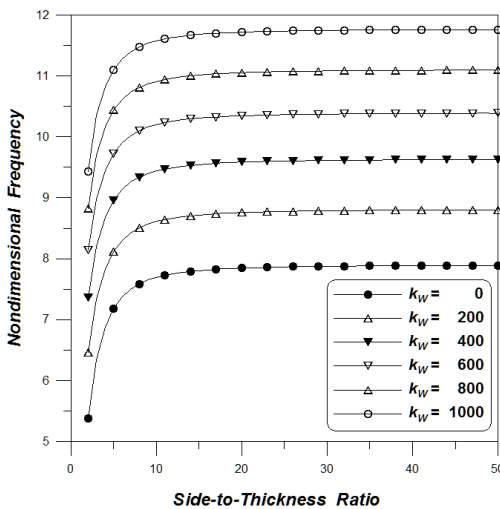


Fig. 6 Nondimensional frequency($\bar{\omega}$) of sigmoid functionally graded material plate($k_p=0, p=10.0$)

계수의 증가는 점진기능재료 FGM 판의 강성증대 효과를 발휘하게 되어 무차원 수직처짐은 감소시키고 고유진동수는 증가시킨다는 것을 알 수 있었다.

Fig. 7과 Fig. 8은 Pasternak 탄성지반 계수의 영향을 분석하였다. Pasternak 탄성지반 계수는 Winkler 탄성지반 계수에 비하여 상대적으로 강성증대 효과가 커서 무차원 수직처짐과 고유진동수의 변화에 더 큰 역할을 한다는 것을 알 수 있었다.

Fig. 9와 10에서는 거둬제공 지수와 점진기능재료 판의 수직처짐과 고유진동수의 관계를 나타내었다. 거둬제공 지수 (p)가 0.1에서 10까지 증가할 때는 무차원 수직처짐은 증가하였고 진동수는 감소하였다. 따라서 탄성지반위에 놓인 점진기능재료 판의 엄밀한 정적 및 진동해석을 수행하는 경우 탄성지반 계수는 물론 거둬제공 지수의 변화에 따른 수직처짐과

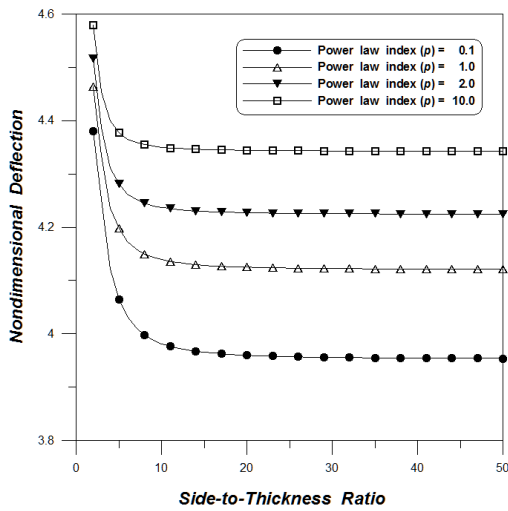


Fig. 9 Nondimensional deflection(\bar{w}) of sigmoid functionally graded material plate($k_W=1000, k_P=100$)

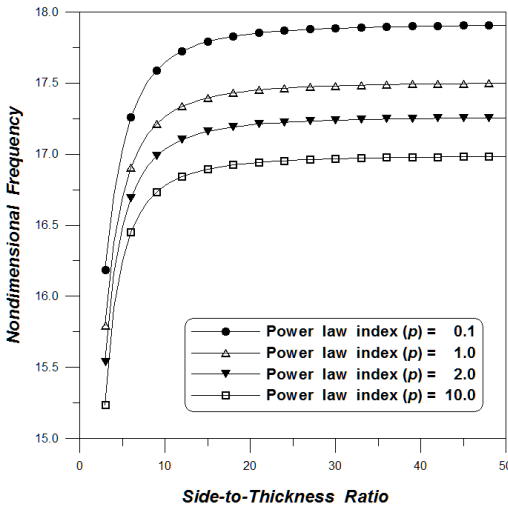


Fig. 10 Nondimensional frequency($\bar{\omega}$) of sigmoid functionally graded material plate($k_W=1000, k_P=100$)

진동수의 변화를 정확히 분석할 필요가 있다고 판단된다.

