대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 26 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 26, No. 4, 769 ~ 789. Nov 2016

초등학생의 함수적 사고 신장을 위한 기하 패턴 지도 사례의 분석

방 정 숙* · 선 우 진**

패턴 활동은 어린 학생들의 함수적 사고를 신장하는 데 효과적이지만, 구체적으로 패턴을 어떻게 지도해야 하는가에 대한 연구는 부족한 편이다. 이에 본 연구에서는 초등학생의 함수적 사고를 신장하기 위한 기하 패턴의 지도 방안을 도출하여, 이를 초등학교 수학 수업으로 구현한 사례를 분석하였다. 이를 위하여 초등학교 4학년 3개 학급을 선정하였고, 동일한 교수·학습 과정안을 바탕으로 세 명의 초등학교 교사들이 각 학급에서 수업을 진행하였다. 수업은 크게 공통성을 인식하는 과정, 공통성에 대한 인식을 확장하는 과정, 공통성을 표현하는 과정으로 구성하였으며, 분석 결과 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동은 초등학교 4학년 학생들이 패턴의 일반화된 규칙을 추론하고 표현하는 활동에 영향을 주었다. 이와 같은 결과를 토대로 초등학생의 함수적 사고를 신장하기 위한 기하 패턴의 지도 방안에 대하여 시사점을 논의하였다.

I. 서 론

패턴 활동은 학생들의 함수적 사고(functional thinking)를 신장하는 데 유용하다. 패턴 활동은 패턴의 구조와 관계를 다루고 그것을 일반화하여 표현하는 활동을 강조하는데, 이는 Blanton, Levi, Crites와 Dougherty(2011)가 제시한 함수적 사고의 정의와도 일맥상통하기 때문이다. 구체적으로 Blanton 외(2011)는 함수적 사고를 공변하는 양 사이의 관계를 일반화하고, 그것을 언어, 기호, 표, 그래프 등으로 표현하며, 함수 행동(function behavior)을 분석하기 위하여 그러한 표현을 바탕으로 추론하는 일련의 사고 과정을 포함한다고 정의하였으며, 이를 대수적 사고를 신장하기 위한 핵심적인 아이디어 중 하나로 보았다.

패턴 활동을 다룬 연구들을 살펴보면, 기하 패턴[1] 활동을 통하여 초등학생들의 함수적 사고의 특징과 가능성을 탐색하는 연구가 많다(Kieren, Pang, Schifter, & Ng, 2016). 이러한 연구들은 초등학생들도 기하 패턴을 탐구하는 과정에서 추상적인 수의 패턴이나 두 양 사이의 공변(co-variation)을 시각적으로 파악할 수 있으며, 그것을 나름의 방식으로 표현하고 일반화할 수 있다는 것을 보여주었다(Beatty, 2010; Radford, 2010). 나아가 최근에는 패턴 활동에 대한 학생의 학습을 탐구할 뿐만 아니라, 구체

* 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr (제1 저자)
** 한국교원대학교 대학원, camy17@naver.com (교신저자)
1) 기하 패턴(geometric pattern)이란 패턴의 배열이 도형 형태로 이루어진 패턴 유형을 통칭하며, 본 연구에서는 그 중 패턴의 각 항(term)이 일정하게 증가하는 기하 증가 패턴(geometric growing patterns)을 다룬다. 패턴의 종류에 대한 자세한 설명은 Warren과 Cooper(2008) 등을 참고하기를 바란다.

적인 지도 방안을 모색하려는 노력이 확산되고 있다. 예를 들어, Blanton, Brizuela, Sawrey와 Newman- Owens(2015), Moss와 McNab(2011)은 어린 학생들의 함수적 사고를 신장하기 위한 구체적인 교수 계열을 제시하였는데, 이는 연구를 실제 수학 수업으로 구현하기 위한 노력이라는 점에서 의미 있는 시도라 하겠다.

한편 국내에서도 초등학생의 패턴 활동과 관련된 연구들이 진행되었다. 하지만 주로 패턴 활동 과정에서 학생들이 어떻게 사고하는지에 초점을 두고 있으며, 패턴을 어떻게 지도해야 하는지에 관한 연구는 상대적으로 부족한 편이다(방정숙, 선우진, 2016). 드물게 김남균과 김은숙(2009), 방정숙과 선우진(2016) 등에서 패턴 지도에 대한 연구를 확인할 수 있는데, 김남균과 김은숙(2009)은 초등학교 6학년을 대상으로 패턴 일반화를 지도하는 교수 실험을 진행하였다는 점에서 주목할 만하지만, 구체적인 지도 방안보다는 패턴 일반화 단계에 따른 학생들의 반응과 어려움에 초점이 맞춰져 있다. 방정숙과 선우진(2016)은 대수적 사고의 신장 측면에서 현행 초등학교 수학 교과서에 패턴 지도 방안이 어떻게 구현되어 있는지를 구체적으로 분석하였다는 특징이 있지만, 이 역시 실제 초등학교 수학 수업에서의 지도 사례를 대신하지는 못한다. 즉 국내에서는 아직 초등학교 수학 수업에 적용 가능한 구체적인 패턴 지도 방안을 제시하는 연구가 부족한 실정이다.

이에 본 논문에서는 초등학생의 함수적 사고의 신장에 초점을 두어 구체적인 패턴 지도 방안 중 먼저 기하 패턴을 지도하는 방안에 대하여 연구하였다. 이를 위하여 선행 연구를 토대로 패턴 지도 방향을 도출한 뒤 그것을 바탕으로 초등학교 수학 수업을 계획하였고, 이를 세 명의 초등학교 교사들이 수학 수업에서 어떻게 구현하는지 분석하였다. 이러한 연구 결과를 토대로 초등학생의 함수적 사고를 신장할 수 있는 기하 패턴 지도 방안에 대한 실질적인 시사점을 도출하고, 더불어 이러한 지도 방안을 수학 수업으로 구현할 수 있는 가능성을 탐색하고자 하였다.

II. 이론적 배경

1. 패턴 일반화

패턴 일반화에 대한 대표적인 정의는 Radford(2010)에서 살펴볼 수 있다. Radford(2010)는 모든 패턴 일반화 활동이 대수적인 활동은 아니라고 주장하며, 패턴 일반화가 대수적인 활동이 되기 위해서는 학생들이 몇 개의 특정 항들 사이에서 공통성(commonality)을 인식하고, 그 공통성이 나머지 모든 항에서도 항상 적용된다는 것을 이해한 후, 이를 몸짓, 일상 언어나 기호 등으로 표현하는 활동이 모두 포함되어야 한다고 하였다.

한편 Rivera(2013)는 개인의 인지적 요소 뿐 아니라 사회문화적 요소와 그 외의 다양한 요소들이 패턴 일반화 과정에 영향을 미친다고 보았고, 그러한 요소들을 고려하여 의도적인 학습과 훈련을 지속함으로써 학생들의 패턴 일반화를 신장할 수 있다고 주장하였다. 그는 초등학생들이 기하 패턴을 일반화한 결과에 대해 ‘대략적 일반화(approximate generalizations)’와 ‘정확한 일반화(exact generalizations)’로 구별하기도 하였는데, 먼저 대략적 일반화는 학생들이 기하 패턴이 가지고 있는 전체적이고 외형적인 모양의 유사성에 의존하여 패턴 일반화를 구성하는 경우이고, 정확한 일반화는 패턴의 외형적인 모양에 의존하기 보다는 그 구조가 가지고 있는 개념적인 일관성을 인식한 일반화라고 보

았다. 이와 더불어 수와 연산에 대한 이해, 기하 패턴의 모양 등이 패턴 일반화에 영향을 끼친다고 주장하였다.

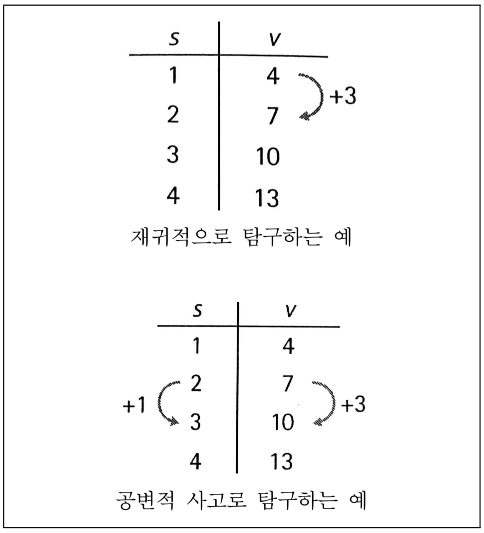
위의 두 연구는 모두 기하 증가 패턴에 대한 학생들의 탐구를 중심으로 패턴 일반화를 연구하였다는 공통점이 있으나, Radford(2010)의 정의에서는 대수적인 패턴 일반화를 만족하는 요건을 제시하였고, Rivera(2013)에서는 학생들의 패턴 일반화에 영향을 주는 요인을 제시하였다는 차이가 있다. 이에 본 연구에서는 Radford(2010)의 주장을 토대로, 패턴 일반화를 지도하는 학습의 단계를 [그림 II-1]과 같이 구성하되, 구체적인 지도 방안을 모색할 때에는 Rivera(2013)를 반영하여 학생들의 패턴 일반화에 영향을 줄 수 있는 요인을 고려하였다. 더불어 패턴의 일반화된 규칙을 표현하는 단계에서는 수식이나 기호와 같은 세련된 수단 뿐 아니라 학생들의 발달 특성 및 선행 연구를 고려하여 일상 언어나 몸짓 등도 의미 있는 표현 수단으로 인정하였다.

공통성을 인식하는 단계	→	공통성에 대한 인식을 확장하는 단계	→	공통성을 표현하는 단계

[그림 II-1] 패턴 일반화를 지도하기 위한 학습의 단계

2. 패턴을 탐구하는 사고의 유형

Blanton 외(2011)는 Smith(2003)가 제시한 사고 유형을 기준으로 학생들이 함수 관계를 탐구하는 사고의 유형을 세 가지로 제시하였다. 먼저 첫 번째 유형은 재귀적(recursive)으로 탐구하는 유형으로써, 이는 직전 항과의 관계를 통하여 원하는 항을 찾는 방법이다. 예를 들어, [그림 II-2]에서 두 번째 항은 첫 번째 항에 '3을 더한다'는 관계를 파악하고, 이후의 모든 항을 '더하기 3' 관계를 이용하여 찾는 방법이다. 이와 같이 재귀적으로 탐색하는 경우에는 원하는 항을 찾기 위해 직전의 항을 알아야만 하며, 패턴을 이루는 하나의 변수만을 고려하기 때문에 두 수 사이의 일반화된 함수 규칙을 파악하는 데 어려움이 있다.



