대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 26 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 26, No. 4, 635 ~ 662. Nov 2016

순열 조합 이해 과제에서의 안구 운동 추적 연구

최 인 용* · 조 한 혁**

조합(combinatorics)은 확률적 사고의 기초가 되며 정보, 과학 등 타교과와 연계성이 높은 중요한 영역이지만, 학교 수학에서 학생들이 가장 어려워하는 단원 중 하나이다. 본 연구는 순열 조합 문제의 구조를 나타낼 수 있는 표현식을 도입하여, 문제를 표현식으로 변환하는 대학원생의 안구 운동을 분석함으로써 순열 조합 문장제의 이해 과정과 의미 구조에 따른 난이도 차이를 조사하였다. 연구 결과, 연구참여자들의 순열 조합 문장제 이해 전략은 문제에 대한 수학적 모델을 내적으로 직접 표상하는 전략과 보기에 주어진 표현식과 문제를 비교하여 답을 찾는 전략으로 분류할 수 있었다. 전문가 집단인 연구참여자들은 대상들의 구별성, 중복가능성, 의미 구조에 관한 단어나 수치 정보 등 문제의 핵심정보를 빠르게 파악하고 주의를 기울였다. 의미 구조의 변환이 필요한 문제를 풀 때 학생들은 문제의 핵심정보를 더 많이 보고, 보기의 표현식을 더 오래 응시하며, 문제와 보기 사이의 비교를 더 많이 하는 등 복잡한 인지 처리와 연관된 안구 운동 지표가 나타났다. 안구 운동 데이터는 문제 이해 과정에서 연구참여자의 수학적 인지를 분석하는데 유의미한 정보를 제공하였다.

I. 서 론

조합(combinatorics)은 물리, 화학, 생물, 정보 등 다양한 교과와 연계될 수 있으며, 경우의 수를 빠짐없이 세는 것과 관련되기 때문에 확률 학습의 기초가 되는 중요한 영역이다(Batanero, Navarro-Pelayo, & Godino, 1997; English, 1993; Kapur, 1970). 이에 학교수학에서 순열 조합을 비중 있게 다루고 있다. 그러나 오랫동안 순열 조합은 교사에게는 가르치기 어렵고, 학생에게는 배우기 어려운 영역으로 인식되어 왔다(Batanero et al., 1997; Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

순열 조합 문제[1] 해결에 있어서 학생들은 대상의 구별가능성, 순서의 유무, 중복가능성의 결정에 있어서 많은 오류를 보이는데, 이러한 오류들의 원인은 주로 잘못된 문제 이해[2]에 있다(Batanero et al., 1997; Roa, 2000; 이지현, 이정연, 최영기, 2005). 따라서 학생들의 순열 조합 문제의 이해 과정을 분석하는 것은 의미 있는 일이라 할 수 있다.

선행연구에 의하면 연산의 종류(순열, 조합, 같은 것이 있는 순열, 중복순열 등), 문제에서 다루고 있는 대상(카드, 사람 등), 변수의 크기, 문제의 의미 구조 등이 오류의 유형이나 문제의 난이도에 영향을 주는 변인이다(이지현 외, 2005;

* 한성과학고등학교, ciy98@snu.ac.kr (제1 저자)
** 서울대학교, hancho@snu.ac.kr (교신저자)

1) 본 연구는 선행연구(이지현 외, 2005; Batanero et al., 1997; Fischbein & Gazit, 1988)와 같이 기초 연산으로 해결 가능한 순열 조합 문장제만을 다룬다.

2) 본 연구에서 문제 이해는 방정식과 같이 문제 해결 계획을 유도할 수 있는 수학적 모델을 구성하는 것으로 한정하여 정의한다(Mayer, 1992).

Batanero et al., 1997; Fischbein & Gazit, 1988; Roa, 2000). 특히 순열 조합 문제는 일반적으로 문장제 형태이기 때문에 의미 구조가 학생의 문제 이해에 강력한 영향을 미치는 변인이다. 동일한 수학적 구조의 문장제라도 의미 구조에 따라 문제를 이해하는데 필요한 핵심 정보들이 문장 또는 문맥상에서 자신을 드러내는 방식이 달라지기 때문이다. 교과서에서 공식을 설명하는 방식과 일치하는 의미 구조를 가진 문제를 '일치 유형' 문제라고 한다면, 학생들은 이러한 일치 유형 문제를 일치 유형이 아닌 문제(이하 불일치 유형 문제)보다 더 잘 해결한다(이지현 외, 2005; Batanero et al., 1997). 불일치 유형 문제를 해결하기 위해서는 문제의 의미 구조를 변환한 후에 공식을 적용하여야 하는데, 이러한 의미 구조의 변환은 학생들에게 어려운 과정임을 여러 선행연구에서 보고하였다(이주영, 김서령, 박혜숙, 김완순, 2006; Batanero et al., 1997; Roa, 2000). 이상으로부터 의미 구조의 변환 과정이 순열 조합 문장제 이해에 중요한 변인임을 추론할 수 있다. 따라서 본 연구는 문제 이해 과정에 대한 분석을 토대로 의미 구조의 변환 과정이 학생들의 문제 이해에 미치는 영향을 분석하고자 하였다.

선행연구에서는 풀이과정과 인터뷰를 통해 주로 학생들의 문제 이해 과정에서의 오류의 유형을 분석하였지만 상대적으로 문제 이해 과정 자체에 대한 분석은 이루어지지 못했다. 활동지와 인터뷰와 같은 전통적인 자료 분석은 여전히 학생들의 수학적 인지를 조사하는 강력한 수단이지만, 시간의 흐름에 따른 학생들의 인지 과정의 변화에 대한 정보를 제공해줄 수 없다는 한계를 가지기 때문이다. 한편, 선행연구는 문항 정확도를 비교함으로써 문제의 의미 구조가 난이도와 오류의 유형에 미치는 영향을 분석하였다. 중·고등학생을 대상으로 한 연구에서 순열 조합 문제의 의미 구조는 문제의 난이도에 영향을 끼치는 변인으로 나타났지만(이지현 외, 2005; Batanero et al., 1997), 학부생을 대상으로 하는 Roa(2000)의 연구에서는 의미 구조에 따른 난이도의 차이가 나타나지 않는 등 학교 급별로 상이한 결과가 나왔다. 이는 본질적으로 문항 정확도가 학생들이 겪는 인지 과정의 복합성을 정확히 반영하지 못하기 때문으로 판단된다.

최근 안구운동 추적을 이용하여 학습자의 수학적 인지과정을 분석하고자 하는 연구가 많이 진행되고 있다(이미진, 이광호, 2015; 이지윤, 2015; Andrá et al., 2015; Lin & Lin, 2014; Susac, Bubic, Kapongja, Planinic, & Palmovic, 2014). 안구 운동 추적기는 모니터에서 사람의 눈이 바라보고 있는 지점의 좌표를 실시간으로 측정하고 기록하는 장치로 상대적으로 저렴하고 사용이 어렵지 않으며 비침습적이면서 피실험자의 인지나 주의의 동적인 변화를 실시간으로 측정가능하다는 점에서 수학교육 연구에 적합하다(Campbell, 2010). Just & Carpenter(1980)의 눈-마음 가설(eye-mind assumption) 이래로 여러 선행연구들은 우리가 보는 것과 우리가 내적으로 다루고 있는 것 사이에 밀접한 상관관계가 있음을 보고하고 있다(Rayner, 1998; Knoblich, Ohlsson, & Raney, 2001; Snowden, Thompson, & Troscianko, 2012). 따라서 안구 운동 데이터는 학생들이 어떤 정보에 주의를 기울이고 내적으로 처리하고 있는지에 대한 강력한 단서를 제공하며, 이를 통해 학생들의 문제 해결 과정을 보다 객관적으로 추론할 수 있다. 또한 인지 부하와 관련된 여러 가지 안구 운동 지표는 실제 학생들이 체감하는 어려움에 대한 풍부한 정보를 제공함으로써 단편적인 정답률 분석보다 더욱 정밀하게 문제의 난이도를 예측할 수 있게 한다(Susac et al., 2014). 이에 본 연구는 안구 운동 추적을 통해 학생들의 수학적 인지를 분석하고자 하였다.

방정식 문장제의 해결은 '문제→방정식 세우기→계산→답'의 과정으로 진행된다. 이때, 문제로부터 방정식을 세우는 것은 문제 이해 과정으로 볼 수 있으며 방정식은 학생들의 문장제 이해를 살펴볼 수 있는 중요한 단서가 된다. 방정식 자체가 학생이 문장제를 어떻게 이해했는지를 확인할 수 있는 수학적 구조를 내포하는 표상이기 때문이다. 이에 반해, 순열 조합 문제 영역에서는 방정식과 같은 표상의 부재로 인해 학생들의 이해를 관찰하는 것이 상대적으로 어렵다. ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$, ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ 등의 기호는 연산의 종류와 변수만으로 구성되어 학생의 이해에 대한 함축적인 정보만을 제공하므로 풀이 과정에서 수형도와 같은 표상이 사용되지 않은 경우 학생의 이해를 조사하는 것이 어렵다. 이에 본 연구에서는 학생의 문제 이해를 구체적으로 관찰 가능할 수 있도록 순열 조합 문제의 구조를 문자 기반으로 표현할 수 있는 조합 모델 '확률실행식'을 도입하였다[3]. '순열 조합 문장제의 이해'를 조작적 정의로써 '주어진 순열 조합 문장제를 확률실행식으로 변환하는 것'이라 정의하고 순열 조합 문장제를 확률실행식으로 표현하는 과제를 해결하는 학생의 안구 운동을 분석하였다.

본 연구는 전문가인 대학원생의 안구 운동을 추적하여 성공적인 문제 해결 과정, 전문가의 안구 운동의 특징을 분석함으로써 교수-학습적 시사점을 얻고, 안구 운동 지표의 비교를 통해 의미 구조의 변환 과정이 문제의 난이도에 끼치는 영향을 분석하고자 하였다. 안구 운동 추적을 이용하여 새로운 차원에서 순열 조합 문제의 이해를 분석함으로써 선행연구의 결과를 보완하며 학생들의 순열조합 문제 해결 과정을 이해하고 교수-학습을 개선할 수 있는 기틀을 제공할 것으로 기대된다. 또한 안구 운동 추적을 이용한 수학교육 연구의 가능성을 확인할 수 있을 것이다. 구체적인 연구문제는 다음과 같이 설정하였다.

1) 안구 운동 추적을 통해 살펴 본 순열조합 문장제의 이해 과정은 어떠한가? 이때 전문가의 안구 운동은 어떤 특징이 있는가?
2) 순열 조합 문장제 이해에서 의미 구조의 변환 유무에 따른 안구운동의 차이가 나타나는가?

II. 이론적 배경

안구 운동 데이터만으로 인간의 내적 인지 과정을 분석할 수는 없다. 본 연구는 순열 조합 문장제에 관한 선행연구, 수학 문장제 해결에 관한 전통적 인지 모델, 순열 조합 문장제의 수학적 풀이 과정, 안구 운동 지표에 관한 인지신경과학의 연구결과를 바탕으로 연구참여자의 안구운동을 분석함으로써 순열 조합 문제 이해에서의 인지 과정을 추론하고자 하였다.