7. 결론

본 연구에서는 단순화된 전단변형이론을 이용하여 떡 법칙 및 S형상 함수 점진기능재료 판의 정적 및 자유진동해석을 수행하였다. Hamilton 정리를 이용하여 단순화된 전단변형이 고려된 동적 평형방정식을 유도하였고 Winkler- Pasternak 탄성지반 모델을 사용하여 엄밀한 탄성지반 효과를 적용하였다. 탄성지반 계수와 거듭제곱 지수 및 폭-두께 비의 변화에 따른 점진기능재료 판의 정적 및 동적 해석 결과들을 분석한 결과 다음과 같은 4 가지 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 탄성지반 위에 놓인 점진기능재료 판은 탄성지반 효과로

인해 강성증대 효과를 발휘하여 무차원 수직 처짐의 감소와 진동수의 증가를 유발하였다.

- (2) Pasternak 탄성지반 계수는 Winkler 탄성지반 계수에 비해 강성증대 효과가 커서 무차원 수직 처짐과 진동수의 변화에 미치는 영향이 상대적으로 더 컸다.
- (3) 거듭제곱 지수의 증가는 무차원 수직 처짐을 증가시키고 진동수를 감소시켰다. 거듭제곱 지수, 탄성지반 효과 및 폭-두께 비의 변화가 동시에 고려되는 경우에 무차원 수직 처짐과 진동수의 변화는 보다 엄밀한 해석이 필요함을 알 수 있었다.
- (4) 점진기능재료 판의 폭-두께 비의 증가는 무차원 수직 처짐을 감소시켰고 진동수는 증가시켰다. 폭-두께 비가 20 이상인 경우에는 일정한 값으로 수렴하였다.

떡 법칙 및 S 형상 함수 점진기능재료 판의 해석을 위하여 미지수의 개수를 감소시켜 단순화된 전단변형 효과를 고려한 본 연구는 해석의 효율을 증가시킬 수 있을 것으로 판단되며 계산된 결과들은 향후 수치해석(FEM, FDM, FSM 등) 연구자들을 위한 참고자료가 될 것으로 판단된다.

감사의 글

이 논문은 2016년도 경남과학기술대학교 대학회계 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

References

Bao, G., Wang, L. (1995) Multiple Cracking in Functionally Graded Ceramic/Metal Coatings, *Int. J. Solids & Struct.*, 32, pp.2853~2871.

Benachour, A., Daouadji, T.H., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Ahmed, M.S. (2011) A Four Variable Refined Plate Theory for Free Vibrations of Functionally Graded Plates with Arbitrary Gradient, *Compos. Part B: Eng.*, 42, pp.1386~ 1394.

Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A. (2012) A New Four-variable Refined Plate Theory for Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates, *J. Sandwich Struct. & Mater.*, 14, pp.5~33.

Han, S.C., Yoon, S.H., Chang, S.Y. (1997) Bending and Dynamic Characteristics of Antisymmetric Laminated Composite Plates Considering a Simplified Higher-order Shear Deformation, *J. KSSC*, 9(4), pp.601~609.

- Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S.R.** (2011) Study on the Free Vibration of Thick Functionally Graded Rectangular Plates according to a New Exact Closed-form Procedure, *Compos. Struct.*, 93, pp.722~735.
- Jung, W.Y., Park, W.T., Han, S.C.** (2014) Bending and Vibration Analysis of S-FGM Microplates Embedded in Pasternak Elastic Medium using the Modified Couple Stress Theory, *Int. J. Mech. Sci.*, 87, pp.150~162.
- Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S.** (2003) Mechanical behavior of Laminated Composite Beam the New Multilayered Laminated Composite Structures Model with Transverse Shear Stress Continuity, *Int. J. Solids & Struct.*, 40(6), pp.1525~1546.
- Lee, W.H., Han, S.C., Park, W.T.** (2015) A Study of Dynamic Instability for Sigmoid Functionally Graded Material Plates on Pasternak Elastic Foundation, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 28(1), pp.85~92.
- Malekzadeh, P., Shojaee, M.** (2013) Free Vibration of Nanoplates based on a Nonlocal Two-variable Refined Plate Theory, *Compos. Struct.*, 95, pp.443~452.
- Mantari, J.L., Guedes Soares, C.** (2014) Optimized Sinusoidal Higher Order Shear Deformation Theory for the Analysis of Functionally Graded Plates and Shells, *Compos. Part B: Eng.*, 56, pp.126~136.
- Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C.** (2012) A New Trigonometric Shear Deformation Theory for Isotropic, Laminated Composite and Sandwich Plates, *Int. J. Solids & Struct.*, 49, pp.42~53.
- Matsunaga, H.** (2008) Free Vibration and Stability of Functionally Graded Plates according to a 2-D Higher-order Deformation Theory, *Compos. Struct.*, 82, pp.499~512.
- Mechab, I., Mechab, B., Benaissa, S.** (2013) Static and Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates using Four-variable Refined Plate Theory by the New Function, *Compos. Part B: Eng.*, 45, pp.748~757.
- Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Roque, C.M.C., Jorge, R.M.N., Soares, C.M.M.** (2013) Static, Free Vibration and Buckling Analysis of Isotropic and Sandwich Functionally Graded Plates using a Quasi-3D Higher-order shear Deformation Theory and a Meshless Technique, *Compos. Part B: Eng.*, 44(1), pp.657~674.
- Reddy, J.N.** (2000) Analysis of Functionally Graded Plates, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47, pp.663~684.
- Reddy, J.N.** (2007) Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, CRC Press, London.
- Senthilnathan, N.R., Chow, S.T., Lee, K.H., Lim, S.P.** (1987) Buckling of Shear-deformable Plates, *AIAA J.*, 25, pp.1268~1271.
- Shimpi, R.P., Patel, H.G.** (2006a) Free Vibrations of Plate using Two Variable Refined Plate Theory, *J. Sound & Vib.*, 296, pp.979~999.
- Shimpi, R.P., Patel, H.G.** (2006b) A Two Variable Refined Plate Theory for Orthotropic Plate Analysis, *Int. J. Solids & Struct.*, 43, pp.6783~6799.
- Thai, H.T., Choi, D.H.** (2013) A Simple First-order Shear Deformation Theory for the Bending and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates, *Compos. Struct.*, 101, pp.332~340.
- Thai, H.T., Kim, S.E.** (2010) Free Vibration of Laminated Composite Plates using Two Variable Refined Plate Theory, *Int. J. Mech. Sci.*, 52, pp.626~633.
- Touratier, M.** (1991) An Efficient Standard Plate Theory, *Int. J. Eng. Sci.*, 29(8), pp.901~916.
- Tran, L.V., Ferreira, A.J.M., Nguyen-Xuan, H.** (2013) Isogeometric Analysis of Functionally Graded Plates using Higher-order Shear Deformation Theory, *Compos. Part B: Eng.*, 51, pp.368~383.
- Xiang, S., Jin, Y.X., Bi, Z.Y., Jiang, S.X., Yang, M.S.** (2011) A n-order Shear Deformation Theory for Free Vibration of Functionally Graded and Composite Sandwich Plates, *Compos. Struct.*, 93(11), pp.2826~2832.
- Zenkour, A.M.** (2006) Generalized Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates, *Appl. Math. Model.*, 30, pp.67~84.

요 지

떡 법칙 및 S 형상 함수를 이용한 점진기능재료(FGM) 판의 정적 및 동적해석을 위해 단순화된 진단변형이 고려된 이론을 정식화 하여 동적 평형방정식을 유도하였다. 단순화된 진단변형 이론은 진단보정계수가 필요없으며 수직 진단변형률과 진단응력의 곡선분포를 고려하였고 판의 상부와 하부에서 0이 된다는 조건을 만족한다. 또한 4개의 변수만으로 평형방정식이 유도되고 합응력, 평형방정식 그리고 경계조건이 고전적 이론과 유사한 형태를 가지게 된다. 점진기능재료의 형태는 떡 법칙 및 S 형상 함수로 두께방향으로 변화가 고려된다. Hamilton 원리를 이용하여 동적 평형방정식을 유도하였고 Winkler-Pasternak 탄성지반 모델을 적용하였다. 단순지지된 점진기능재료 판의 정적 및 자유진동 응답을 계산하였고 비교하였다. 본 연구에서 제시한 결과는 참고문헌과 비교하여 정확하고 관련성을 가진다. 거듭제곱 지수, 탄성지반 계수 그리고 폭-두께비의 변화에 따른 정적 및 자유진동 해석결과를 제시하였다.

핵심용어 : 단순화된 판 이론, 떡 법칙 및 S 형상 점진기능재료, 거듭제곱 지수, Pasternak 탄성지반