[그림 II-2] 패턴을 탐구하는 사고의 유형 (Blaton et al., 2011, pp. 52-53)

두 번째로 공변적 사고(covariational thinking)로 탐구하는 경우는 서로 관계가 있는 두 수가 어떻게 변하는지 명확하게 인식하고 표현하는 경우를 이른다. [그림 II-2]와 같이 s에 해당하는 변수가 2에서 3으로 1만큼 증가할 때, v에 해당하는 변수는 7에서 10으로 3만큼 증가한다는 것을 바탕으로, s가 1씩 변할 때마다 v가 3씩 변한다는 것을 이해하는 것이다. 이러한 경우에는 두 수의 공변을 이용하여 원하는 항을 찾을 수는 있지만, 임의의 항을 구할 때에 두 수 사이의 관계를 비효율적으로 탐색하게 된다.

마지막으로 대응 관계(correspondence relationship)로 탐구하는 유형은 두 수 사이의 관계를 일반

화된 함수 규칙으로 표현할 수 있는 경우를 이른다. 이 때에는 [그림 II-2]의 함수표(function table)를 보고, s가 1일 때 v는 4, s가 2일 때 v는 7과 같이 두 변수를 수평적으로 탐색하여, s와 v의 관계를 ‘s×3+1=v’로 이해하고 이를 대수식이나 말 등으로 표현할 수 있기 때문에, 임의의 항도 쉽게 구할 수 있다. 즉 공변적 사고로 탐구하는 경우는 함수표 상에서 두 수가 각각 어떻게 변화하는지 수직적으로 고려하는 반면, 대응 관계로 탐구하는 유형은 두 수를 동시에 수평적으로 고려하면서 그 변화를 탐색한다. 본 연구에서는 수업에서 드러나는 학생들의 사고를 이러한 사고 유형을 참고하여 분석하였다.

3. 패턴 지도 방안에 대한 선행연구

본 절에서는 구체적인 패턴 지도 방안을 제시하고 있는 연구들을 중심으로 살펴보겠다. 먼저 기하 패턴의 지도 방안을 탐색한 연구를 살펴보면 다음과 같다. Moss와 McNab(2011)은 캐나다의 만 7~8세 아동을 대상으로 기하 패턴과 수치적 패턴(numeric pattern)을 통합적으로 지도할 수 있는 패턴 지도 계열을 고안하였다. 주요 특징은 기하 패턴, 수치적 패턴, 기하 패턴과 수치적 패턴을 통합한 ‘패턴 길(pattern sidewalk)’ 활동의 순서로 패턴을 지도하였다는 점이다(Moss, McNab, 2011, p. 284).

다음으로 Rivera(2013)는 미국의 초등학교 2학년 학생들을 3학년까지 종적 연구한 결과를 중심으로 만 7~8세 학생들에게 드러나는 패턴 일반화 과정의 특징을 분석하였다. Rivera (2013)는 특히 기하 패턴 활동을 주로 연구하였고, 학생들이 기하 패턴의 형태적 특성을 인식하는 과정에 주목하였다. 구체적으로 학생들이 각 항의 모양에 주의를 기울이는 것 보다 항들 사이에서 공통적이거나 반복적인 형태적 특성을 파악하는 것이 패턴 일반화에 효과적이라고 보았다. 그리고 이처럼 패턴의 형태적 특성을 인식하거나 분석할 때에는 기하 패턴 과제의 종류도 영향을 미친다고 하였다. 예를 들어 대칭성과 반복성을 띠는 기하 패턴을 대수적으로 유용한 구조를 지닌 패턴 과제라고 하였으며, 그러한 과제는 학생들의 패턴 일반화를 더욱 촉진할 수 있다고 주장하였다. 더불어 패턴 과제에 대한 형태적 특성을 분석하는 능력은 동료들과 분석 결과를 논의하거나 공유하는 등의 사회적 상호작용을 통하여 활성화되고 신장된다고 하였다.

한편 Blanton 외(2015)는 미국의 유치원생부터 초등학교 2학년 학생들의 함수적 사고를 지도하고자 교실 교수 실험(classroom teaching experiment)을 진행하였다. Blanton 외(2015)는 특히 초등학교 1학년(만 6세)들이 함수 과제에서 두 양 사이의 관계를 어떻게 탐구하고 일반화하는가를 면밀하게 분석하였으며, 그 결과를 어린 학생들의 함수적 사고 양상에 따라 8수준으로 제시하였다. 이때 Blanton 외(2015)는 기하 패턴보다 함수적 관계에 대한 상황이 묘사된 수치적 패턴 과제를 주로 사용하였으며, 함수의 복잡성에 따라 y=x, y=mx, y=x+b, y=mx+b 유형의 함수 과제를 순차적으로 지도하였다. Blanton 외(2015)는 특히 함수표를 중요하게 다루었으며, 학생들이 함수표를 이용하여 과제를 해결할 수 있도록 체계적으로 지도하였다. 이 외에도 저학년 학생들의 함수적 사고를 신장하기 위한 구체적이고 다양한 과제 및 지도 방안을 살펴볼 수 있다는 측면에서 주목할 만하다.

정리하면, Moss와 McNab(2011), Rivera(2013) 두 연구는 기하 패턴을 다룰 때 패턴의 구조를 분석하는 활동을 강조하였다는 점과 기하 패턴을 다루는 과정에서는 함수표를 사용하지 않았다는 공통점이 있다. 반면 Blanton 외(2015)에서는 함수적 관계가 잘 드러나는 수치적 패턴을

다루었고 이 과정에서 함수표를 적극 활용하였다. 본 연구에서는 이와 같은 선행 연구를 반영하여, 패턴 과제를 선정할 때에는 대수적으로 유용한 구조를 지니는지 고려하였고, 학생들이 기하 패턴의 형태적 특성을 분석하는 과정에서는 전체 논의나 소그룹 논의를 병행할 수 있도록 수업을 구성하였으며, 이 과정에서 함수표를 의도적으로 안내하지는 않았다.

한편 방정숙과 선우진(2016)은 패턴을 지도하는 방안과 관련된 선행 연구를 분석한 결과, 대수적 사고를 신장하기 위한 패턴 지도 방안은 패턴의 구조를 분석하는 활동, 패턴에서 두 변수 사이의 관계를 탐색하는 활동, 패턴의 일반화된 규칙을 추론하고 표현하는 활동을 강조한다고 주장하였다. 이에 본 연구에서는 이러한 세 가지 주요 활동을 중심으로 수업 활동을 구성하되, 과제의 성격과 수업 상황 등을 고려하여 선행 연구에서 도출한 구체적인 지도 전략들을 선택적으로 적용하였다. 한편 방정숙과 선우진(2016)은 위의 세 가지 활동을 중심으로 현행 초등학교 수학 교과서에 제시된 패턴 관련 내용을 분석하였는데, 그 결과, 현행 교과서에서는 수치적 증가 패턴을 주로 다루고 있으며, 패턴의 구조를 분석하는 활동은 별반 고려되지 않는다는 점 등을 확인하였다. 본 연구는 이러한 결과에 주목하여 현행 교육과정에서 다소 간과되고 있는 기하 패턴 지도 방안의 대안과 가능성을 모색해 보고자하였다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구를 위하여 각기 다른 시・도에 위치한 초등학교에서 4학년 3개 학급을 선정하였다 (<표 III-1> 참조). 이 중 A교사와 B교사의 학생들은 학력 수준과 가정의 사회・경제적 수준이 대체로 중위권에 속하였고, C교사의 학생들은 반 이상이 다문화가정 학생에 해당하며 학력 수준이 낮은 편이었다.

<표 III-1> 연구 대상

교사	경력	학급	수업 코드
A교사	20년	A학급 (25명)	A1, A2(A수업)
B교사	10년	B학급 (26명)	B1, B2(B수업)
C교사	10년	C학급 (14명)	C1, C2(C수업)

본 연구에서 연구 대상을 4학년으로 선정한 이유는 현행 교육과정과 관련이 있다. 연구 당시 학생들은 4학년 1학기 수학 중 자연수의 혼합 계산에 대한 학습을 마친 상태였고, 2학년 이후로는 패턴 활동을 집중적으로 학습한 경험이 없었다. 이에 본 연구를 통하여 학생들이 4학년 2학기에 수치적 패턴을 중심으로 두 변수 사이의 대응 관계를 집중적으로 학습하기에 앞서, 기하 패턴을 중심으로 패턴 일반화를 어떻게 탐구할 수 있는지 확인할 수 있으며, 사칙연산에 대한 학습을 마쳤다는 점에서 패턴의 일반화된 규칙을 일상 언어 뿐 아니라 다양한 수식으로도 표현할 수 있는 가능성을 고려하였다.