1. 순열 조합 문장제의 의미 구조

Dubois(1984)는 순열 조합 문제를 내재된 의미 구조에 따라 선택(selection), 배치(distribution), 분할(partition) 유형으로 분류하고 이를 내재적 조합 모델이라 정의하였다. 선택 유형은 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 상황을 다룬 문제이고 배열 유형은 r개의 사물을 n개의 자리에 배치하는 상황을 다룬 문제이다. 분할 유형은 r개의 사물을 n개의 부분집합으로 나누는 상황을 다룬 문제이다. <표 II-1>은 각 유형에서 사용되는 주

3) 학생들이 움직임을 최소화하면서 모니터 화면만 보고 문제를 해결할 때 정확한 안구 운동 측정이 이루어진다. 따라서 선택형 문항으로 과제를 구성하여 측정의 정확도를 높이면서도 학생의 문제 이해를 구체적으로 관찰하기 위하여 확률실행식을 도입하였다.

<표 II-1> 순열 조합 문제의 의미구조

의미구조	선택	예) 세 사람이 네 종류의 과일 중에서 한 종류씩 선택하는 방법의 수(각 종류의 과일은 충분히 있음) 주요표현: 꺼내다, 선택하다, 뽑다
	배치	예) 갑, 을, 병에게 4개의 방 201호, 202호, 203호, 204호를 배정하는 방법의 수 (한방에서 모두 잘 수도 있음) 주요표현: 배정하다, 나열하다, 넣다
	분할	예) 3개의 장난감을 갑, 을, 병, 정 네 명에게 남기지 않고 모두 나누어주는 방법의 수 주요표현: 나누다, 분할하다

요 표현과 중복순열 ${}_4\Pi_3$에서의 예시 문항을 정리한 것이다.

Batanero et al.(1997)는 내재적 조합 모델이 순열조합 문제의 난이도와 오류의 유형에 강력한 영향을 주는 변인임을 밝혔다. 전체적으로 선택 유형 문제의 정답률이 배치나 분할 유형의 정답률보다 높았으나 내재적 모델에 따른 난이도는 조합 연산의 종류에 따라 다르게 나타났다. 순열, 중복순열, 조합에서는 선택 유형의 정답률이 가장 높았지만, 같은 것이 있는 순열에서는 배치나 분할 유형의 정답률이 오히려 선택 유형보다 높았다. 이지현 외(2005)가 Batanero et al.(1997)의 문항을 이용하여 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 진행한 국내연구에서도 조합, 순열(${}_n\mathrm{P}_r$), 중복 순열에서는 선택 유형에서 정답률이 가장 높았고, 같은 것이 있는 순열이나 순열(${}_n\mathrm{P}_n$)에서는 배치 유형의 정답률이 가장 높았다.

이지현 외(2005)는 의미구조에 따른 난이도 차이가 발생하는 원인으로 순열 조합 연산에 대한 교과서의 정의 방식과 문제 유형의 편중된 분포를 지목하였다. 2009 개정 교육과정의 확률과 통계 교과서(우정호 외, 2016)에서는 순열조합의 기본 공식을 <표 II-2>와 같이 설명하고 있다. 중복순열을 예로 살펴보면, 교과서에서 공식을 선택 유형으로 정의하고 있다. 또한 교과서의 중복순열 문제 중 절반 이상이 선택 유형으로 편중되어 있다(이지현 외, 2005)[4]. 학생들은 선택 유형에서는 성공적으로 해결하였던 동일한 구조의 문제도 배치나 분할 유형으로 제시되면 풀지 못하는 경우가 많았으며 구조를 변환하여 문제를 해결하려는 학생들은 배치나 분할 유형을 선택 유형으로 변환하려는 시도는 했지만 선택 유형을 다른 유형으로 바꾸려는 시도는 하지 않았다(이주영 외, 2006; Batanero et al., 1997; Roa, 2000).

<표 II-2> 교과서의 순열 조합 공식의 정의 진술 유형

연산	정의	진술 유형
순열	서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0 < r \le n$)	선택
중복순열	서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_n\Pi_r = n^r$	선택
같은 것이 있는 순열	n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, …, r개씩 있을 때, 이들을 모두 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!\,q!\times\cdots\times r!}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)	(선택 후) 배치
조합	서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0 \le r \le n$)	선택

4) 7차 교육과정 고등학교 수Ⅰ교과서에 대한 분석 결과이지만 현행 2009 개정 교육과정의 확률과 통계 교과서에서도 상황은 유사하다.

따라서 학생들은 교과서에서 주로 다루는 선택 유형의 중복순열 문제에 대해서는 공식을 적용할 수 있는 스키마를 갖게 되지만, 배치나 분할 유형 문제에 직접 공식을 적용하는 스키마를 형성할 기회를 갖기 힘든 것으로 판단된다. 학생들은 주로 문제를 자신이 쉽게 공식을 적용할 수 있는 선택 유형으로 변환하는 문제 해결 전략을 사용하지만, 그 마저도 배치나 분할 문제에 대한 경험 부족으로 어려움을 겪는 것으로 예상된다.

예를 들어, '세 사람이 네 종류의 과일 중에서 한 종류씩 선택하는 방법의 수(단, 각 종류의 과일은 충분히 있음)'는 선택 유형의 문제이므로 학생들은 바로 중복순열 공식에서의 n과 r을 찾아 적용할 수 있다. 그러나 '3개의 장난감을 갑, 을, 병, 정 네 명에게 남기지 않고 모두 나누어 주는 방법의 수'와 같은 분할 유형은 학생들이 알고 있는 공식 및 정의의 진술 유형과 일치하지 않기 때문에 즉각적으로 공식을 적용하지 못한다. 문제의 상황을 '3개의 장난감을 받을 사람을 갑, 을, 병, 정 네 사람 중에서 중복을 허락하여 3명 선택하는 방법의 수'로 변환한 후 공식을 적용해야 한다. 이와 같이 교과서에서 공식을 정의하는 방식과 의미 구조가 일치하지 않는 문제는 의미 구조의 변환이라는 추가적인 인지 과정이 필요하기 때문에 난이도가 더 높은 것으로 생각할 수 있다. 선택 유형으로 진술된 순열, 중복순열, 조합 연산에서는 선택 유형의 정답률이 높지만, 배치 유형으로 정의된 같은 것이 있는 순열에서만은 배치 유형의 정답률이 선택 유형보다 높은 선행연구의 결과들은 이와 같은 맥락에서 설명할 수 있다.

이러한 의미 구조에 따른 난이도의 차이는 중·고등학생을 대상으로 실시한 Batanero et al.(1997)나 이지현 외(2005)의 연구에서는 나타났으나 학부생을 대상으로 한 Roa(2000)의 연구에서는 나타나지 않는 등 학교 급별로 결과가 상이하였다. 그뿐만 아니라 선행연구의 분석은 다소 단편적인 정답률만을 근거로 한다는 한계가 있다. 따라서 본 연구는 안구운동을 분석함으로써 문제의 의미 구조가 학생들의 순열 조합 문제 이해 과정에 미치는 영향을 보다 심도 있게 분석해보고자 하였다.

2. 순열 조합 문장제의 이해

일반적으로 문장제는 실생활과 관련된 수학적 상황이 일상적인 문장으로 서술되어 있는 문제라 할 수 있다. 학교 수학에서 순열 조합 단원은 기본 공식의 계산 연습을 제외하면 모든 문제가 문장제 형태이므로 학생들이 순열 조합에서 겪는 어려움은 곧 순열 조합 문장제에서 겪는 어려움이라 할 수 있다.

많은 학자들은 문제 해결을 크게 '문제 이해'와 '문제 해결'의 두 단계로 구분하여 접근 하였다(Mayer, 1992; Polya, 1945; English & Halford, 1995). 문제 이해는 문제에 대한 적절한 표상을 구성하는 것이고 문제 해결은 수학적인 연산을 계획하고 실행하는 단계이다. 여러 선행연구들이 문장제 해결의 어려움의 주요 원인은 문제 해결 단계가 아닌 문제 이해 단계에 있다고 보고하였다(Cummins, Kintsch, Reusser, & Weimer, 1988; Hegarty, Mayer, & Monk, 1995). 순열 조합 문장제 해결에 있어서도 학생들은 문제 진술을 잘못 해석하거나 순서, 중복 가능성 및 대상 구별 여부를 잘못 판단하는 등 문제 이해와 관련된 오류를 보인다(Batanero et al., 1997; Roa, 2000; 이지현 외, 2005).

문장제의 해결과정에서 학생들은 문장제를 구성하는 문장 자체를 이해하고 그것을 수학 언어로 바꾸는 인지 과정을 경험해야 하므로, 문장제의 이해 과정은 언어적 측면과 인지적 측면을 함께 고려해야 한다(김선희, 2004). 언어적 측면

과 인지적 측면은 각각 텍스트[5]의 이해 과정과 수학적 스키마[6]와 관련되어 있다.

Van Dijk & Kintsch(1983), Kintsch(1998)는 텍스트의 이해 과정을 언어심리학적 측면에서 '텍스트 기반(text base)'과 '상황 모델(situation model)'이라는 두 가지 정신 표상을 이용하여 설명하였다. 텍스트 기반은 학생들이 문제를 읽는 과정에서 구성하는 텍스트 자체에 대한 명제(proposition) 구조의 정신 표상으로 텍스트의 국소적, 포괄적 의미론적 내용을 표현한다. 반면, 상황 모델은 텍스트에서 직접 유도된 명제 구조뿐 아니라 독자의 배경지식에서 텍스트와 밀접하게 연결되는 명제 구조들이 통합된 것이다. 예를 들어, 텍스트에 묘사된 도시에 대한 정신적인 지도, 텍스트로부터 도출된 방정식 등이 상황모델의 예이다. Kintsch(1998)는 텍스트의 이해를 텍스트 기반과 상황 모델의 형성이 입체적으로 동시에 진행되면서 상황 모델로 수렴되는 과정으로 보았다. 즉, 글을 읽어감에 따라 추가되는 정보들과 배경 지식에 의한 정신 표상의 점진적인 정교화의 결과물이 상황 모델이며 적절한 상황 모델의 표상이 곧 텍스트의 이해다. 이러한 Kintsch의 이론은 수학 문장제 해결에 관한 연구에도 많은 이론적 기초를 제공하였다.

Kintsch의 상황 모델은 방정식과 같은 수학적 모델을 포함하는 포괄적인 개념이다. English & Halford(1995)는 Kintsch의 이론에서 텍스트의 의미에 관한 상황 모델과 수학적 문제 해결을 위한 수학적 모델을 구분하여 문제-텍스트 모델, 문제-상황 모델, 수학적 모델로 문장제의 이해 과정을 설명하고자 하였다. 문제-텍스트 모델은 Kintsch의 텍스트 기반과 동일하다. 그러나 문제-상황 모델은 산술구조를 직접적으로 유도하지는 않으며 문제의 텍스트의 의미에 대한 정신표상이다. 수학적 모델은 문제에 대한 답을 표현하는 형식적인 수학적 표현이며 문제 해결의 계획을 수립하는 기초를 제공하는 정신 표상이다. 문제-텍스트 모델과 문제-상황 모델이 Kintsch의 언어심리학적 측면의 이해인 반면, 수학적 모델의 구성은 인지적 측면에서 수학적 스키마를 필요로 한다. 이 세 가지 모델들은 상호 의존적이기 때문에 학생은 이들 중 어떤 모델이 부정확하거나 완벽하지 않으면 문제를 해결하는데 어려움을 겪게 된다(English & Halford, 1995).

Mayer(1992)는 Kintsch의 텍스트 이해과정을 기초로 문장제 이해 과정을 문제 해석(translation), 문제 통합(integration), 계획 수립(planning), 계획 실행(execution)의 4단계로 설명하였다. 문제 해석 단계에서는 문제를 읽고 각 문장에 대한 내적인 표상을 구성한다. 문제의 통합 단계에서는 문장에 퍼져있는 정보와 자신이 구성한 표상을 통합하여 문제 모델을 세운다. 계획 단계에서는 문제를 해결하기 위해 사용할 연산자의 선택과 배치 등을 결정하고 마지막 실행 단계에서는 수립한 계획에 따라 산술적인 연산을 수행한다. 이러한 단계들은 순차적이면서도 동시적이고 반복적인 특성이 있다. Mayer(1992)의 문제 해결 모델은 최근까지도 문장제 연구에서 이용되고 있다(Kingsdorf & Krawec, 2014).

본 연구는 안구 운동을 통해 실험참가자의 인지 과정을 조사하기 위하여, English & Halford(1995)가 제안한 세 가지 모델과 Mayer(1992)의 문제 해결 단계를 기반으로 순열 조합 문장제의 이해 과정에 대한 인지 모델을 도출하였다. 예를 들어, 다음 문제의 이해과정을 살펴보자.

---

5) 언어심리학에서 문장보다 더 큰 언어 단위를 텍스트(text) 또는 덩이글이라 한다.

6) 스키마란 인간이 정보를 기록하고 처리하고 제어하며 심적으로 통합하게 하고, 환경 자극에 의미 있고 효율적인 반응을 할 수 있도록 하는 일종의 프로그램이다. 예를 들어, 특정 유형의 문제를 해결하기 위한 전략 역시 스키마이다(Fischbein, 1999).

재석과 종국, 2명이 있다. 이들에게 8개의 서로 다른 힌트카드(A, B, C, D, E, F, G, H)를 모두 나누어 주는 방법의 수는?

가. 문제 해석

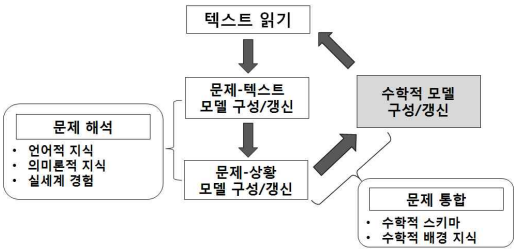
문제 해석은 문제-텍스트 모델, 문제-상황 모델의 구성으로 볼 수 있다. 의미 있는 문제-텍스트 모델을 개발하기 위해 학생들은 문제를 읽으면서 다음과 같은 언어적 정보를 해석해야한다. 순열 조합의 많은 오류가 '순서', '중복', '대상의 구별성'에 대한 문제 진술에 대한 잘못된 이해로부터 발생되기 때문에(이지현 외, 2005), 이러한 문제-텍스트 모델의 구성요소를 파악하는 것은 성공적인 수학적 모델 형성에 필수적이다.

(1) 문제에서의 대상과 수량: 2명의 사람과 8장의 카드
(2) 대상들의 구별성: 서로 다른 사람, 서로 다른 카드
(3) 분할의 조건: 모두 나누어 준다
(4) 문제의 목표: 방법의 수를 구하라

문제-상황 모델은 학생 각자가 가진 지식과 경험에 의해 매우 다양한 형태의 이미지로 나타날 수 있다(English & Halford, 1995). 단, 학생들의 상황 모델은 모두 공통적으로 카드를 사람에게 나누어 주는 상황을 포함할 것이다. 문제 해석 단계에서는 언어적 지식, 의미론적 지식, 실세계의 경험이 영향을 준다(Mayer, 1992).

나. 문제 통합

학생은 문제-텍스트 모델, 문제-상황 모델과 텍스트에 있는 정보들을 통합하여 수학적 모델을 점진적으로 정교화 시켜야 한다. 이 과정에서



[그림 II-1] 수학 문장제 이해 과정 모델

수학적 스키마의 역할이 핵심적이다. 만약 학생이 분할 유형의 중복순열에 공식을 적용할 수 있는 스키마를 가지고 있다면, 바로 수학적 모델을 표상할 수 있을 것이다. 그러나 일반적인 경우 학생은 문제의 분할 상황을 공식을 적용하기 쉬운 동형의 선택 구조로 번역하여야 한다. '서로 다른 m개의 사물을 서로 다른 n명에게 나누어 주는 분할'을 '서로 다른 m개의 각 사물을 받을 사람을 n명 중에 뽑는 선택' 으로 변환해야한다. 이때 더불어 순서여부를 결정해야 한다. 중복가능성과 순서여부는 문장 표면상에 직접적으로 드러나지 않으므로 문맥과 자신이 구성한 텍스트 모델, 상황 모델로부터 도출하여야 한다. 이 문제에서는 한 사람이 여러 장의 카드를 받을 수 있으므로 중복이 가능하다. 또한 재석이 A를 받는 것과 종국이 A를 받는 것은 다르므로 순서를 고려해야한다. 최종적으로 $X = '재, 종' / Do\ 8X$ 또는 ${}_2\Pi_8$ 와 같은 수학적 모델을 구성하게 된다. [그림 II-1]은 이러한 순열 조합 문장제 이해에 관한 모델을 도식화 한 것이다.

3. 확률실행식

확률실행식은 헝가리 출신의 생물학자 린덴마이어(Aristid Lindenmayer, 1925-195)가 식물의 생장 과정을 모델링하기 위해 창안한 Lindenmayer System(이하 L-System)을 토대로 JavaMAL 마이크

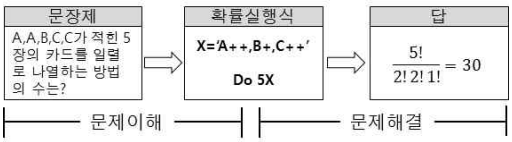
로월드(조한혁, 2003)에서 경우의 수 및 확률 현상을 구성하기 위해 개발한 표현이다. 확률실행식은 L-System에서 하나의 문자에 확률적으로 서로 다른 치환규칙이 적용되는 아이디어와 원소의 중복을 허용하는 집합 개념인 멀티셋(multiset) 표현 방식을 반영하여 설계되었다. 확률실행식에서 각 원소의 중복도는 '+'의 개수로 나타낸다[7]. 예를 들어 A, A, B C, C가 각각 적힌 5장의 카드 중에서 두 장을 임의로 택하여 일렬로 나열하는 과정은 다음과 같은 확률실행식으로 나타낼 수 있다.

X = 'A++, B+, C++'
Do 2X

이러한 표현은 Papert(1980)의 LOGO의 '가자'와 '돌자'와 같이 조작의 대상이자 학습자가 내면에서 실행할 수 있는 현상을 제시하는 실행식(executable expression)이다(조한혁, 송민호, 2014). <표 II-3>에서와 같이 확률실행식을 내적으로 실행하면 특정 결과 집합을 생성할 수 있다. 확률실행식을 이용하면 순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 나타낼 수 있으며, 조합과 중복조합

<표 II-3> 확률실행식

연산	수학적 표현	확률실행식	결과 집합
순열	${}_4P_2$	$X = 'a+, b+, c+, d+'$ Do 2X	ab, bd, …
중복순열	${}_3\Pi_4$	$X = '1,2,3'$ Do 4X	1111, 1223, …
같은것이있는순열	$\frac{6!}{3!2!1!}$	$X = '감+++, 배++, 귤+'$ Do 6X	감배배귤감감, 감배감배감귤, …
조합	${}_5C_2$	$X = 'o++, x+++'$ Do 5X	ooxxx, xoxox, …



[그림 II-2] 확률실행식과 순열 조합 문장제 해결 과정

은 수학적으로 같은 것이 있는 순열의 구조로 나타낼 수 있으므로 결론적으로 확률실행식은 모든 기본적인 순열 조합 문제 상황을 나타낼 수 있다<표 II-3>.

확률실행식은 의미구조상 선택 후 배치하는 과정을 표현하기 때문에 순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 각각 공식의 정의 진술 유형으로 나타낸 것으로 볼 수 있다. 순열 조합 문장제를 교과서에서 공식을 정의하는 방식의 구조[8]로 변환한 뒤 공식을 적용하여 해결하는 학생의 문제 이해 과정은 문장제에 대한 적절한 확률실행식을 세우는 과정과 유사하다. 문장제를 확률실행식으로 표현하는 것은 공식의 적용을 고려하여 구조를 변환하는 과정이므로 문제 해결 계획의 일부를 포함하는 문제 이해라고 볼 수 있다[그림 II-2].

또한 확률실행식은 일종의 중간언어로써 '무작위 자판기'와 같은 은유와 잘 연결되고 직관적인 형식을 갖추고 있어 초등학생, 중학생도 쉽게 익힐 수 있다. 따라서 순열 조합 영역에서 형식적인 기호와 공식이 도입되기 전에도 학생들은 순열 조합의 구조를 확률실행식으로 쉽게 표현할 수 있다. 확률실행식은 <표 II-3>에서 볼 수 있듯이 '감+++, 배++, 귤+'과 같은 문자를 통해 학생이 문제의 대상을 어떻게 이해하고 모델링했는지에 대한 정보를 제공한다. 따라서 마치 연립방정식 문장제에 대해 학생이 세운 연립방정식을 통해 학생의 문장제 이해를 평가할 수

7) +가 없는 원소는 계속 반복해서 추출할 수 있으므로 중복을 허용하는 선택 상황도 표현할 수 있다.
8) 조합, 순열, 중복순열에서는 선택 유형, 같은 것이 있는 순열에서는 배치 유형이 기본 공식의 진술 유형이다.

있듯이 순열조합 문장제를 확률실행식으로 표현하는 과제를 통해 학생들의 순열조합 문장제 이해를 평가할 수 있다. 이에 본 연구에서는 순열조합 문장제를 수학적 구조가 동형인 확률실행식으로 변환하는 과제를 해결할 때 연구참여자의 안구 운동을 측정함으로써 문제 이해 과정을 분석하고자 하였다.

4. 안구 운동과 인지 과정

인간이 어떤 대상을 볼 때 시선은 대상 전체를 천천히 훑어보는 것이 아니라 한 지점을 바라보면서 한동안 정지하게 되는데, 이를 응시(fixation)라 부른다. 그러다 어느 순간 또 다른 응시를 향해 빠른 속도의 도약 안구 운동(saccadic eye movement)을 한다. 일반적인 성인이 글을 읽을 때 응시의 지속시간은 200~300ms 인 경우가 많으며 도약 안구 운동은 30ms 정도 소요되는 빠른 이동이다(Rayner, 1998). 정보의 획득이나 처리는 응시에서만 일어나는 것으로 알려져 있다(Holmqvist et al., 2011). 응시는 인간의 주의와 밀접한 관계가 있으며 응시와 응시 사이의 도약은 주의의 이동과 밀접한 관련이 있다(Snowden et al., 2012).