2. 수업 설계

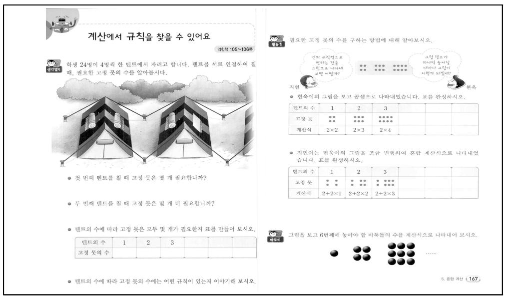
가. 교수・학습 과정 재구성의 개요

본 연구에서는 선행 연구를 통하여 패턴 활동을 지도하기 위한 전체적인 방향을 <표 III-2>와 같이 도출하였으며, 이를 토대로 현행 교과서 차시의 교수・학습 과정을 재구성하였

<표 III-2> 패턴 활동의 지도 방향

구분		내용	주요 이론적 근거
수업의 단계		· 공통성을 인식하는 단계 · 공통성에 대한 인식을 확장하는 단계 · 공통성을 표현하는 단계	Radford(2010)
과제	과제 설정	· 기하 패턴의 경우, 대수적으로 유용한 구조를 지닌 과제를 사용하기	Rivera(2013), Becker와 River(2006)
		· 수치적 패턴의 경우, 함수적 관계가 명확하게 드러나는 실생활 과제를 사용하기	Blanton 외(2015)
	과제 제시 순서	· 함수의 복잡성을 고려하여 패턴 과제를 제시하기 (예, y=x → y=mx → y=x+b → y=mx+b)	Blanton 외(2015), Moss와 McNab(2011)
		· 수학적 구조가 동일한 패턴은 기하 패턴에서 수치적 패턴, 두 패턴을 통합한 과제의 순서로 제시하기	Moss와 McNab(2011)
수업 활동의 구성	패턴의 구조를 분석하는 활동	· 기하 패턴의 항, 모양, 색깔, 변하는 것과 변하지 않는 것 등을 분석하기 · 수치적 패턴에서 수의 배열과 변화 등을 분석하기	방정숙과 선우진(2016)
	패턴에서 두 변수 사이의 관계를 탐색하는 활동	· 두 변수를 인식하고 두 변수의 공변 탐색하기 · 몇 개의 항에서 공통적인 규칙을 발견하고, 그 규칙을 적용하여 가까운 순서에 위치한 항 찾기	
	패턴의 일반화된 규칙을 추론하고 표현하는 활동	· 먼 순서에 위치한 항을 찾는 과정에서 일반화된 규칙 추론하기 · n번째 항을 형식적으로 또는 비형식적으로 표현하기	
학습 형태		· 전체 논의 및 소그룹 논의를 통하여 패턴을 탐구하기	Blanton 외(2015), Rivera(2013)

다. 본 연구에서 선택한 재구성 차시는 4학년 1학기 5단원 혼합 계산 중 9차시 <계산에서 규칙을 찾을 수 있어요>이며([그림 III-1] 참조), 이를 기하 증가 패턴 2차시와 수치적 증가 패턴 1차시 총 3차시로 증배하였다. 이 중 본 연구에서는 기하 증가 패턴 수업만을 다룬다.



[그림 III-1] 재구성한 교과서 차시
(교육부, 2014b, pp. 166-167)

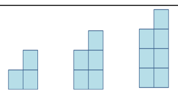
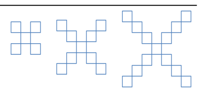
현행 교과서 과제는 수치적 패턴에 해당하며 함수표를 사용하여 두 변수 사이와 관계를 탐색한다. 하지만 텐트를 설치하는 고정 못의 배치를 그림으로 제시하고, 이를 시각적으로 분석하여 계산식과 연계하고 있다는 점에서는 'y=2x+2'에 해당하는 기하 증가 패턴의 성격도 띠고 있다. 위 과제는 함수적 관계에 대한 과제임에도 두 변수 사이의 관계를 탐색하기보다 주어진 항(고정 못의 수)을 혼합 계산식으로 나타내는 데 많은 부분을 할애하고 있다. 이에 먼저 수업 목표를 패턴 일반화의 핵심적인 과정이 드러나도록 <표 III-3>과 같이 수정하였다.

<표 III-3> 목표의 재구성

지도서 상의 목표	재구성 목표
· 계산을 보고 규칙을 찾을 수 있다. · 규칙을 찾아 계산할 수 있다. (교육부, 2014a, p. 328)	· 기하 패턴의 변화를 분석할 수 있으며, 그 과정에서 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 관계를 인식할 수 있다.[2] · 패턴의 일반화된 규칙을 추론하고 이를 표현할 수 있다.

다음으로 과제는 교과서에 제시된 함수 유형과 같이 y=mx+b 유형의 함수 관계를 다루되, Rivera(2013)에 따라 기하 패턴 과제가 대수적으로 유용한 구조를 지니는지 고려하여 <표 III-4>와 같이 재구성하였다.

<표 III-4> 과제 재구성의 개요

기준	재구성 과제	
	수업1	수업2
패턴 유형	기하 증가 패턴	
함수 유형	y=2x+1	y=4x+1
문제 맥락	준수는 블록으로 패턴 만들기 놀이를 하고 있습니다. 다음과 같은 규칙으로 점점 늘어나는 패턴을 만들 때, 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 관계를 알아봅시다.	
패턴의 구조	 Moss & McNab (2011, p. 282) 일부 수정	 Becker & Rivera (2006, p. 467)

나. 재구성한 교수·학습 과정안

기하 패턴을 지도하기 위한 교수·학습 과정안을 개발한 절차는 다음과 같다. 먼저 문헌검토를 토대로 기하 패턴의 지도 방안에 대한 재구성 방향을 도출하고(<표 III-2> 참조), 이를 바탕으로 교수·학습 과정안의 초고를 구성하였다. 이후 일차적으로 설계한 패턴 과제와 활동 문항들이 4학년 학생들의 수준에 적절한지를 판단하고자, 연구 대상과 동일한 학교에 재학 중인 4학년 학생들을 대상으로 예비 검사를 실시하였다. 예비 검사 결과를 토대로 교수·학습 과정안과 학생 활동지를 수정·보완하여 이차적으로 교수·학습 과정안을 완성한 후에는 수업 의도를 수업자에게 명확하게 전달하기 위하여 매 차시의 수업에 대하여 사전 논의를 진행하였다. 수업자와의 논의를 통하여 교수·학습 과정안과 학생 활동지의 적절성을 마지막으로 점검한 후 논의의 내용을 반영하여, 최종적으로 교수·학습 과정안을 완성하였다(예시 약안은 <표 III-5> 참조).

3. 자료 수집과 분석

초등학생의 함수적 사고를 신장하기 위한 기하 패턴 수업을 진행하기 위하여 연구자는 2차시의 교수·학습 과정안을 설계하였고, 이를 세 명의 교사들이 각자의 교실에서 수업을 진행하여 총 6차시의 수업 자료를 수집하였다. 이때 각 교실별로 2대의 카메라를 설치하여 매 수업을 촬영하였고, 6편의 수업 영상 및 전사 자료, 학생 활동지, 관찰 기록지, 사전·사후 평가 자료 등을 모두 수거하여 분석 자료로 활용하였다.

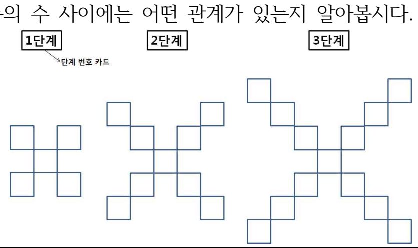
그 중 본 논문에서는 지면의 한계를 고려하여 두 번째 수업을 중심으로 기하 패턴을 지도하는 수업 사례를 분석하였다. 두 번째 수업은

2) 본 연구에서는 학생들이 두 수를 대응 관계로 탐구할 수 있도록 의도적으로 수업을 계획하였으며, 그에 따른 전략 중 하나로 교사는 학생들에게 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 관계를 살펴 볼 수 있도록 명시적으로 안내하였다. 물론 학생이 문제를 해결하는 과정에서 스스로 두 수를 대응 관계로 탐구할 수 있기를 기대할 수도 있으나, 본 연구에서는 초등학생들의 함수적 사고의 양상보다는 함수적 사고를 신장할 수 있는 '지도 방안'을 모색하여 이를 구현해 보는 데 더 초점을 두었기 때문에, 많은 학생들이 두 수를 재귀적으로 탐구하는 경향이 강하다는 선행 연구를 고려하여 이와 같은 방안을 선택하였다.

첫 번째 수업과 과제는 다르지만 거의 동일한 흐름으로 수업이 진행되어, 첫 번째 수업 보다는 두 번째 수업에서 교사와 학생들의 자연스럽고 능숙한 패턴 탐구 과정을 살펴볼 수 있는 장점이 있었다.

본 연구의 결과는 기하 패턴 수업의 단계를 고려하여 공통성을 인식하는 과정, 공통성에 대한 인식을 확장하는 과정, 공통성을 표현하는 과정으로 나누어 분석하였다. 구체적으로 각 과정마다 교사의 주요 수업 전략과 발문을 중심으로 수업의 흐름을 살펴보았고, 그 과정에서 기하 패턴을 탐색하는 학생들의 공통적인 반응에 초점을 두어 분석하였다.

<표 III-5> 수업 2의 교수학습 과정안(약안)

<table>
<tr><td rowspan="2">단원</td><td rowspan="2">5. 혼합 계산</td><td rowspan="2">차시</td><td rowspan="2">9/13</td><td>학습 주제</td><td>패턴 일반화</td></tr>
<tr><td>패턴 유형</td><td>기하 증가 패턴</td></tr>
<tr><td>학습 목표</td><td colspan="5">· 기하 패턴의 변화를 분석할 수 있으며, 그 과정에서 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 관계를 인식할 수 있다.
· 패턴의 일반화된 규칙을 추론하고 이를 표현할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td colspan="3">교수 · 학습 활동</td><td>시간(분)</td><td>자료(★)및 유의점(※)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">공통성 인식</td><td colspan="3">● 과제 제시 및 과제 이해하기
준수는 패턴 만들기 놀이를 하고 있습니다. 다음과 같은 규칙으로 단계 번호 카드 아래에 사각형 블록으로 패턴을 만들 때, 단계 번호와 사각형 블록의 수 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아봅시다.

</td><td>3</td><td>★활동지
★PPT
※ ‘단계 번호’라는 용어의 의미를 약속하고 시작하며, 학생들이 자연스럽게 ‘단계 번호’라는 말을 사용하도록 안내한다.</td></tr>
<tr><td colspan="3">● 패턴의 구조 분석하기
- 패턴의 전체적인 모양을 살펴본다.
- 패턴이 어떻게 만들어졌는지를 살펴본다.
● 패턴에서 두 변수 사이의 관계를 탐색하기
- 4단계, 5단계, 6단계의 모양을 직접 활동지에 그려보며, 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 관계를 탐색한다.</td><td>5

2</td><td>★활동지</td></tr>
<tr><td>공통성에 대한 인식 확장</td><td colspan="3">● 패턴의 구조 분석하기
- 1단계~6단계 패턴을 살펴보며 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 찾아보고, 그 결과를 공유한다.
● 가까운 위치의 항 탐색하기
- 9단계 모양의 패턴을 만들 때 필요한 단계 번호 카드와 사각형 블록의 수를 구해 본다.
● 먼 위치의 항 탐색하기
- 학생들이 스스로 20단계/80단계의 패턴을 만들 때 필요한 단계 번호 카드와 사각형 블록의 수를 구하고, 해결 방법을 공유한다.</td><td>7

3

13</td><td>★활동지
★실물화상기
※ 학생들의 수준에 따라 20단계의 블록 수나 80단계의 블록 수 중 한 활동에 초점을 둔다.</td></tr>
<tr><td>공통성 표현</td><td colspan="3">● 패턴의 일반화된 규칙을 추론하고 표현하기
- 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 일반화된 규칙을 추론하고 표현한 후, 이를 공유한다.
● 과제 제시</td><td>6

1</td><td></td></tr>
</table>

Ⅳ. 결과 분석

1. 공통성을 인식하는 과정

공통성을 인식하는 과정에서는 학생들이 주어진 기하 패턴이 전체적으로 어떤 모양을 띠고 있으며, 어떻게 만들어졌는지 탐색하는 활동을 통하여 여러 항들 사이의 공통성을 인식할 수 있도록 하는 데 초점이 있다. 먼저 세 교사는 3단계까지만 제시된 기하 패턴을 보여주며, 패턴이 어떤 모양인지 발문하였다. 이에 학생들은 주로 '엑스(x)자, 대각선' 모양이라고 대답하였으며, A수업에서는 '곱셈 모양, 부메랑 모양, 계단 모양'과 같은 다양한 반응이 나오기도 하였다.

전체적인 모양을 살펴본 후에는 1~3단계의 패턴이 구체적으로 어떻게 만들어졌는지 발문하여 패턴의 구조를 파악할 수 있도록 하였다. 이때 세 교사는 특히 '어떤 규칙으로' 만들어졌는지를 강조하였는데, 이에 대부분의 학생들은 사각형 블록이 4개씩 증가한다는 것에 주목하였다. 이와 관련된 구체적인 사례는 <에피소드 1>과 같다.

위 사례에서 학생 1의 반응은 세 학급에서 공통적으로 드러난 가장 빈번한 반응의 전형적인 사례이다(31줄, 33줄). 학생 1은 패턴의 전항과 후항을 비교하여, 대각선의 끝부분에 사각형 블록이 1개씩 더 생기기 때문에 사각형 블록의 수가 4개씩 증가한다는 것을 파악하였으며, 이때 자신의 생각을 설명하기 위하여 손으로 패턴의 가장자리를 가리켰다. 이와 같이 패턴의 구조를 분석하는 방법은 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 공변을 고려하기 보다는, 사각형 블록 수의 변화만을 고려했다는 점에서 재귀적인 탐구라고 볼 수 있다.

<에피소드 1: 패턴의 구조를 분석하는 활동에서의 학생 반응>

학생1	31	대각선 위에 1개, (손가락으로 PPT 화면에 제시된 패턴의 대각선 끝부분 네 군대를 하나씩 가리키며) 이렇게 1개씩 늘어나고 있어요.
B교사	32	1개씩 늘어나고 있다?
학생1	33	네, (손으로 원을 그리며) 네 개가 한 번에. 네 개씩 늘어나고 있어요.
B교사	34	한 개씩 늘어난다고 한 거는 (PPT 화면에서 패턴의 대각선 끝부분을 가리키며) 끝부분에 1개씩 늘어난다는 의미 같아요. 맞아요?
학생1	35	(고개를 끄덕이며) 네.
B교사	36	그래서 모두 합해서 4개가 늘어난다고 했어요.
	37	또 다른 의견 있나요?
학생2	38	중심에 있는 건 하나지만, 단계 번호에, 대각선 쪽에는 다 단계 번호가 쓰여요.
B교사	39	아, 지금 [학생2] 얘기 들었어요?
	40	[학생2]야, 다시 한 번만 얘기해 줄래?
학생2	41	(더 큰 목소리로) 중심에 있는 건 무조건 하나인데, 대각선은 다 단계 번호 수 카드예요.

한편 학생 1의 반응과 비슷하게, "1단계는 5개이고 2단계는 9개니까 4개씩 늘어나요"라는 반응도 적지 않았다. 이렇게 반응하는 학생들은 사각형 블록의 수와 '단계'를 동시에 언급하였다는 점에서 일부는 패턴을 공변적 사고로 탐구하였다고 볼 수도 있으나, 대부분은 사각형 블록의 수가 '4개씩 늘어나는' 것에 더 주목하고 있다는 점에서 4학년 학생들이 처음 기하 패턴의 구조를 분석할 때에는 대개 재귀적으로 탐구한다는 것을 확인하였다.

반면 학생 2는 '중심에 있는 건 하나지만, …(중략)… 대각선 쪽에는 단계 번호'라고 대답하였다(38줄, 41줄). 학생 2는 패턴의 구조를 분석하는 과정에서 패턴의 가운데 부분을 '중심'이라고 지칭하고, 그 가운데 사각형의 수는 항상 1개이지만 대각선에 연결된 각 사각형 블록의 수는 단계 번호와 일치한다는 것을 발견하였다. 이는 1~3단계의 패턴 블록만 보고도 단계 번호

와 사각형 블록 수 사이의 함수 규칙을 추측하였다는 것을 의미한다. 이렇게 추측한 학생들은 학급에서 2~3명에 불과할 정도로 매우 소수이기는 했지만, 실험을 진행했던 세 학급에서 공통적으로 드러난 반응이라는 점에 주목할 필요가 있다. 이는 세 학급의 일부 학생들은 패턴의 모양을 살펴보는 과정에서 자연스럽게 패턴의 변하는 부분과 변하지 않는 부분에 주목하고, 패턴을 대응 관계로 탐구할 수 있다는 것을 보여준다.

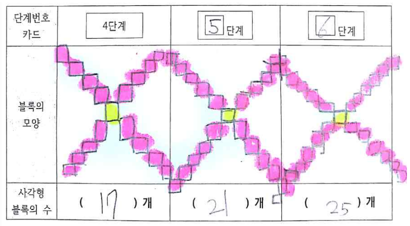
이처럼 세 교사는 전체 논의를 통하여 학생들이 패턴의 모양과 구조를 분석한 다양한 결과를 공유하였고, 이후에는 학생들에게 활동지에 4, 5, 6단계의 패턴을 마저 그려보고 각 단계에 해당하는 사각형 블록의 수를 확인해 보도록 지시하였다. 이때 B교사와 C교사는 “규칙을 생각하면서 그려보세요”라고 안내하였고, A교사는 “[4, 5, 6단계의 블록을] 그리면서 단계 번호와 블록 수와의 관계를 생각하면서 그려보세요”라고 대응 관계를 더욱 명시적으로 강조하였다.

정리하면 패턴의 공통성을 인식하는 단계에서 초등학교 4학년 학생들은 주로 사각형 블록 수가 4개씩 증가한다는 사실에 주목하지만, 일부 학생들은 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 대응 관계를 인식하였다. 이처럼 세 학급의 환경과 학습 수준에 차이가 있음에도 동일한 패턴 과제에 거의 동일한 반응을 보였다는 점에서 패턴의 구조를 분석하는 4학년 학생들 사이의 유사성을 확인할 수 있다.

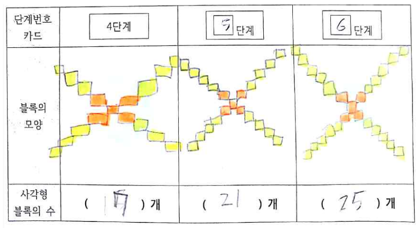
2. 공통성에 대한 인식을 확장하는 과정

학생들이 4~6단계의 패턴을 그려보고 각 단계의 사각형 블록 수를 확인한 뒤에, A교사와 B교사는 1~6단계의 패턴을 살펴보며 ‘[패턴에서] 변하는 부분과 변하지 않는 부분’을 찾아보게 하였다. 이때 A교사는 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 활동지에 다른 색깔이나 모양으로 표시해 보게 하고, 실물화상기를 이용하여 학생들의 분석 결과를 공유하고 이에 대해 전체 논의를 진행하였다.

활동 결과, A수업에 참여한 학생들은 단계 번호에 따라 패턴의 어느 부분이 변하고, 어느 부분이 변하지 않는지를 크게 [그림 IV-1]과 같은 두 가지 유형으로 파악하였다. 먼저 방법 1은 가운데의 정사각형 1개는 변하지 않지만 나머지 대각선 부분이 변한다고 인식한 경우이고, 방법 2는 1단계의 모양(X자 모양의 정사각형 5개)은 변하지 않고 그 외에 대각선 부분만 변한다고 인식한 경우이다.



방법 1: 변하지 않는 부분을 가운데 사각형으로 인식한 경우



방법 2: 변하지 않는 부분을 1단계 모양 전체로 인식한 경우

[그림 IV-1] 변하는 부분과 변하지 않는 부분에 대한 학생의 분석

한편 C교사는 시간의 제약으로 위 활동을 진행하지 않고 각 단계별 사각형 블록 수를 확인하였는데, 이처럼 C교사가 패턴에서 변하는 부분과 변하지 않는 부분에 대하여 별도로 안내

하지 않았음에도 불구하고 C학급의 일부 학생들은 스스로 5단계와 6단계의 사각형 블록 수를 구하는 방법을 패턴에서 변하는 부분과 변하지 않는 부분으로 나누어 설명하기도 하였다. 이와 같은 C교사의 선택은 이후 C학급 학생들의 패턴 일반화 결과에도 영향을 미쳤는데, 이에 대해서는 이후 다시 논의하였다.

세 수업을 분석한 결과, 방법 1보다는 방법 2와 같이 분석하는 학생들이 상대적으로 많았는데, 이는 4학년 학생들이 첫 번째 단계의 모양과 두 번째 단계의 모양을 비교하는 과정에서 사각형 블록의 수가 대각선 방향으로 4개 증가했다는 것을 관찰한 것과 연관된다고 생각된다. 더불어 아직 4학년 학생들은 1단계 패턴을 여러 단계 중에 하나로 분석하기보다 그 자체를 고정된 대상으로 인식할 수도 있다. 이러한 결과를 통하여 연구에 참여한 4학년 학생들은 기하 패턴을 탐구할 때 1단계일 때의 사각형 블록 수, 2단계일 때의 사각형 블록 수와 같이 두 변수를 동시에 고려하는 대응 관계로 탐구하기보다, 단계 번호와 사각형 블록 수의 변화를 각각 파악하고 있다는 점에서 패턴을 재귀적 또는 공변적 사고로 탐구하는 경향이 강하다는 것을 확인하였다.