동일한 사람에게 동일한 자료를 제시하고 서로 다른 목표를 주면 응시의 순서, 응시의 분포, 응시의 길이 등이 서로 다르게 나타나는데, 특히 응시는 목표를 달성하기 위해 필요한 정보를 제공해줄 수 있는 대상에 분포하게 된다(DeAngelus & Pelz, 2009; Yarbus, 1967). 인간의 시선은 자신의 목적에 따라 필요한 정보를 수집하기 위해 움직인다(Snowden et al., 2012). 인간이 어떤 지점을 응시한다는 것은 그것과 관련된 인지 처리가 내적으로 일어나고 있다는 것을 의미한다(Just & Carpenter, 1980). 따라서 문장제 이해라는 목적을 가진 학생의 안구 운동을 분석함으로써 우리는 문장제 이해 과정을 관찰할 수 있다.

안구 운동 자료의 분석은 크게 정성적 분석과 정량적 분석으로 구분할 수 있다. 정성적 분석은 특정 시간 동안의 안구 운동의 경로와 응시점의 분포를 나타낸 시선흐름(scan-path), 히트맵(heatmap) 등을 통해 이루어질 수 있다. Epelboim & Suppes(2001)는 기하 문제 해결 상황에서 성취도가 높은 학생의 경우 문제 해결에 필요한 가상의 삼각형을 구성하는 시선 패턴이 나타남을 시선흐름 분석을 통해 밝히고 안구 운동 패턴이 학습자의 인지적 처리과정, 인지적 능력과 관계되어 있음을 보고하였다. 대수 문제(이미진 & 이광호, 2014; Susac et al., 2014)나 심적 회전(mental rotation) 과제(이지윤, 2015)에서도 실험참가자가 사용하는 인지 전략에 따라 서로 다른 안구 운동의 패턴이 나타났다. 따라서 시선흐름과 안구운동 패턴에 대한 정성적 분석을 통해 우리는 문장제 이해 과정에서 실험참가자의 인지 전략을 추론할 수 있다.

정량적 분석은 안구운동의 지표(measure)를 통해 이루어진다. 안구운동의 지표는 응시와 도약, 눈깜박임과 같은 안구 운동의 사건(event)들을 계산 및 통계처리가 가능하도록 정확하게 정량화한 데이터이다. 지표들에 대한 통계 분석을 통해 우리가 설계한 실험에서 측정된 안구 운동 데이터가 가지는 의미를 이해할 수 있다. 지금까지 선행연구에 등장하는 지표만 해도 100여 가지가 넘으며 자신만의 지표를 만들 수도 있다. 연구의 영역, 연구의 목적, 실험 설계에 따라 적절한 지표를 선택하고 적합한 통계적 처리를 하는 것이 중요하다.

응시 시간(fixation duration)은 안구운동 추적 연구에서 가장 많이 사용되는 지표이다. 일반적으로 긴 응시는 깊은 인지 과정과 관련된다(Holmqvist et al., 2011). 읽기 과제에서 흔히 사용되지 않는 단어를 읽을 때 응시 지속시간이

더 길다. 소설보다 물리나 생물에 관한 글과 같이 어려운 것을 읽을 때 평균 응시 지속 시간이 길다(Rayner, 1998). 사용성 연구에서도 긴 응시는 화면으로부터 정보를 추출하는 어려움의 정도를 나타내는 지표로 사용되었다(Goldberg & Kotval, 1999). 특히 Dambacher & Kliegl(2007)은 안구 운동과 사건관련전위(ERP)를 함께 분석하여 긴 응시 시간이 의미 활성화에 민감한 N400의 크기 증가와 관련이 있음을 보고하였다. Andrá et al.(2015)는 동일한 수학적 대상에 대해 학생들이 식을 텍스트로, 텍스트를 식으로, 그래프를 텍스트로 변환하는 과정에서의 안구 운동을 측정하였는데, 가장 함축적이고 어려운 표상인 식을 읽을 때가 그래프를 읽을 때보다 평균 응시 시간이 더 길었다.

응시횟수(the number of fixations 또는 fixation count)는 일반적으로 관심영역[9](Area Of Interest, AOI)에 나타난 응시횟수의 총합으로 정의한다. 읽기 과제에서 복잡한 단어나 친숙하지 않은 단어를 포함한 AOI에서 응시횟수가 많았다(Clifton, Staub, & Rayner, 2007; Rayner, 1998). Susac et al.(2014)은 $a/x=b$와 같은 간단한 대수식을 조작하는 과제 중 어려운 문항에서 응시횟수가 증가하였으며 응시횟수는 반응시간이나 정답률로는 구분할 수 없었던 문항들 간의 난이도를 구분할 수 있게 하는 정밀한 지표임을 보고하였다. 닮음을 이용하는 기하 과제에서는 심적 회전을 필요로 하는 어려운 문항에서 응시횟수가 통계적으로 유의미하게 증가하였다(Lin & Lin, 2014). 따라서 일반적으로 응시횟수가 많은 AOI는 많은 정보를 담고 있거나 어려운 내용과 관련되어 있어서 여러 번 주의를 기울어야 하는 영역으로 해석할 수 있다.

한 AOI에서 다른 AOI로 응시가 이동하는 것을 응시전환(fixation transition)이라 한다. 응시전환은 각 AOI가 포함하고 있는 정보들을 비교하거나 통합하는 인지활동과 관련되므로 전환 횟수는 문제 해결의 난이도에 대한 지표로 사용할 수 있다. 예를 들어, 문장과 그림으로 구성된 기하 문제에서 어려운 문제일수록 문장영역과 그림영역 사이의 전환 횟수가 증가하였다(Lin & Lin, 2014). 수학적 표상 사이의 구조적 대응을 찾는 과제에서는 그래프가 주어졌을 때 동형 구조의 문장을 찾는 문제보다는 문장제가 주어졌을 때 함축적인 식 중에서 동형인 것을 찾는 문제에서 문제영역과 보기영역 사이의 전환 횟수가 증가하였다(Andrá, et al., 2015). 본 연구는 제시된 문장제와 수학적 구조가 동일한 외적 표상을 선택하는 과제를 사용하였기에 전환 횟수를 주요 안구 운동 지표 중 하나로 분석하였다.

III. 연구 방법

1. 연구 참여자

S시 ○○대학교 사범대학 수학교육과 대학원 강의 수강생 중 본 연구에 자발적으로 지원한 대학원생 총 23명(남 12명, 여 11명)을 대상으로 하였다. 연구참여자는 모두 수학교육 석사과정 또는 박사과정에 재학중인 대학원생으로 학교수학에 대한 내용 지식이 충분한 전문가이다. 본 연구는 문장제를 바르게 이해하고 정답에 응답한 자료만을 분석하여 순열 조합 문장제의 이해 과정, 성공적인 이해를 위한 요소를 조사하였다. 또한 정답률이 아닌 안구 운동 지표를 통해 의미 구조의 변환 유무가 난이도에 미치는 영향을 분석하고자 하였기에 문항 정확도가 높은 전문

9) 관심영역(AOI)이란 연구자가 관심 있는 정보에 대한 안구운동을 분석하기 위해 실험 자료에 설정한 특정 영역을 말한다.

가를 연구 참여자로 선정하였다.

2. 연구 절차

LC Technology사의 NYAN 2.0 프로그램을 이용하여 1차 실험을 설계하였고, 본 실험의 적합성과 타당성을 높이기 위해 학부생 중 자발적으로 지원한 9명을 대상으로 사전실험을 실시하였다. 사전실험의 결과분석을 바탕으로 문항과 실험 자료의 제시방법을 수정하여 본 실험을 설계하였다. LC Technology사의 Eyegaze Eye Follower 2.0 장비를 이용하여 실험을 진행한 후 안구 운동 데이터를 정성적・정량적으로 분석하였다.

3. 실험 자료

실험 자료의 과제는 Batanero et al.(1997)의 연구에서 사용된 문항들을 인기 있는 TV예능 프로그램에서의 친숙한 상황으로 변형하여 구성하였다. 문제의 의미 구조가 교과서의 공식 정의 진술 방식과 일치하면 '일치 유형', 일치하지 않으면 '불일치 유형'이라 하고 이러한 분류기준을 문제 유형이라고 하자. 순열, 중복순열, 조합에서는 선택 유형만이 일치 유형이고, 같은 것이 있는 순열에서는 배치 유형만이 일치 유형이다. 불일치 유형을 해결하기 위해서는 일반적으로 의미 구조의 변환이 필요하다.

계산 과정을 배제하고 순열조합 문장제의 이해를 집중적으로 분석하기 위하여 문장제를 확률실행식으로 표현하는 과제로 실험자료를 구성하였다. 사전실험을 통해 서술형, 참거짓, 선택형 과제를 사용해본 결과 선택형 과제에서 안구운동이 가장 명확히 나타났다. 특히 확률실행식을 키보드로 입력하는 서술형 과제에서는 시선이 자주 키보드로 향하여 화면 밖으로 나가는 등의 문제점이 발생하였다. 따라서 본 실험 자료는 [그림 III-1]과 같이 선택형 문항으로 구성하였다. 문장제를 확률실행식으로 표현할 때, 멀티셋 X='(　　)'에 두고 선택할 대상을 결정하는 것이 핵심이기 때문에 문장제에 등장하는 대상 정보 2가지를 각각 X='(　　)'에 넣어 2개의 보기를 하단에 제시하였다. 두 확률실행식은 [그림 III-1]과 같이 멀티셋 부분만 채워진 미완성 형태로 제시되기 때문에 'Do □X'에서 몇 번을 선택해야하는지도 결정해야 한다. 연구 참가자는 2개의 보기 중 제시된 문장제와 수학적으로 동형인 식을 선택해야 한다. 실험 자료의 문제 구성은 <표 IV-1>과 같다. 조합(combination)을 확률실행식으로 표현하기 위해서는 순서가 없는 구조를 순서가 있는 구조로 변환해야 하기 때문에, 조합을 제외한 3종류의 순열에 대한 문제로만 실험 자료를 구성하였다. 실험에서 혼란변수(confounding factor)를 최대한 억제하기 위하여, 각 문항 및 보기의 형식을 일관되게 구성하였다. 각 문제는 3줄에서 4줄로 구성되어 있으며 문항마다 지면에서 질문이 차지하는 넓이와 보기가 차지하는 넓이가 각각 비슷하도록 조절하였다.

4. 실험 설계

대학원 수업을 통해 실험 참여자들을 대상으로 순열 조합 문장제의 구조를 확률실행식으로 표현하는 전체 활동을 100분 동안 진행하여 충분히 익숙해질 수 있도록 하였다. 측정에 앞서 학생들에게 실험의 목적과 진행 방식에 대해 설명하였다. 그 후 각 실험참여자는 9개의 점을 이용한 보정(calibration)을 받았다. 9개의 점이 모두 보정될 때까지 반복하여 실시하였다. 실험 중 손은 키보드 자판 위에 올려놓도록 하였으며, 숫자키 1번 혹은 2번을 눌러 답을 입력할 수 있도록 하였다. 참가자들은 예시문제 1개를 해결한 후 총 9개의 문제를 해결하였다. 문제 풀이 시간에

제한은 두지 않았으며, 답을 입력하면 바로 다음 문제로 넘어가도록 하였다. 실험 중 문제와 관련한 질문은 가능한 하지 않도록 하였으며, 시선이 화면 밖으로 나가지 않도록 주의시켰다.