이후 A교사는 6단계에 해당하는 사각형 블록의 수를 어떻게 구했는지 방법 1과 방법 2로 생각한 학생들을 중심으로 발표시켰다. 이때에도 실물화상기를 이용하였으며, 이에 대한 학생의 반응은 <에피소드 2>와 <에피소드 3>에서 자세하게 살펴볼 수 있다.

<에피소드 2>를 보면, 방법 1과 같이 패턴을 분석한 학생들은 주로 학생 1과 같이 설명하였다. 구체적으로 학생 1은 패턴 가운데의 정사각형 1개를 빼고, 나머지 대각선 부분의 사각형 블록 수가 단계 번호와 동일하다는 것을 설명하였으며, 각 단계의 사각형 블록 수가 한 대각선 방향의 사각형 블록 수에 4를 곱한 다음, 중심에 있는 사각형 1개를 더하면 구할 수 있다고 설명하였다. 즉 방법 1과 같이 패턴을 분석한 학생들은 대개 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 일반화된 규칙을 인식하고(33줄), 이를 바탕으로 6단계의 사각형 블록 수를 구하기 위해서 '(6×4)+1'로 계산할 수 있다는 것을 이해하였다고 유추된다.

<에피소드 2: 6단계의 사각형 블록 수를 방법 1로 설명하는 경우

학생1	33	(단계의 숫자를 가리키며) 이게 단계 번호면요..(연필로 패턴의 대각선 부분을 가리키면서) 이 한 면[대각선 방향의 블록 수]이 단계 번호 수만큼 이잖아요.
	34	그래서 (활동지의 패턴 그림을 동그라미하며) [대각선 방향의 블록 수] 네 개를 [곱]하고, (가운데 있는 블록을 가리키며) 여기 더하기 1을 하면 돼요.
A교사	35	그러면 (활동지의 6단계를 가리키며) 여기 6단계에서는?
학생1	36	(왼쪽 위의 대각선 부분을 가리키며) 여기 6 곱하기 4를 한 다음에 더하기 1.

한편 <에피소드 3>을 보면, 방법 2와 같이 패턴을 분석한 학생들은 주로 학생 2와 같이 설명하는 경우가 많았으나(40, 41, 43줄), 일부는 학생 3과 같이 설명하기도 했다(47줄). 두 학생은 공통적으로 1단계의 모양이 변하지 않는다고 인식하고, 단계 번호가 변하면서 사각형 블록의 수가 4개씩 늘어난다는 것에 주목하였다. 하지만 학생 2는 A교사가 4단계의 사각형 블록 수를 어떻게 구했느냐는 질문에 "3단계 블록 수를 센 다음에 4를 더했어요(43줄)"라고 대답한 것으로 보아, 패턴 구조에 대한 분석 결과를 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 공변 또는 대응 관계로 전환하여 인식하지는 못하고 있는 것으로 파악된다.

<에피소드 3: 6단계의 사각형 블록 수를 방법 2로 설명하는 경우>

A교사	39	자, [학생 2] 나와 보세요.
학생2	40	저는 (패턴을 손가락으로 가리키며) 여기서 단계 번호를 보다 보니까 처음에는 몰랐는데 계속 보다 보니까, (패턴 블록의 끝부분을 한 개씩 손으로 찍으며) 4개씩 늘어나는 거예요.
	41	그래서 (패턴의 가운데에 있는 '1단계' 모양을 가리키며) 얘네들이 안 변한다고 치면, (대각선 부분을 가리키며) 이렇게 4개씩 늘어나니까.
A교사	42	그래서 4단계의 블록 수를 어떻게 구했어요?
학생2	43	3단계 블록 수를 센 다음에 4를 더했어요.
A교사	44	아. [학생 2]는 4단계를 알기 위해서 3단계 [블록 수]에다 4를 더했어요.
	45	다른 방법으로 알 수 없을까요?
A교사	46	[학생 3]. (학생3이 앞으로 나옴) [학생 3]도 [학생 2]랑 같은 방법이래요.
학생3	47	(활동지의 패턴 그림을 가리키며) 저는 일단 기준이 1단계니까, 이 단계[6단계]는 5 더하기, 6 빼기 1 곱하기 4를 해서 [알 수 있어요].

반면 학생 3은 학생 2와 동일한 구조로 패턴을 분석하였지만, 학생 2와는 달리 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 대응 관계를 명확하게 이해했다. 이러한 근거는 학생 3이 6단계에 해당하는 사각형 블록 수를 '$5+(6-1)\times4$'로 계산하여 구하였다는 반응을 통하여 알 수 있는데(47줄), 학생 3은 1단계의 사각형 블록 수 5개를 '기준'으로 두면 2단계부터 4개씩 늘어났기 때문에, 결과적으로 6단계의 블록 수를 구하기 위해서는 6단계의 단계 번호 6보다 1 작은 수인 5에 4를 곱하여 변하는 부분의 증가량을 구하고, 변하지 않는다고 인식한 1단계의 사각형 5개를 더하였다고 설명했기 때문이다.

위와 같은 세 학생들의 반응은 A수업과 B수업에서 공통적으로 드러났다. A교사와 B교사는 전체 논의에서 학생 2와 같은 반응을 명시적으로 틀렸다고 안내하지는 않았지만, 학생 2의 방법으로 해결하기 위해서는 전 단계의 블록 수를 모두 알아야만 한다는 점을 설명하며, 이어서 학생 1이나 학생 3의 방법을 소개하였다. 이후 두 교사는 학생 1과 학생 3의 방법을 모두 인정해 주고, 학생들이 자신의 분석 방법 이외에 다른 아이디어를 이해하는 것이 중요하다는 점을 강조하였다. 특히 A교사는 "누가 틀렸다는 게 아니고, 어떻게 생각하는 게 더 편리한지를 생각해 보는 거야"라고 안내하며 학생들이 원하는 분석 방법을 선택하여 문제를 해결해 보도록 독려하였다.

한편 C교사는 앞서 언급하였듯이, 패턴에서 변하는 부분과 변하지 않는 부분에 대한 논의는 생략한 채, 4~6단계의 사각형 블록 수를 '규칙을 찾아서 세어 보는 활동'으로 진행하였다. 구체적으로 C교사는 학생들에게 어떤 규칙으로 4, 5, 6단계의 사각형 블록 수를 세었는지 발문하였다. 이에 한 학생이 사각형 블록 수가 4씩 커진다고만 대답하자, C교사는 모든 단계에 해당하는 블록 수를 구하기 위하여 4씩 계속 더할 수는 없다고 지적하며, 4, 5, 6단계에 해당하는 사각형 블록의 수를 차례로 질문하였다. 이후 6단계에 해당하는 사각형 블록 수를 어떻게 세었는지 다시 질문하였는데, 이에 대하여 학생들은 주로 "다 세어 봤다"고 대답하거나 소수의 학생들이 "4단계는 이 대각선으로 4개가 있으니까, 4를 네 번 곱하고 1을 더했다"라고 발표하였다.

이러한 사례는 다른 두 교사들과 C교사의 교수·학습 활동에서 가장 큰 차이였는데, 이 활동의 결과, C학급에서는 A학급에서의 학생 2와 같은 반응이 가장 많았으며, 학생 1과 같이 반응한 학생들이 다른 학급과 비교하여 상대적으로 적었다. 또한 학생 1과 같은 내용이 발표되었음에도 불구하고 그것을 많은 학생들이 이해하는 데 어려움이 있었다. 결과적으로 C학급의 학생들은 이후 패턴의 일반화된 규칙을 표현하

는 활동에서 다른 학급의 학생들보다 성취가 낮았는데, 이와 같은 이유는 학생들의 학습 수준의 차이를 비롯하여 여러 가지가 있을 수 있으나, 패턴에서 변하는 부분과 변하지 않는 부분에 대한 탐색이 부족했다는 점도 여러 요인 중 하나라고 사료된다.

이와 같이 4~6단계의 사각형 블록 수에 대하여 탐구한 후 세 교사 모두 지금까지 확인한 패턴의 규칙을 바탕으로 9단계, 20단계, 80단계에 해당하는 사각형 블록 수를 탐구해 보도록 활동을 진행하였다. 이에 학생들은 9단계, 20단계, 80단계에 해당하는 사각형 블록의 수를 개인별 또는 모둠별로 해결하였고, 교사들은 그 과정에서 학생들의 활동 과정과 과제에 대한 이해 수준 등을 점검하였다. 교사들의 점검은 주로 학생들에게 어떻게 풀었는지, 활동지에 적은 수나 식이 무엇을 의미하는지 등에 대하여 설명을 요구하거나, 먼저 해결한 학생들은 다른 방법으로도 해결해 보도록 지도하는 식이었다.

학생들의 활동을 10~15분 정도 점검한 후에 A교사와 C교사는 9단계와 20단계에 해당하는 사각형 블록 수를 어떻게 구했는지에 대한 해결 방법을 전체 논의를 통하여 공유하였다. 먼저 A수업에서는 <표 IV-1>과 같은 네 가지의 해결 방법이 공유되었는데, 1번 방법은 사각형 블록의 수를 계속 4씩 더하여 구한 경우이고, 2, 3번 방법은 단계 번호와 블록 수 사이의 대응 관계를 탐구하여 구한 방법이다. 이 중 1번과 3번 방법은 세 학급에서 공통적으로 가장 빈번하게 드러난 전형적인 반응이며, 2번 방법은 A학급과 B학급에서, 4번 방법은 A학급에서만 나온 반응이었다. 이에 A학급의 사례를 보다 자세히 살펴보면 다음과 같다.