5. 자료 수집 및 분석 방법

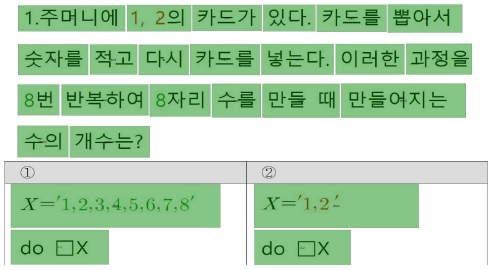
가. 안구 운동 추적기

본 연구에서 사용한 안구 운동 추적 장치는 Eyegaze Eye Follower 2.0(LC Technologies, Inc.)으로 120Hz에 해당하는 샘플링 속도를 가지고 있으며 0.2°의 공간해상력을 가지고 있다. 22인치 모니터 하단에 부착된 고정형 장치로써 4개의 카메라를 통해 연구참여자가 화면을 보는 동안 자연스럽게 안구 운동을 추적하고 기록한다. 보정 이후에는 머리의 자연스러운 움직임이 어느 정도 허용된다. 본 연구는 양안 추적 모드를 사용하였으며 120Hz의 샘플링 속도로 측정하였다. 실험 자료는 1920px×1080px 해상도의 22인치 모니터 전체화면 모드로 제시되었다.

나. 자료 수집 및 분석방법

23명 중 1명은 시선흐름을 통한 확인 결과 보정을 통과했음에도 불구하고 데이터의 정확도가 떨어지는 것으로 판단되어 분석에서 제외하였다(Holmqvist et al., 2011). 또한 2번 문항은 보기 구성에 오류가 있는 것으로 확인되어 분석에서 제외하였다. 문항 정답률 이외의 항목에서는 22명의 8문제에 대한 총 176개의 시행[10] 중 정답을 맞힌 156개의 시행만을 분석하였다.

문장제 해결은 읽기와 관련되기 때문에 응시



[그림 III-1] 실험 자료의 관심영역(AOI) 설정

최저 시간을 읽기 연구에 준하여 35ms으로 짧게 설정하였다. 각 문제가 화면에 나타난 이후의 첫 번째 응시는 직전 문제의 영향을 받으므로 분석에서 제외하였다(Holmqvist et al., 2011). 문제는 [그림 III-1]과 같이 어절별로 AOI를 설정하고 이들 전체를 묶어 문제 전체에 대한 AOI로 정의하였으며, 보기의 확률실행식에 대한 각각의 AOI를 설정한 후 분석하였다.

시선흐름과 프로토콜 분석, 시간의 흐름에 따른 각 AOI별 응시횟수 누적 그래프, 히트맵을 이용하여 정성적 분석을 실시하였다.

정량적 분석을 위해서 NYAN 2.0(LC Technologies, Inc.)을 이용하여 응시 데이터를 추출한 후 연구의 목적과 과제의 특성에 맞게 평균 응시시간, 단위시간당 응시율, 단위면적당 응시율, 전환횟수를 구하였다. 평균 응시시간은 총 응시시간을 응시횟수로 나눈 값이다. 단위시간당 응시율은 응시횟수를 도약과 응시를 포함한 총 시간으로 나눈 값이다. 평균 응시 시간, 단위시간당 응시율과 총 응시시간(total dwell time)[11]을 비교하면 각 AOI를 길게 적게 보았는지, 짧게 많이 보았는지를 정량적으로 구분해낼 수 있다. 문제마다 문장의 길이, 핵심 정보의 길이나 개수가 상이하기 때문에 단위면적당 응시횟수로 응시의 빈도를 비교하고자 하였다. 단위 면적당 응

10) 한 사람이 한 개의 문항을 해결하는 것을 1회 시행으로 하여, 시행별 데이터를 분석하였다(이지윤, 2015).
11) AOI안에 속한 모든 응시 시간의 총합을 의미한다.

시율은 각 AOI에 속한 응시횟수를 AOI의 면적($pixel^2$)으로 나눈 값이다. R(R Core Team, 2013)을 이용하여 유의확률을 분석함으로써 정량적 분석을 실시하였다.

IV. 결과 분석 및 논의

실험참가자의 8개 실험 문항들에 대한 평균 점수는 8점 만점에 7.09점(표준편차 0.73)으로 매우 높게 나타났다. 실험참가자 전원이 수학교육을 전공한 대학원생이기 때문인 것으로 생각된다. 전체 문항의 평균 응답시간은 17.08초(표준편차 9.06) 이고 각 문항별 정답률은 <표 IV-1>과 같다.

각 시행(trial)의 정답여부를 종속변수로 하고 문제유형을 고정요인, 실험참가자를 임의요인으로 설정하여 일반화선형혼합모형(glmm)을 이용한 반복측정 분산분석을 실시한 결과 불일치 유형이 정답률이 더 낮은 것으로 나타났다(b=-2.40, SE=0.76, p<.01). 이는 선행연구(이지현 외, 2005; Batanero et al., 1997)와 일치하는 결과이다.

1. 과제 해결 전략의 유형

순열조합 문장제 이해 과제에서의 안구운동을 분석하기 위하여 Hegarty, Mayer, & Green(1992)가 산술 문장제 해결에서의 안구운동을 분석하기 위해 개발한 프로토콜을 개선하여 사용하였다. 프로토콜은 실험참가자가 응시한 문장 또는 단어, 그 문장과 단어가 속해있는 줄의 번호, 응시 횟수의 총합, 전체 응시 시간 및 평균 응시 시간을 순서대로 나열한 것이다.

[그림 IV-1]의 시선흐름에 대응되는 프로토콜은 <표 IV-3>이며, [그림 IV-2]의 시선흐름에 대응되는 프로토콜은 <표 IV-4>이다. 프로토콜과

<표 IV-1> 실험 문항의 구성과 정답률

문항 번호	연산	의미구조	문제 유형	정답률	
1	중복순열	선택	일치	1	0.98
3	같. 순	배치		1	
5	순열	선택		0.95	
6	중복순열	선택		0.95	
4	중복순열	분할	불일치	0.86	0.80
7	같. 순	분할		0.72	
8	순열	배치		0.72	
9	같. 순	분할		0.86	

주: '같. 순'은 같은 것이 있는 순열을 의미한다.

시선흐름을 이용한 정성적 분석 결과 안구 운동의 전체적인 양상에 [그림 IV-1]과 [그림 IV-2]와 같이 두 가지 유형이 나타났다. 일반적으로 문제해결자가 사용하는 해결 전략이나 접근 방법에 따라 안구 운동의 양상이 다르게 나타난다(이지윤, 2015; Hegarty et al., 1992; Susac et al., 2014). 따라서 우리는 정성적 분석과 함께 정량적 분석을 통해 검증하여 연구 참여자들이 순열조합 문장제 이해 과제를 해결하기 위해 사용한 전략 유형을 2가지로 구분하였다. [그림 IV-1]과 같이 문제의 핵심 정보에 응시가 집중된 형태의 시선흐름이 나타나는 전략을 '모델 구성 접근'이라 하고, [그림 IV-2]와 같이 보기로 제시된 확률실행식과 문제영역 사이의 전환이 많이 나타나는 전략을 '보기 번역 접근'이라 하였다. 다음은 두 가지 전략인 '모델 구성 접근'과 '보기 번역 접근' 각각에서의 문장제 이해 과정에 대한 분석이다. 통계적 유의성은 <표 IV-7>에 제시된 혼합모형의 결과이다. 이 혼합모형에 대한 자세한 설명은 3절에서 다룬다.

가. 모델 구성 접근

실험참가자 22명 중 7명이 이 전략을 이용하여 문제를 해결하였다. <표 IV-3>과 같이 '전체

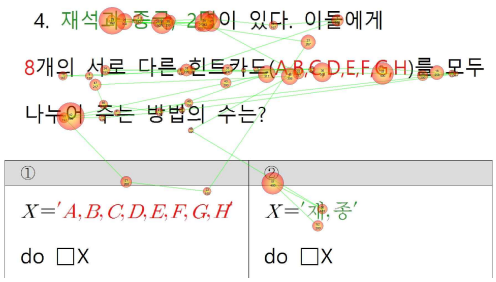
<표 IV-2> 각 과제 해결 전략에서의 안구 운동 지표

전략 / 지표	평균(표준편차)	
	모델 구성(N=7)	보기 번역(N=15)
정답률(%)	89.3	88.3
응답시간(s)	13.48(5.46)	18.29(9.76)
평균 응시 시간(ms)		
-전체영역	192.95(35.67)	161.67(26.20)
-문제영역	196.13(38.15)	163.63(28.08)
-보기영역	186.25(45.75)	159.32(36.83)
단위 시간당 응시율(s^{-1})		
-전체영역	4.06(0.50)	4.67(0.58)
-문제영역	4.14(0.52)	4.75(0.66)
-보기영역	4.35(0.80)	4.87(0.80)
단위 면적당 응시율($(px^2)^{-1}$)		
-전체영역	0.048(0.064)	0.072(0.035)
-문제영역	0.056(0.029)	0.075(0.037)
-보기영역	0.032(0.020)	0.069(0.059)
문제-보기 전환횟수	5.50(3.26)	10.78(7.12)

주: 정답률을 제외한 모든 지표는 정답인 시행에 대한 통계

문장 읽기→핵심정보에 대한 순환적 재응시→점검→답 선택' 의 안구운동이 나타난다. 학생들은 시작과 동시에 문제를 구성하고 있는 2개의 문장을 모두 읽는다<표 IV-3의 1-3>. 산술 문장제에서의 초기 안구운동 패턴과 일치하는 것으로 문제 해석 단계 중 특히 문제-텍스트 모델을 표상하는 초기 과정으로 판단할 수 있다(Hegarty et al., 1992). 이후 문제를 이해하는데 핵심이 되는 단어인 '재석과 종국, 2명', '서로 다른', '힌트카드(A, B, C, D, E, F, G, H)', '나누어 주는'을 돌아가며 응시하는 '순환적 재응시'가 여러 차례 일어난다<표 IV-3의 5-10>. 우리는 다음 두 가지 관찰과 분석을 토대로 이러한 안구 운동이 문장의 핵심 정보들을 통합하여 문제-상황 모델을 구성하고 수학적 배경 지식과 텍스트의 정보를 토대로 문제에 대한 수학적 모델을 내적으로 표상하는 과정으로 판단하였다.

첫째, 핵심 정보에 대한 재응시는 평균적으로 응시 시간이 길뿐 아니라 400ms 이상의 긴 응시들을 포함하고 있다. 통계적으로도 보기 번역 접근보다 모델 구성 접근의 문제영역에서의 평균 응시



[그림 IV-1] 모델 구성 접근을 사용한 s22의 응시흐름

<표 IV-3> 모델 구성 접근을 사용한 s22의 프로토콜

순서	줄	문장/단어	응시횟수	응시시간(s)	평균응시시간(ms)
1	1	재석과 종국 2명이 있다. 이들에게	6	1.40	233
2	2	8개의 서로 다른 힌트카드(A,B,C,D,E,F,G,H)를 모두	10	1.39	139
3	3	나누어 주는 방법의 수는?	3	0.43	143
4	4L	X='A,B,C,D,E,F,G,H'	2	0.36	180
5	1	재석과 종국, 2명	9	2.69	299
6	2	서로 다른 힌트 (A,B,C,D,E,F,G,H)를 모두	8	1.91	239
7	3	나누어 주는 방법의	3	0.78	260
8	2	힌트카드	2	0.52	260
9	3	방법의	2	0.32	160
10	2	(A,B,C,D,E,F,G,H)	3	0.625	208
11	4R	X='재,종'	3	0.78	260

시간이 유의미하게 길다(b=0.19, SE=0.07, p<.05). 긴 응시는 학습자 내부의 복잡한 인지 처리의 외부적 증거임을 봤을 때(Dambacher & Kliegl, 2007; Goldberg & Kotval, 1999; Holmqvist et al., 2011; Rayner, 1998), 모델 구성 접근에서 나타나는 이러한 핵심 정보에 대한 재응시는 단순한 정보의 획득 이상의 인지 과정의 증거라 볼 수 있다.

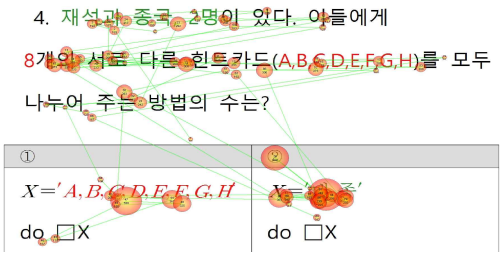
둘째, 주요정보에 대한 재응시 이후 바로 답을 선택하거나 간단히 식과 핵심 정보를 비교하여 점검하는 형태의 응시 전환 이후 바로 답을 선택한다<표 IV-3의 10>. 바로 답을 선택했다는 것은 이 과정에서 학생들이 핵심 정보로부터 문제의 구조를 이미 내적으로 표상했다는 것과 그 내적 표상과 확률실행식 사이에는 번역이 필요 없었다는 증거이다. 따라서 학생들은 확률실행식을 내적으로 표상하였거나 이와 동일한 선택 구조의 자신만의 문제 모델을 표상했을 가능성이 높다.

이 전략을 사용하는 학생은 보기의 확률실행식을 거의 응시하지 않는다. 이미 확률실행식의 의미 구조를 내적으로 인지하고 있는 상태에서, 문제의 의미 구조를 선택형 구조로 나타낸 뒤 바로 답을 선택하는 것으로 판단된다.

가. 보기 번역 접근

실험참가자 22명 중 15명이 이 전략을 사용하였다. <표 IV-4>과 같이 '전체 문장 읽기→핵심 정보 재응시→보기와 핵심정보 사이의 전환→답 선택' 의 안구 운동이 나타난다.

맨 처음 전체 문장을 읽는 것은 모델 구성 접근과 같이 초기 문제 해석 단계로 볼 수 있다 <표 IV-4의 1-3>. 이후 개인차가 있지만 1회~2회 내외로 '2명', '8개의', '나누어 주는' 등의 핵



[그림 IV-2] 보기 번역 접근을 사용한 s1의 응시흐름

<표 IV-4> 보기 번역 접근을 사용한 s1의 프로토콜

순서	줄	문장/단어	응시횟수	응시시간(s)	평균응시시간(ms)
1	1	재석과 종국, 2명이 있다. 이들에게	11	1.72	156
2	2	8개의 서로 다른 힌트카드(A,B,C,D,E,F,G,H)를 모두	7	1.257	180
3	3	나누어 주는 방법의 수는?	3	0.48	160
4	1	재석과 종국, 2명이 있다.	6	1.13	188
5	2	8개의 서로 다른 힌트카드	2	0.48	240
6	3	나누어 주는	2	0.27	135
7	4L	X='A,B,C,D,E,F,G,H'	2	0.28	140
8	4R	X='재,종'	7	2.20	314
9	4L	X='A,B,C,D,E,F,G,H'	7	1.95	279
10	3	주는	1	0.28	280
11	2	8개의 서로 다른, A,B,C,D,E,F,G,H	6	1.14	190
12	4R	X='재,종'	5	1.06	212
13	2	8개의 서로 다른 힌트카드	6	1.10	183
14	1	2명이 있다.	2	0.31	155
15	2	8개의 서로 다른	5	1.26	252
16	4R	X='재,종'	11	2.70	245
17	2	힌트카드 A,B,C,D,E,F,G,H	2	0.4	200
18	3	나누어	1	0.17	170
19	4R	X='재,종'	1	0.14	140

심 정보들에 대한 재응시가 일어난다<표 IV-4의 4-6>. 이는 핵심 정보들과 배경지식을 바탕으로 문제-텍스트 모델과 문제-상황 모델을 정교화 시키는 과정으로 볼 수 있다. 그러나 모델 구성 접근과는 달리 문제에 대한 수학적 모델을 내적으로 표상하는 것으로 판단되지 않는다. 모델 구성 접근에 비해 문제 영역의 평균 응시 시간이 짧으므로(b=-0.19, SE=0.07, p<.05), 수학적 모델의 표상과 같이 정보를 통합하는 깊은 인지과정이 일어난다고 볼 수 없으며 모델 구성 접근과 달리 이후 <표 IV-4의 9-19>과 같은 추가적인 안구 운동이 많이 나타나는 것은 문제 이해를 위해 다른 추가적인 인지 처리가 일어났음을 의미하기 때문이다.

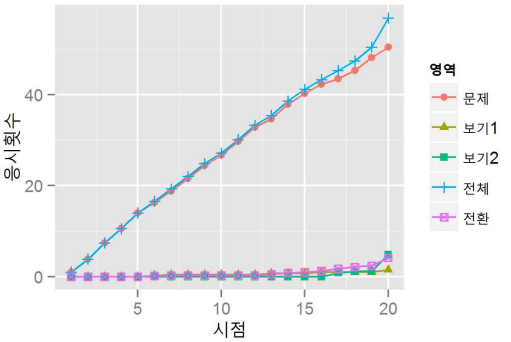
보기 번역 접근을 하는 학생의 경우 <표 IV-4의 9-19>와 같이 과제 해결 과정의 중간부터 마지막까지 보기의 확률실행식과 문제의 핵심정보들 사이를 전환하면서 반복적으로 응시하는 안구운동 패턴이 나타난다. 통계적으로도 보기 번역 접근은 모델 구성 접근보다 보기영역의 단위 면적당 응시율이 높고(b=0.02, SE=0.008, p<.05), 문제와 보기 영역 사이의 전환횟수가 많음(b=0.44, SE=0.12, p<.001)을 확인할 수 있었다. 2개의 수학적 표상 사이의 반복적인 응시 전환은 이 2개의 수학적 표상을 비교하는 인지 처리와 관계된다(Andrá et al., 2015). 이러한 보기와 문제 사이의 비교 패턴으로 과제 해결이 끝난다는 점과 후반부로 갈수록 학생이 정답이라고 생각하는 보기와 문제 사이의 전환 횟수가 증가하는 것을 보았을 때, 보기 번역 접근에서는 학생들이 보기의 확률실행식과 문제의 텍스트를 비교하여 답을 구하는 전략을 사용하는 것으로 판단할 수 있다. 과제 해결 과정을 보았을 때 이러한 비교는 결국 확률실행식에 문제의 핵심정보를 대응시키고 그러한 대응이 문제 상황에서 요구하는 경우의 수를 세는데 적합한지 확인하는 인지 과정임을 추론할 수 있다. 즉, 보기를 문제 상황에 맞게 번역해보면서 답을 찾는 전략을 사용한 것으로 판단된다.

한편, 보기 번역 접근을 하는 학생은 모델 구성 접근을 하는 학생보다 단위 시간(초)당 응시율이 유의미하게 높다(b=0.62, SE=0.22, p<.001). 문제의 핵심정보를 빠르게 보고 문제영역과 보기영역 사이의 응시 전환을 많이 하므로 상대적으로 짧게 자주 보는 안구 운동이 나타난 것으로 해석된다.

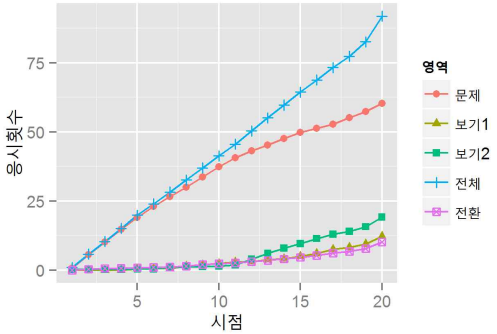
다. 두 과제 해결 전략의 비교 및 종합

[그림 IV-3, IV-4]는 각 실험참여자의 응답시간을 균등하게 20개의 시점으로 구분한 뒤 x축을 20개의 시점으로, 각 시점에서의 실험참여자들의 3개의 영역(문제, 보기1, 보기2)에 대한 누적 응시횟수와 누적 전환횟수의 평균을 y축으로 나타낸 그래프로 두 해결 전략에서의 안구 운동의 서로 다른 양상을 보여준다.

[그림 IV-3]은 모델 구성 접근을 한 7명의 3번 문항에 대한 그래프이고 [그림 IV-4]는 보기 번역 접근을 한 15명의 3번 문항에 대한 그래프이다. 모델 구성 접근에서는 문제의 핵심정보를 토대로 수학적 모델을 구성하기 때문에 지속적으로 문제 영역의 응시횟수만이 증가하다가 마지막 순간에 정답에 해당하는 보기2 영역의 응시횟수가 증가한다. 반면 보기 번역 접근에서는 보기의 확률실행식을 문제 상황에 맞게 번역하기 때문에 중반 이후 지속적으로 문제 영역, 정답인 보기2 영역에서의 응시, 전환횟수가 증가함을 볼 수 있다. 보기 번역 접근을 하는 학생의 경우 모델 구성 접근을 하는 학생(M=89.28%)과 보기 번역 접근을 하는 학생(M=88.33%)의 정답률 사이에는 유의미한 차이가 없었다. 그러나 모델 구성 접근을 하는 경우가 문제를 더 빠른 시간에 이



[그림 IV-3] 모델 구성 접근에서의 누적 응시 횟수



[그림 IV-4] 보기 번역 접근에서의 누적 응시 횟수

해하였다(b=-0.26, SE=0.13, p<.01). 보기 번역 접근을 하는 학생들은 문제에 따라 오답인 식과 문제를 비교한 후 정답인 식과 문제를 비교하여 답을 찾는 시행착오(trial and error)적 패턴을 보여주기도 하였기 때문에 문제 이해에 더 많은 시간이 소요된 것으로 판단된다. 문제에 대한 적절한 정신 모델을 표상하는 모델 구성 접근이 응답 시간이 더 짧고 문제의 핵심정보의 통합을 통해 구조를 파악했다는 측면에서 보다 의미 있는 접근이라 볼 수 있다.

보기 번역 접근은 Andrá et al.(2015)의 연구에서 주어진 문장제와 대응되는 부등식을 찾는 선택형 문항에서 학생들이 함축적인 식에 집중하며 텍스트와의 비교를 통해 답을 구하는 과정과 유사하다. 따라서 보기를 문제에 맞추어 번역해 보는 것은 선택형 과제에서 학생들이 사용하는 과제 해결 전략 중 한가지로 판단되며 서술형 형태의 문장제 과제에서는 사용할 수 없다.