<표 IV-1> A수업에서 9단계에 해당하는 사각형 블록 수를 구한 방법

방법	학생 반응 예시
1. 전단계의 블록 수에 4씩 더하기	학생 4: 29 더하기 4는 33개이고, 9단계는 여기서 더하기 4를 해서 37개입니다. (72줄)
2. (단계 번호-1)×4+5	학생 5: 1단계는 정사각형 모양이 5개입니다. 그리고 4개씩 늘어나는 규칙이 있습니다. 1단계인 5개는 그대로 두고, 9단계에서 1단계를 빼면 8단계가 나옵니다. 그리고 8단계 곱하기 4를 하면 32, 여기에 5를 더하면 37입니다. (79~81줄)
3. (단계 번호×4)+1	학생 6: 저는 계단 모양이 2개씩, 아니 4개씩 늘어나니까, [9에] 곱하기 4를 하고, 한가운데에 있는 [블록] 더하기 1을 하면 구할 수 있어요. (91줄)
4. (한 대각선의 블록 수)×2-1	학생 7: (한 손으로 크게 사선을 그으며) 한 줄을 모두 세고 그것을 곱하기 2 한 다음에 빼기 1을 하면, 9 곱하기 2는 18이고, 9 곱하기 2 더하기 1은 19이므로 이것을 더하면 37입니다. (114줄)

A교사는 점검 과정을 통하여 학생 4, 5, 6을 선정하였고, 학생들의 활동지를 실물화상기로 제시하며 각자 자신의 해결 방법을 친구들에게 설명해 보게 하였다. 먼저 학생 4가 발표를 하였는데, 교사는 학생 4와 같이 문제를 해결할 경우에는 앞 단계의 사각형 블록 수가 몇 개일지 모를 때에는 원하는 단계의 블록 수를 구하기 힘들다는 점을 지적하였다.

다음으로 학생 5와 학생 6을 순서대로 발표시켰는데, 학생 5와 6의 설명을 다른 학생들이 이해하고 있는지를 확인하기 위하여 학생 5의 설명을 이해한 학생에게 다시 설명해 보라고 하거나, 학생 6이 언급한 ‘4개씩 늘어나는 것’과 ‘한가운데’가 무엇을 의미하는지 학급 학생들에게 질문하기도 하였다. 이때 A교사는 방법 2와 방법 3이 패턴의 ‘가지’가 어떻게 변한다고 생각하는지와 관련되어 있다고 설명하며, 두 방법을 모두 인정해 주었다.

마지막으로 다른 방법으로 설명할 수 있는 학생이 더 있는지 질문하자, 학생 7이 한 대각

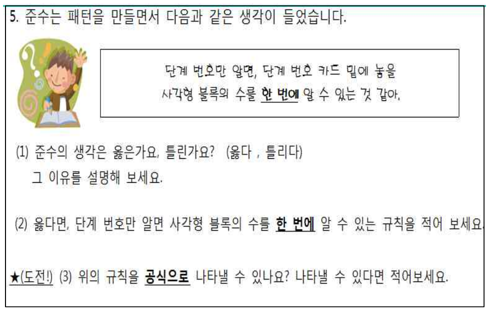
선의 수를 두 번 곱한 다음에 1을 빼는 방법을 발표하였다. 즉 학생 7은 9단계의 사각형 블록 수를 9단계 패턴의 큰 대각선을 이루는 사각형 블록의 수와 연결하여 구하였는데, 이때 학생 7이 대각선의 블록 수를 단계 번호와의 대응 관계로 이해하고 있었는지에 대해서는 A교사의 추가 발문이 이루어지지 않아 정확하게 확인할 수는 없었다. 하지만 이후 패턴의 일반화된 규칙을 표현하는 활동에서 A교사는 학생 7에게 대각선 방법으로는 식을 어떻게 세웠는지 질문하였고, 학생 7은 식을 세웠더니 결국은 '(단계 번호)×4+1'과 같아졌다고 대답했다. 이를 통하여 일부 4학년 학생들은 기하 패턴의 구조를 다양하게 탐구할 수 있으며 수학적 동치까지 이해할 수 있다는 가능성을 확인하였다.

한편 <표 IV-1>에서 알 수 있듯이, 2, 3, 4번 방법에 대한 학생들의 반응 예시를 살펴보면, 주로 패턴의 모양을 지칭하는 용어들을 활용하여 해결 방법을 설명하고 있음을 알 수 있다. 구체적으로 2번 방법에서는 '1단계인 5개', '4개씩 늘어나는 규칙'이라는 말로, 3번 방법에서는 '계단 모양', '한가운데'와 같은 용어를 사용하고 있으며, 4번 방법에서는 엑스 자(X) 모양의 패턴에서 한 대각선을 손동작으로 표현하면서 '한 줄'이라고 지칭하였기 때문이다.

수업 후 활동지를 확인한 결과, A수업과 B수업에 참여한 학생들 중 절반 이상이 3번 방법을 적용하여 9단계에 해당하는 사각형 블록 수를 '(4×9)+1'이라는 식을 세워 구하였으며, 9단계와 동일한 방법으로 20단계와 80단계를 해결하였다. 그리고 단계 번호에 해당하는 사각형 블록의 수를 구하기 위하여 '(단계 번호)×4+1'과 같은 식을 세워 구하였으며, 자신의 해결 방법을 패턴의 모양과 관련지어 설명하였다. C수업에 참여한 학생들도 약 30%의 학생들이 3번 방법과 같이 문제를 해결하였으며, '중간', '대각선이 네 개'와 같은 패턴의 모양을 지칭하는 용어를 사용한다는 유사점이 있다.

3. 패턴의 일반화된 규칙을 추론하고 표현하는 과정

학생들이 80단계와 같이 먼 단계에 해당하는 사각형 블록의 수를 구하기 위하여 단계 번호에 4를 곱한 후 1을 더한다는 등의 식을 세워서 해결하자, 세 교사는 임의의 단계 번호에 대한 사각형 블록의 수를 일반화된 규칙으로 표현하는 활동을 진행하였다. 이에 해당하는 활동지의 내용은 [그림 IV-2]와 같다.


5. 준수는 패턴을 만들면서 다음과 같은 생각이 들었습니다.

단계 번호만 알면, 단계 번호 카드 밑에 놓을 사각형 블록의 수를 **한 번에** 알 수 있는 것 같아.

(1) 준수의 생각은 옳은가요, 틀린가요? (옳다 , 틀리다)
그 이유를 설명해 보세요.

(2) 옳다면, 단계 번호만 알면 사각형 블록의 수를 **한 번에** 알 수 있는 규칙을 적어 보세요.

★(도전!) (3) 위의 규칙을 **공식으로** 나타낼 수 있나요? 나타낼 수 있다면 적어보세요.

[그림 IV-2] 패턴의 일반화된 규칙을 추론하고 표현하기에 해당하는 활동지의 일부

세 교사는 준수의 생각을 PPT 화면으로 안내하거나, 활동지에 적혀 있는 준수의 생각을 읽어보게 한 후에, 준수의 생각처럼 '단계 번호만 알면, 단계 번호 카드 밑에 놓을 사각형 블록의 수를 한 번에 알 수 있는지'에 대해 질문하였다. 이때 일부 학생들은 활동지에 적힌 '한 번에 알 수 있는'이라는 말을 '아무런 계산도 하지 않고 한 번에 알 수 있는'의 의미로 이해하였다. 이에 교사들은 '한 번에 알 수 있는'이라는 의미가 앞 단계의 블록 수를 몰라도, 또는 그림을 그려보지 않아도 단계 번호만 알면 알 수 있는 방법이나 공식이라고 설명하였다.

본 연구에 참여한 4학년 학생들은 준수의 생각에 대부분 찬성하였고, 교사들은 그렇게 생각한 이유에 대하여 설명해 보게 하였다. 이에 학생들은 공통적으로 '(단계 번호)×4+1'라는 일반화된 규칙을 추론하고 말이나 식으로 표현하였는데, 이에 대한 구체적인 사례는 <에피소드 4>와 같다.

<에피소드 4: 패턴의 일반화된 규칙을 표현하는 활동에 대한 사례 1>

학생 1	310	[단계 번호에] 곱하기 4를 하면 구할 수 있으니까요.
학생 2	311	1도 더해야지. 더하기 1.
B교사	312	곱하기 4를 하면 구할 수 있다는 [학생 1]의 말에 할 말 있는 사람?
	313	[학생 3]는 어떤 말을 해주고 싶어요?
학생 3	314	[단계 번호에] 곱하기 4만 하면, 20단계면, 블록 수가 80단계 밖에 안 나와 가지고, (잠깐 멈춤)
	315	가운데를, 더하기 1을 해줘야 해요.
		…(중략)…
B교사	325	네, 그러면 혹시 [학생 3]의 이야기를 못 들은 친구들이 있을지도 모르니까, 누가 한 번 정리를 해 줄 수 있을까?
학생 4	326	왜냐하면, 단계 수에다가 4를 곱하고 1을 더해야 돼요.

위의 사례에서 알 수 있듯이, 학생 2와 학생 3은 학생 1의 설명이 적절하지 않은 이유를 '더하기 1을 하지 않았기' 때문이라고 설명한 것으로 보아(311줄, 314~315줄), 단계 번호를 명시적으로 언급하지는 않았으나 '(단계 번호)×4+1'에 대한 일반화된 규칙을 이해하고 있다고 유추된다. 그리고 학생 4는 단계 번호만 알면 블록의 수를 구할 수 있는 이유를 '단계 수에다 4를 곱하고 1을 더하면' 되기 때문이라고 명확하게 설명하였다(326줄). 즉 학생들은 임의의 단계 번호에 따른 사각형 블록의 수를 적절하게 표현했는지 평가할 수 있고, 그에 대하여 논리적으로 정당화할 수 있다는 것을 확인했다. 이후 B교사는 <에피소드 5>와 같이 학생들이 패턴의 일반화된 규칙을 식으로 표현할 수 있도록 안내하였다(<에피소드 5> 참조).