반면, 모델 구성 접근 전략을 사용하는 학생들의 안구 운동 양상은 Mayer(1992)와 English & Halford(1995)의 이론을 토대로 세운 문장제 이해 모델[그림 II-1]과 대응시킬 수 있다. 전체 문장을 처음부터 끝까지 읽는 시선 패턴은 문제 해석 단계 중 문제-텍스트 모델 표상의 초기 단계와 관련되며 문제의 핵심 정보를 번갈아가며 재응시하는 시선 패턴은 문제-상황 모델과 수학적 모델을 표상하고 갱신하는 문제 통합 단계와 관련된 것으로 판단된다. 그러나 세 가지 모델의 표상 과정이나 문제 해석과 문제 통합 단계의 경계를 안구운동으로 명확히 구분할 수는 없었다. 이러한 과정은 입체적이고 동시적으로 이루어지기 때문으로 판단된다. 보기번역 접근에서 화면에 제시된 미완성 형태의 수학적 모델을 문장의 핵심정보와 비교하며 완성함으로써 문제를 이해하는 안구 운동은 학생들이 내적으로 수학적 모델을 표상하는 과정의 일부가 외부로 표출된 것으로 볼 수 있다. 이러한 관점에서 보면, 수학적 모델은 문제-텍스트 모델, 문제-상황 모델을 기초로 핵심 정보와 수학적 스키마의 통합이 반복적으로 이루어지면서 점진적으로 정교화가 이루어지는 것으로 볼 수 있다. 즉, 수학적 모델의 표상 과정은 Kintsch(1998)의 텍스트 이해 이론에서 구성·통합에 의한 상황 모델의 표상 과정과 유사한 것으로 판단된다.

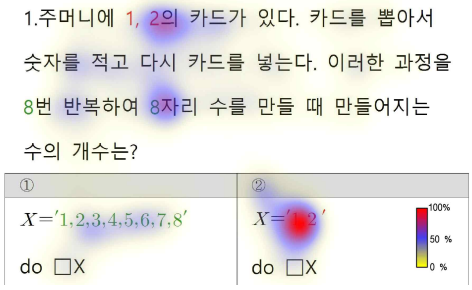
2. 전문가의 안구 운동 특징

가. 문제의 핵심정보에 대한 선택적 주의

연구참여자의 각 문항에 대한 시선흐름을 보면

문제를 이해하는데 필요한 핵심정보에 응시가 집중되어 있음을 알 수 있다. 예를 들어, [그림 IV-5]의 히트맵[12]에서 볼 수 있듯이 1번 문항에서는 배치의 대상 정보를 포함한 '1, 2의 카드', 선택의 횟수를 알려주는 '8자리'를 오래 많이 보았다. 또한 '적고'와 같이 문제의 의미구조를 암시하는 단어나 '다시', '반복'과 같이 중복허용 여부를 알려주는 단어에도 일반적인 단어보다 주의를 집중했다. 대응표본 분산분석 결과 <표 IV-5>에 제시된 연구참여자의 핵심정보[13]와 기타정보에서의 평균 응시시간($t(21)=5.423$, $p<.001$) 및 단위면적당 응시횟수($t(21)=7.225$, $p<.001$)의 차이는 통계적으로 유의미하였다. 이러한 결과는 정확도가 높은 학생은 문제 해결에 필요한 핵심정보를 빠르게 파악하고 주의 집중을 한다는 선행연구의 결과와 일치한다(Gegenfurtner, Lehtinen, & Säljö, 2011; Lin & Lin, 2014).

한편, 핵심정보에 관한 응시의 범위는 과제 해결이 진행됨에 따라 점진적으로 좁아지는 특징이 있다. 학생들은 공통적으로 최초에는 전체 문장을 모두 읽는다. 하지만 그 이후 문제-상황 모델과 수학적 모델을 구성하는 과정에서 반복적으로 핵심적인 정보를 응시하면서 점점 주의를



[그림 IV-5] 1번 문항의 히트맵(가우시안 방법, $\sigma=0.4$, 응시 횟수와 시간 기준)

<표 IV-5> 핵심정보와 기타정보의 안구운동 지표

문항	평균 응시 시간(ms)		단위면적당 응시 횟수(px^2)	
	핵심정보	기타정보	핵심정보	기타정보
1	174	167	0.1030	0.0470
3	230	154	0.0981	0.0465
4	183	172	0.1111	0.0577
5	176	161	0.1491	0.0595
6	178	153	0.0648	0.0346
7	185	169	0.0831	0.0662
8	187	165	0.0885	0.0757
9	180	162	0.0948	0.0558
전체	184	163	0.0991	0.0554

기울이는 정보의 범위가 축소되는 현상을 볼 수 있다. 예를 들어, <표 IV-4>을 보면, 최초로 첫 번째 줄을 읽을 때 <표 IV-4의 1>는 전체를 모두 읽지만, 두 번째 <표 IV-4의 4>에는 '재석과 종국, 2명이 있다.', 세 번째 <표 IV-4의 14>에는 '2명이 있다'와 같이 문제를 이해하는데 핵심이 되는 정보로만 응시의 범위가 축소된다. Hegarty et al.(1992)의 산술문장제 이해에 관한 연구에서도 정확도가 높은 연구참여자들에게서 이러한 핵심정보에 대해 응시의 범위가 좁아지는 현상이 관찰되었는데, 그들은 이러한 시선 패턴을 깔때기 효과(the funnel effect)라고 명명하였다.

정리하면, 순열조합 문장제 이해에 있어서 전문가 집단인 연구참여자들은 문제의 핵심정보를 빠르게 파악하고 집중하였다. 문제영역의 응시의 대부분은 대상의 구별성, 중복가능성, 파라미터(m과 n), 의미구조와 관련된 서술어 등 문제해결에 필요한 핵심정보에 집중되어 분포하고 있으며 문제 해결과 관련성이 적은 정보는 최초 응시 이후 문제 통합 단계에서는 거의 응시가 일어나지 않는다.

인지심리학에서의 몇몇 연구는 문제를 해결하지 못하는 연구참여자에게 문제를 해결한 연구참여자에게서 나타난 안구 운동 패턴을 유도하

12) 히트맵은 응시 횟수와 응시 시간을 색의 스펙트럼으로 나타낸다. 붉을수록 응시 횟수가 많고 응시 시간이 길다.

13) 대상 구별, 순서 여부, 중복 여부에 관한 정보 및 수치 정보, 의미 구조에 관한 서술어를 핵심정보로 분류하였다.

는 것만으로 문제해결의 성공률을 높일 수 있음을 보고하였다. 즉, 안구 운동이 인간의 문제해결 과정에 영향을 준다(Grant & Spivey, 2003; Thomas & Lleras, 2007). Radford(2010)도 학생들이 복잡한 수학적 추론을 하는데 있어서 정보를 지각하는 순서가 중요함을 강조하며 '눈의 교육(educating eye)'의 필요성을 주장한 바 있다. 전문가인 대학원생의 안구 운동으로부터 복잡한 문장제 진술 속에서 순열 조합의 구조와 관련된 핵심정보를 선별하고 주의를 기울이는 것이 순열 조합 문장제의 성공적 이해에 필수 조건임을 알 수 있다. 따라서 학생들이 문제 이해에 필요한 핵심 정보에 주의를 기울이고, 수학적 지식을 바탕으로 핵심정보로부터 수학적 모델을 구성할 수 있도록 풍부한 경험을 제공할 필요가 있다.

나. 정신 모델의 사용

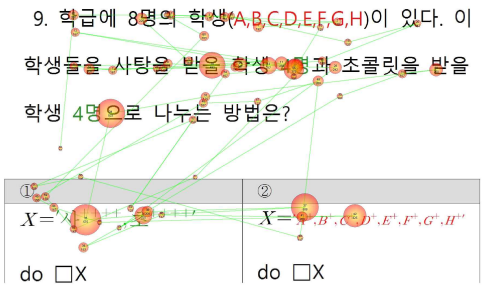
본 연구에서 모델 구성 접근을 하는 학생들은 작업 기억(working memory)내에서 문제의 주요정보를 반복적으로 읽으면서 조직화, 정교화 시킬 수 있는 정신 모델을 가지고 있다고 볼 수 있다. 수학적 정확도가 높은 정신모델의 사용은 문장제 문제를 오류 없이 이해하는데 중요한 역할을 하며(Hegarty et al., 1992; Lewis, 1989), 작업 기억 내에 머물며 문제해결자가 계획 및 실행 단계에서의 자신의 해결 과정을 점검할 수 있도록 돕는다(Hegarty et al., 1995). 본 연구에서도 정답률에 유의미한 차이는 없었으나 정신 모델을 내적으로 표상하는 모델 구성 접근 전략을 사용한 학생들이 보기 번역 접근을 사용한 학생들보다 빠르게 문제를 이해하는 모습을 볼 수 있었다. 보기 번역 접근이 선택형 과제에서만 사용가능한 전략임을 생각하면 주관식 형태의 과제에서는 정신 모델의 사용이 더욱 유의미한 효과를 나타낼 것으로 예상된다. 그러나 순열조합이나 확률 상황에 대한 정신모델은 많이 알려져 있지 않으며, 일반적으로 교사나 학생 모두 순열조합 문제의 이해에 있어서 이러한 정신 모델을 의식적으로 활용하지 않는다[14]. 따라서 확률실행식과 같이 학생들이 작업 기억에서 순열조합 문장제의 구조를 정교하게 파악할 수 있는 정신 모델을 개발하고, 학생들이 정신 모델을 문제 이해를 위한 인지전략으로 사용할 수 있도록 의도적으로 안내할 필요가 있다. 예를 들어, 문장제를 '문제→ 정신모델(X='a,b'/Do 4X)→ 수학 기호($_2\Pi_4$)→ 계산(2^4)'의 과정을 통해 해결할 수 있도록 지도하는 것은 학생의 순열조합 문장제 이해를 도울 수 있는 좋은 방안이 될 수 있을 것이다.

다. 메타인지적 점검의 사용

보기 번역 접근 전략을 사용한 15명은 8개의 문제를 모두 동일한 패턴으로 해결하였다. 그러나 모델 구성 접근을 한 7명 중 6명에게서는 일부 문제에 대해서 후반부에 보기 번역 접근과 같이 식과 문제를 비교하는 안구 운동 패턴이 나타났다.

예를 들어, 연구참여자 s22는 8문항 중 마지막 9번 문항에서만 이러한 패턴을 보였다[그림 IV-6]. 우리는 이를 문제의 핵심정보로부터 수학적 모델을 구성하지 못하였거나 자신이 세운 수학적 모델에 대한 확신이 부족할 때, 보기를 문제에 맞게 번역해봄으로써 답을 점검(verification)하고 구한 것으로 판단했다. 이러한 활동은 학생이 자신의 이해과정을 평가하고 추가적인 점검 전략을 사용했다는 점에서 메타인지적 조절이라고 볼 수 있

14) 상자-공 모델은 공식의 진술 형태인 선택 구조가 아닌 분할 구조를 가지고 있어 기초적인 순열 조합 문장제를 이해하는 정신 모델로 사용하기에는 어려운 면이 있다.



[그림 IV-6] 연구참여자 s22의 점검 과정

다. 점검 활동은 순열조합 문제 해결에서 성공률을 높이는데 중요한 역할을 함에도 불구하고 많은 학생들이 효율적인 점검 전략을 사용하지 못한다(Eizenberg & Zaslavsky, 2004). 순열 조합이 어려운 이유 중 하나는 학생 스스로 자신의 이해나 풀이가 맞았는지 틀렸는지 확인하기 어렵다는 점이다. 따라서 학생들이 자신의 이해를 스스로 평가하고 반성할 수 있는 효율적인 점검 전략을 가질 수 있도록 지도할 필요성이 있다.