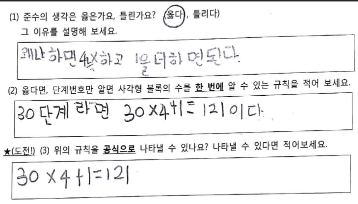
<에피소드 5: 패턴의 일반화된 규칙을 표현하는 활동에 대한 사례 2>

B교사	327	네, 그러면 여러분들이 그걸[준수의 생각이 옳은 이유] 식으로도 나타낼 수 있을 것 같아요.
	328	(칠판에 '[빈 칸]×4'+1을 쓰며) 방금 친구가 얘기한 것처럼 곱하기 4를 해주고, 더하기 1을 해 준다.
	329	여기서 곱하기 4는 왜 해줬어요?
학생들	330	늘어나는 개수 / 중심을 빼고
B교사	331	네, 둘 다 맞는 말이에요.
	332	그러면 더하기 1은 왜 해줬을까?
학생들	333	중심 / 가운데
B교사	334	아, 가운데 있는 거.
	335	(식 앞에 괄호를 그리며) 그럼 '×4' 앞에 뭘 해주면 좋을까?
학생들	336	단계 수 / 단계 번호

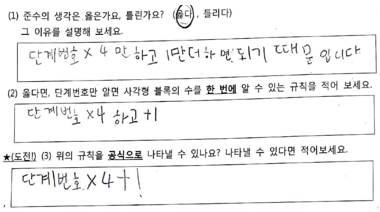
B교사는 학생 4의 발표 내용을 식으로 표현하였으며, 학생들이 이러한 식의 의미를 이해하고 있는지 확인하기 위하여 '×4'의 의미와 '+1'의 의미를 질문하였다(329줄, 332줄). 이에 학생들은 각각 '×4'의 의미를 '[중심을 빼고] 늘어나는 개수'라고 대답하였으며(330줄), '+1'의 의미를 '중심' 또는 '가운데'라고 대답하였다(333줄). 즉 앞의 활동에서와 같이 일반화된 규칙을 표현할 때에도 패턴의 모양을 지칭하는 용어들을 사용한다는 것을 알 수 있었다.

마지막으로 앞서 칠판에 적었던 식 '×4+1' 앞에 괄호를 그려서 '(　　　)×4+1'와 같이 적은 후 괄호 안에 들어갈 말이 무엇인지를 묻자, 학생들은 '단계 수' 또는 '단계 번호'라고 대답하였다. 즉 학생들은 사각형 블록 수가 단계 번호에 따라 달라진다는 것을 이해하였으며, '단계 번호'라는 용어를 자연스럽게 사용한다는 것을 알 수 있다. A교사와 C교사도 B교사와 마찬가지로 수업 말미에 학생들이 패턴의 일반화된

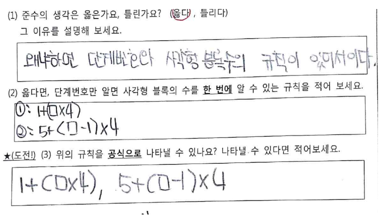
규칙을 어떻게 표현했는지 공유하였다. 세 학급에서 학생들이 패턴의 일반화된 규칙을 표현한 유형은 크게 [그림 IV-3]과 같다.



방법 1: 일상 언어와 구체적인 예로 표현한 경우



방법 2: 변수를 지칭하는 용어와 수식으로 표현한 경우



방법 3: □를 활용하여 수식을 두 가지 방법으로 표현한 경우

[그림 IV-3] 패턴의 일반화된 규칙을 표현한 학생의 반응

세 학급에서는 방법 1과 방법 2를 활용한 학생들이 가장 많았는데, 먼저 방법 1은 패턴의 일반화된 규칙을 단계 번호와 사각형 블록 수라는 두 수 사이의 대응 관계로 명확하게 나타내지는 못하였으나, 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 관계를 '4를 곱하고 1을 더한다'는 방식으로 이해하였으며, 30단계를 예로 들어 설명하였다. 즉 일부 초등학교 4학년 학생들은 임의의 단계 번호에 대한 사각형 블록의 수를 두 수의 대응 관계로 명확하게 표현하지는 못해도, 두 수 사이의 일반화된 함수 규칙을 인식하고 표현할 수 있으며, 이때 구체적인 단계 번호에 해당하는 사각형 블록 수를 예로 들어 설명하는 방식으로 자신의 추론을 정당화한다는 것을 알 수 있다.

한편 방법 2와 같이 '단계 번호'라는 용어를 사용하여 일반화된 규칙을 표현한 경우는 A학급에서 많이 나타난 반응으로 단계 번호 대신 □를 사용하기도 하였다. 이를 통하여 일부 4학년 학생들은 '단계 번호'라는 용어를 고정된 미지수가 아니라 어떠한 단계 번호든지 상관없는 임의의 수를 나타내는 변수의 의미로도 사용할 수 있다는 것을 확인하였다.

마지막으로 방법 3은 일반화된 규칙을 '(단계 번호)×4+1'과 '(단계 번호-1)×4+5' 두 가지 수식으로 나타낸 경우로써, 이러한 방법에 대한 논의는 A학급과 B학급에서 모두 있었으나 [그림 IV-3]과 같이 일반화된 식으로 나타낸 경우는 A학급에서만 확인되었다. 이는 A교사가 이 두 가지의 방법을 모두 인정하고 각 방법을 모두 식으로 표현해 보는 활동을 강조하였던 것과 연관이 있다고 사료된다.

한편 A학급의 일부 학생들은 9단계, 20단계, 80단계에 해당하는 사각형 블록 수를 구할 때에는 '(단계 번호-1)×4+5'의 방법을 사용했음에도, 이를 일반화된 식으로 표현해 보는 활동에서는 '(단계 번호)×4+1'와 같이 적는 경우가 많았다. 이는 4학년 학생들이 아직 자신이 생각한 방법을 일반화하여 혼합 계산식으로 표현하는 데 어려움이 있다는 것을 보여주는 사례이며, 더불어 패턴 활동을 통하여 수학적 동치를 안내할 수 있는 가능성을 보여주는 사례이기도 하다. 예를 들어 A교사는 이러한 학생들의 반응을 바탕으로 두 수식이 다른 것처럼 보이지만 실은 모두 같은 패턴을 나타내는 동일한 수

식이라는 점, 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 무엇으로 생각하느냐에 따라 식을 다르게 세울 수 있다는 점 등을 안내하며 수학적 동치에 대한 주제로 논의를 확장하였기 때문이다.[3)]

한편 학생들은 단계 번호와 사각형 블록 수 사이의 일반화된 규칙을 식으로 정리할 때 단계 번호를 중심으로 식을 정리할 뿐 두 변수를 모두 포함하는 등식으로 정리하는 경우는 거의 없었다. 이러한 원인에 대하여 몇 가지 이유를 유추해 볼 수 있는데, 먼저 현행 교과서에서 규칙성 관련 단원을 지도하는 방식의 영향을 생각해 볼 수 있다. 현행 교과서의 규칙성 관련 단원의 활동들을 살펴보면 두 변수 보다는 종속변수를 중심으로 패턴의 변화를 탐색하는 경우가 많기 때문이다(방정숙, 선우진, 2016). 두 번째는 본 연구에 참여한 학생들이 아직 대응을 배우지 않았기 때문에 두 변수 사이의 관계를 등식으로 나타내는 경험이 부족했을 수 있다. 마지막으로 활동지 질문의 영향으로 볼 수 있는데, [그림 IV-2]에 제시된 활동지 (2)번 문항에서 사각형 블록의 수를 알 수 있는 규칙을 적어보라고 하였기 때문에, '사각형 블록 수'라는 변수는 암묵적으로 인식하고 있을 뿐 명시적으로 기술하지 않은 것일 수도 있기 때문이다.

정리하면, 세 학급의 학생들은 단계의 변화에 따른 사각형 블록의 수를 일반화된 표현으로 나타내고 이에 대하여 논의하고 정당화할 수 있으며, 이때 '단계 번호'라는 용어나 '□'를 변화하는 임의의 수를 나타내는 변수로 사용하였다. 하지만 일부 학생들은 두 가지 이상의 연산이 혼합된 수식을 구성하거나, 두 변수 사이의 관계식을 등식으로 구성하는 데 어려움을 겪기도 하였다.

Ⅴ. 논의

본 연구에서는 초등학생의 함수적 사고를 신장하기 위한 기하 패턴 지도 방안을 제시하기 위하여 초등학교 4학년 세 학급의 수업 사례를 분석하였다. 특히 논문에서는 세 학급 사이에서 발생한 차이점보다는 공통적인 수업의 흐름과 그에 따른 학생들의 반응에 초점을 두어 기술하였는데, 이를 통하여 본 연구의 결과가 특정 학급에서만 발생하는 사례가 아니라 일반적으로 발생할 수 있는 사례라는 점을 보이고자 하였다. 연구 결과를 바탕으로 초등학생의 함수적 사고를 신장하기 위한 기하 패턴의 지도 방안에 대한 시사점을 논의하면 다음과 같다.

첫째, 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동은 학생의 패턴 일반화에 영향을 미치는 것으로 보인다. 본 연구에서 세 교사들은 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동을 지도할 때, 주어진 패턴이 어떤 모양이며, 어떻게 만들어졌는지 발문하였으며, 특히 A교사와 B교사는 단계가 변할 때 패턴에서 변하는 부분과 변하지 않는 부분

3) A학급의 학생들 중 변하지 않는 부분을 1단계 블록 5개로 생각하고 문제를 해결하던 일부 학생들은 패턴의 일반화된 규칙을 표현하는 과정에서 어려움을 느꼈다. 이에 A교사는 변하지 않는 부분을 1단계 블록 5개로 생각하고 식을 세운 학생들 중 대표적인 오류를 범한 한 학생의 방법('(단계 번호)×4+5'라고 식을 세운 경우)을 발표시켰고, 이 방법이 타당한지에 대하여 논의하였다. 이를 통하여 학생들은 1단계 블록 5개를 '기준'으로 생각할 경우에는 임의의 단계 번호에 해당하는 사각형 블록의 수를 구할 때, 항상 단계 번호에서 1을 뺀 수를 곱해야 한다는 것을 이해하였다. 이어서 A교사는 동일한 패턴의 규칙을 나타내는 식이 왜 '(단계 번호-1)×4+5' 또는 '(단계 번호)×4+1'와 같이 다른지에 대하여 논의하였다. 이 과정에서 A교사는 두 식을 직접 풀어서 해결하기 보다는, 4학년 학생들의 수준을 고려하여 1단계, 2단계 등의 각 단계 번호를 식에 대입해 보며 각 단계 번호에 따른 사각형 블록 수를 비교하였다. 이러한 활동을 통하여 A학급의 학생들은 동일한 패턴의 일반화된 규칙을 나타내는 식이 패턴에서 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 무엇으로 생각하느냐에 따라 달라질 수 있지만, 결국에는 그러한 식들이 서로 동일하다는 것을 학습하였다.

이 무엇인지를 분석하게 한 후 그 결과를 전체 논의를 통하여 공유하였다. 연구 결과, 패턴의 구조를 충분히 분석했던 A학급과 B학급의 학생들 중 절반 이상이 말이나 식으로 두 수 사이의 일반화된 규칙을 표현할 수 있었는데, 이는 유미경과 류성림(2013)에서 초등학교 6학년 학생들이 y=mx+b 유형의 패턴을 일반화하는 데 약 50% 정도만 성공하였다는 결과와 비교하여 주목할 만하다.

더불어 연구를 통하여 패턴을 어떻게 분석했느냐에 따라 패턴의 일반화된 규칙을 표현하는 데 차이가 있다는 것을 확인하였다. 기하 패턴을 지도할 때 패턴의 구조를 분석하는 활동이 유용하다는 것은 선행 연구에서도 확인되었지만(Moss & McNab, 2011; Rivera, 2013), 본 연구에서는 학생들이 패턴의 구조를 분석한 결과가 어떻게 학생들의 일반화 표현과 연결되는지를 실제 수업 사례를 통하여 제시했다는 점에서 의미가 있다. 구체적으로 각 단계의 블록 수가 몇 개씩 증가하느냐에 주목한 학생보다는 패턴의 어느 부분이 단계가 변하여도 일정하게 유지되는지, 변하는 부분은 단계 번호와 어떤 관계에 있는지를 관찰한 학생들이 패턴의 일반화된 규칙을 추론하고 표현할 수 있는 가능성이 높았으며, 기하 패턴의 어느 부분을 변하지 않는다고 인식하느냐에 따라 각 단계별 블록 수를 구하는 계산 방법과 일반화된 규칙을 표현하는 데 차이를 보였다.

둘째, 현행 교과서에서 함수표를 활용하는 방안에 대하여 검토해 볼 필요가 있다. 현행 교과서에서는 거의 모든 함수 관계를 함수표로 나타내도록 하며, 주로 종속변수에 해당하는 값만을 기록하게 하는 경향이 있다(방정숙, 선우진, 2016). 하지만 본 연구 결과를 통하여, 기하 패턴을 다룰 때에는 함수표 없이 패턴의 모양과 구조를 관찰 및 분석하는 활동만으로도 패턴의 일반화된 규칙을 탐구할 수 있다는 것을 확인하였다. 즉 패턴의 유형에 따라 함수표의 활용 방안을 적절히 차별화할 필요성을 시사한다.

예를 들어 기하 패턴을 다룰 때 함수표에 각 단계별 블록의 수만을 기록하게 하는 방식은 학생들로 하여금 기하 패턴의 구조를 분석할 수 있는 기회를 제한하거나, 종속변수의 변화만을 관찰하는 재귀적 사고를 야기할 수 있다. 이에 기하 패턴 과제에서 함수표를 활용할 때에는 기하 패턴의 구조를 분석한 후, 그 결과를 식으로 나타내 보도록 안내함으로써 패턴의 구조를 수식으로 전환하여 인식할 수 있도록 지도하는 것이 바람직하다. 또는 반대로 함수표에 기록된 수치적 정보를 기하 패턴으로 변환하는 활동도 고려해 볼 만하다. 이러한 활동은 Beatty(2010), Moss와 McNab(2011) 등과 같이 학생들이 기하 패턴의 구조와 수식을 유기적으로 이해하는 능력을 신장하고, 나아가 수학적 동치에 대한 이해를 확장할 수 있기 때문이다.

셋째, 초등학생의 패턴 일반화에는 일상 용어가 중요한 역할을 한다. 본 연구에서 학생들은 패턴의 모양이나 특정 부분을 지칭하는 일상 언어(예, 대각선, 중심)를 교사의 안내 없이 스스로 사용하였다. 더불어 단계 번호라는 용어는 학생들이 기하 패턴에서 두 변수를 명시적으로 인식할 수 있도록 의도적으로 안내한 용어였는데, 처음에는 낯설어 하였지만 점차 익숙하게 사용하였다. 결과적으로 학생들은 이러한 용어들을 사용하여 일반화된 규칙을 말 뿐 아니라 식으로도 나타냈으며, 그 때 '단계 번호'를 계속 변화하는 임의의 수를 나타내는 변수로도 사용하였다. 이는 기하 증가 패턴의 체계적인 탐구를 통하여 변수에 대한 초보적인 개념 도입이 가능하다는 최지영과 방정숙(2014)의 주장을 뒷받침하는 결과라고 볼 수 있다.

반면 □와 같은 기호를 사용하는 학생들은

드물었는데, 초등학교 4학년들에게는 아직 □와 같은 기호보다는 구체적인 대상을 지칭하는 일상 언어의 사용이 더욱 자연스럽다는 것을 보여주는 결과이기도 하다. 이에 학생들이 □와 같은 기호를 변수로 사용할 때에는 일상 언어를 충분히 활용하여, 자신이 사용하는 변수의 의미를 명확하게 이해할 수 있도록 지도해야 할 것이다. 덧붙여 학생들의 변수 사용 능력을 신장하기 위하여, 일상 언어를 □, △ 등의 기호로 전환하여 사용할 수 있도록 지도하는 체계적인 방안에 대한 후속 연구도 요구된다.

마지막으로 패턴 일반화를 지도할 때에는 충분한 탐구 과정을 경험할 수 있도록 안내해야 한다. 현행 교과서에서 규칙과 대응을 지도할 때에는 두 수의 대응 관계를 □와 △ 등을 사용한 식으로 나타내는 활동이 강조되고 있다(교육부, 2014c). 하지만 보통 적은 사례 수만을 탐색한 후에 두 수 사이의 관계를 표현해 보도록 요구하고 있으며, 항들 사이에서의 공통성을 인식하고, 그 공통성에 대한 인식을 확장해 볼 수 있는 활동은 거의 생략되어 있는 실정이다(방정숙, 선우진, 2016). 하지만 대수적인 패턴 일반화는 소수의 항들을 탐색하는 것으로 충분하지 않다(Radford, 2010). 또한 몇 개의 사례만을 보고 두 수의 관계를 □와 △를 사용한 식으로 나타낼 때에는 학생들이 두 수의 관계를 임의의 상황까지 확장하여 이해한 것인지, 아니면 특정한 대상 자체를 □와 △로 표현했을 뿐인지 분명히 알 수 없다. 이에 두 수 사이의 관계를 수식으로 나타내는 것 자체에 초점을 두기 보다는 학생들이 두 수를 대응 관계로 탐구하고, 나아가 두 수 사이의 일반화된 규칙을 충분히 탐색할 수 있도록 본 연구에서 제안한 다양한 지도 전략이 활용될 수 있기를 바란다.

이상의 연구 결과를 통하여 알 수 있듯이, 함수적 사고를 신장하기 위한 기하 패턴의 지도는 일반적인 초등학교 수학 수업에서 충분히 적용 가능하다. 이에 본 연구에서 도출한 구체적인 지도 방안이 많은 교사들 사이에서 공유되고, 여러 수학 수업에의 적용을 통하여 수정·보완되기를 기대한다. 또한 본 연구가 초등학생들의 함수적 사고를 신장하기 위한 다양한 지도 방안을 모색하는 데 조금이나마 보탬이 되기를 바란다.

참고문헌

교육부(2014a). **교사용 지도서 수학 4-1**. 서울: 천재교육.

교육부(2014b). **수학 4-1**. 서울: 천재교육.

교육부(2014c). **수학 4-2**. 서울: 천재교육.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호.

김남균, 김은숙(2009). 초등학교 6학년의 패턴의 일반화를 통한 대수 학습에 관한 연구. **수학교육논문집, 23**(2), 399-428.

방정숙, 선우진(2016). 초등학교 수학 교과서에 제시된 패턴 지도방안에 대한 분석. **초등수학교육, 19**(1), 1-18.

유미경, 류성림(2013). 초등수학영재와 일반학생의 패턴의 유형에 따른 일반화 방법 비교. **학교수학, 15**(2), 459-479.

최지영, 방정숙(2014). 초등학교 6학년 학생들의 함수적 관계 인식 및 사고 과정 분석-기하 패턴 탐구 상황에서의 사례연구-. **수학교육학연구, 24**(2), 205-225.

Beatty, R. (2010). Supporting algebraic thinking: Prioritizing visual representations. *Ontario Association for Mathematics Education Gazette, 49*(2), 28-34.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 465-472). Prague, Czech Republic: Charles University.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing algebraic relationships in functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. In B. J. Dougherty, & R. M. Zbiek (Eds.), *Essential understandings series*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. New York: Springer.

Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 277-301). New York: Springer.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *Pentose Nucleic Acid (PNA), 4*(2), 37-62.

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. New York: Springer.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin., & D. Shifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 136-150). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (70th Year book of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 113-126). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

An Analysis of Lessons on Geometric Patterns for Developing Functional Thinking of Elementary School Students

Pang, JeongSuk (Korea National University of Education)
SunWoo, Jin (Graduate School, Korea National University of Education)

Pattern activities are useful to develop functional thinking of young students, but there has been lack of research on how to teach patterns. This study explored teaching methods of geometric patterns for developing functional thinking of elementary school students, and then analyzed the lessons in which such methods were implemented. For this, three classrooms of fourth grades in elementary schools were selected and three teachers taught geometric patterns on the basis of the same lesson plan. The lessons emphasized noticing the commonality of a given pattern, expanding the noti ce for the commonality, and representing the commonality. The results of this study showed that experience of analyzing the structure of a geometric pattern had a significant impact on how the fourth graders reasoned about the generalized rules of the given pattern and represented them in various methods. This paper closes with several implications to teach geometric patterns in a way to foster functional thinking.

* Key Words : geometric patterns(기하 패턴), teaching methods of patterns(패턴 지도 방안), functional thinking(함수적 사고)

논문접수 : 2016. 10. 10
논문수정 : 2016. 11. 11
심사완료 : 2016. 11. 11