3. 의미 구조의 변환에 따른 안구 운동의 차이

우리는 순열조합 문장제 이해 과제 해결에 있어서 의미 구조의 변환 과정의 유무가 안구 운동에 미치는 영향을 선형혼합모형(Linear Mixed-effects Model, LMM)을 이용하여 분석하였다. 통계 소프트웨어는 R(R Core Team, 2013)을 사용하였으며 lme4 패키지(Bates, Maechler, Bolker, & Walker, 2015)를 사용하였다. 선형혼합모형은 우도를 활용하기 때문에 결측치가 있는 자료도 모두 사용할 수 있으며 범주형 변수 뿐 아니라 연속변수도 함께 개체내 요인으로 분석할 수 있다는 점에서 고전적인 분산 분석보다 많은 정보를 제공해준다. 실험참가자를 임의요인(random effect)으로 두고 과제 해결 전략 유형, 문제 유형, 응답시간 등의 고정요인(fixed effect)이 각 안구 운동 지표에 주는 영향을 분석하였다. 정수형 지표인 전환횟수에는 일반화선형혼합모형(Generalized Linear Mixed-effects Model, GLMM)을 적용하였다. 응답 시간과 응시 시간은 일반적으로 정적 편포를 보이므로 로그변환(log-transformation)을 실시한 후 분석하였다(Holmqvist et al., 2011). 본 연구에서는 모형 선택 과정은 생략하고 최종 선택된 모형에 대한 결과만을 <표 IV-7>에 제시하였다. 주요 고정요인인 해결 전략 유형과 문제 유형 사이에 교호작용은 모든 모형에서 유의미하지 않아 제시하지 않았다.

문제 유형의 일치 여부가 응답시간에 미치는 영향은 통계적으로 유의미하지 않았다. 유형에 따른 문제영역에서의 평균 응시 시간도 통계적으로 유의미한 차이는 없었다. 그러나 일치 유형보다 불일치 유형의 문제를 풀 때 실험참가자들의 보기 영역에서의 평균 응시 시간이 증가하는 것으로 나타났다(b=0.08, SE=0.02, p<.01).

단위 시간당 응시율은 불일치 유형의 문항을 풀 때 감소하는 것으로 나타났다(b=-0.14, SE=0.05, p<.05). 이러한 차이는 문제영역이 아닌 보기영역에서의 차이에 의한 것으로 불일치 유형의 문제를 풀 때 보기영역의 단위 시간당 응시율이 감소하는 것으로 나타났다(b=-0.30, SE=0.09, p<.01). 불일치 유형에서는 평균적으로 좀 더 길게 보면서 보다 느린 안구 운동을 하는 것으로 해석할 수 있다.

일반적으로 문항을 푸는 시간이 길어질수록 응시횟수가 늘어나므로 단위 면적당 응시율에 대한 모형은 응답시간을 고정요인에 추가하여 분석하였다. 그 결과 불일치 유형을 풀 때 문제영역에서의 단위 면적당 응시율이 통계적으로 유의미하게 증가하였다(b=0.01, SE=0.003, p<.01). 그러나 보기영역에서는 불일치유형이 일치유형보다 단위 면적당 응시율이 낮은 것으로 나타났다(b=-0.01, SE=0.004, p<.01). 단위면적당 응시율

은 응시의 빈도를 반영하므로 불일치유형을 풀 때 학생들은 일치 유형을 풀 때보다 문제의 핵심정보를 더 많이 보았음을 의미한다.

불일치유형에서 문제와 보기 사이의 전환횟수가 증가하는데(b=0.11, SE=0.05, p<.01), 이는 불일치유형에서 학생들이 문제와 확률실행식의 비교를 더 많이 했음을 의미한다.

일치 유형 문제는 정답인 확률실행식과 문제의 의미 구조가 일치하므로 수학적 모델을 쉽게 구성할 수 있다. 또한 문제와 보기를 구조의 변환 없이 바로 비교가 가능하다. 예를 들어, 1번 문항 [그림 IV-5]는 선택 유형의 중복순열 문제이므로 확률실행식의 의미 구조와 일치한다. 따라서 확률실행식의 결과 집합 $\{11111111, 11111112, \cdots\}$ 은 그대로 문제에서 세고자하는 8자리의 수 집합에 해당한다.

그러나 불일치 유형 문제는 모델 구성 접근과 보기 번역 접근, 두 전략 모두 문제 이해 과정에서 의미 구조의 변환이 필요하다. 예를 들어, 4번 문항 [그림 IV-2]에서 올바른 확률실행식을 찾기 위해서는 문제를 동형 구조의 선택 구조인 '8개의 서로 다른 카드가 있다. 각 카드를 받을 사람을 재석과 종국 중 중복을 허락하여 선택하는 방법의 수는?'로 바꾼 후 확률실행식을 찾아야한다. 답을 점검하거나 실험참가자가 보기 번역 접

<표 IV-6> 문제 유형에 따른 안구 운동 지표

지표 (Measure)	일치 유형 평균(표준편차)	불일치 유형 평균(표준편차)
응답시간(s)	16.29(8.95)	17.31(8.85)
평균 응시 시간(ms)		
-전체영역	170.27(34.59)	173.45(30.79)
-문제영역	174.21(37.63)	173.85(31.77)
-보기영역	161.24(41.13)	176.21(41.22)
단위 시간당(s) 응시율		
-전체영역	4.53(0.64)	4.40(0.60)
-문제영역	4.59(0.71)	4.52(0.65)
-보기영역	4.84(0.81)	4.54(0.83)
단위 면적당(px^2) 응시율		
-전체영역	0.0603(0.0329)	0.0683(0.0339)
-문제영역	0.0615(0.0331)	0.0758(0.0365)
-보기영역	0.0601(0.0585)	0.0547(0.0461)
문제-보기 전환횟수	8.45(5.91)	9.87(7.37)

주: 정답인 시행에 대한 각 지표의 기술통계량

<표 IV-7> 안구 운동 지표에 관한 혼합 모형

	효과(Effects)							
	(Intercept)		해결 전략 (모델 구성)		문제 유형(불일치)		응답시간(초)	
	Slope (SEM)	$t[z]$	Slope (SEM)	$t[z]$	Slope (SEM)	$t[z]$	Slope (SEM)	$t[z]$
응답시간(s)	2.79(0.08)	37.25	-0.26(0.13)	-1.98†				
평균 응시 시간(ms)								
전체영역	5.02(0.04)	114.55	0.19(0.07)	2.87**	0.02(0.02)	1.22	0.002(0.001)	1.83†
문제영역	5.08(0.04)	131.55	0.19(0.07)	2.74*				
보기영역	4.95(0.06)	81.52	0.16(0.09)	1.76†	0.08(0.02)	3.35**	0.003(0.002)	1.79†
단위 시간당(s) 응시율								
전체영역	4.72(0.13)	37.76	-0.62(0.22)	-2.856**	-0.14(0.05)	-2.53*		
문제영역	4.79(0.14)	34.57	-0.64(0.24)	-2.64*	-0.08(0.06)	-1.34		
보기영역	4.99(0.16)	31.52	-0.50(0.27)	-1.84†	-0.30(0.09)	-3.22**		
단위 면적당(px^2) 응시율								
전체영역	0.007(0.003)	2.93	-0.008(0.002)	-3.34**	0.003(0.002)	1.98*	0.003(0.0001)	30.60***
문제영역	0.01(0.004)	2.62	-0.005(0.005)	-0.95	0.01(0.003)	3.20**	0.003(0.0002)	14.19***
보기영역	-0.008(0.007)	-1.11	-0.02(0.008)	-2.12*	-0.01(0.004)	-2.99**	0.004(0.0003)	14.96***
전환횟수	1.57(0.09)	[16.94]	-0.44(0.12)	[-3.78]***	0.11(0.05)	[2.15]*	0.04(0.003)	[12.15]***

***$p<.001$. **$p<.01$. *$p<.05$. † $p<.10$. 정답인 시행에 대한 모형

근을 하는 경우에도 정답 보기의 확률실행식의 결과로 나오는 '재재종종종재재재'가 그대로 문제에서 세고자 하는 경우가 되지 않는다. '재재종종종재재재'와 같은 결과 집합의 원소와 'A, B, F, G, H를 재석이 C, D, E는 종국이가 나누어 갖는 경우' 와 같이 세고자하는 경우 사이에 일대일대응이 존재하는지를 확인해야 한다. A, B, C, D, E, F, G, H를 받을 사람을 차례로 재석, 재석, 종국, 종국, 종국, 재석, 재석, 재석으로 선택하는 경우를 A, B, F, G, H를 재석이 C, D, E는 종국이 나누어 갖는 경우와 대응시키기 위해서는 의미 구조의 변환이 필요하다. 따라서 불일치 유형의 문제를 이해하기 위해서는 의미구조의 변환 과정이 필요하기 때문에 학생들은 확률실행식을 더 오래보고, 문제영역과 보기영역 사이의 응시 전환을 더 많이 한 것으로 판단된다.

한편, 문제 영역에서의 평균 응시 시간이나 단위 시간당 응시율은 문제의 유형에 따른 유의미한 차이가 없었으나 문제 영역에서의 응시 횟수는 불일치 유형 문제에서 통계적으로 유의미하게 증가하였다. 문제 이해 과정에서 문제 영역의 응시 분포를 생각하면, 문제 영역의 응시횟수의 증가는 핵심정보에 대한 순환적인 재응시의 증가와 관계된다. 이러한 순환적 재응시는 모델 구성 접근에서는 문제 통합 단계, 보기 번역 접근에서는 보기와 문제를 비교하는 과정에서 나타난다. 따라서 불일치 유형에서는 학생들이 문제-상황 모델의 의미 구조를 핵심정보와 수학적 지식을 토대로 변환하여 수학적 모델을 구성할 때 핵심 정보를 더 자주 순환하며 응시하였고, 보기 번역 접근에서도 보기와 문제를 비교할 때, 문제의 핵심정보를 더 자주 보았다고 할 수 있다. 구조를 변환한다는 것은 결국 문제의 핵심 정보들 사이의 관계, 즉, 의미 구조를 바꾸는 것이다. 텍스트에서 정보들을 통합하거나 정보들 사이의 관계를 변환하는 인지 과정은 평균 응시 시간보다는 정보들을 순환하며 응시하는 횟수와 관계가 있는 것으로 판단된다. 이러한 결과는 산술문장제에서 문제 해결에 필요한 연산자와 문제에서 강조하는 단어의 의미가 서로 다를 때 핵심 정보들에 대한 응시 횟수가 증가한다는 선행연구의 결과와도 유사하다(Hegarty et al., 1992).

정리하면, 불일치유형의 문제를 풀 때 학생들은 문제의 핵심정보를 더 많이 응시하고, 확률실행식을 평균적으로 오래 응시하며, 문제와 보기 영역 사이의 응시 전환을 더 많이 한다. 이러한 안구 운동 지표는 서로 다른 의미 구조의 문제 사이의 변환이 학생에게 복잡한 인지처리를 요구하는 어려운 과정이라는 것을 의미한다. 따라서 적어도 문장제를 교과서에서 관련 공식을 정의하는 의미구조에 맞게 변환한 후 공식을 적용하는 전략을 사용하는 학생들에게는 불일치 유형의 문제가 일치 유형의 문제보다 더 어렵다. 이러한 결과는 Batanero et al.(1997)과 이지현 외(2005)의 연구에서 배치나 분할 유형의 문항 정답률이 선택 유형보다 낮았던 이유를 설명할 수 있다. 한편, 의미 구조에 따른 정답률 차이가 나타나지 않은 Roa(2000)의 연구결과는 연구참여자인 학부생들이 고급 이산수학을 학습하여 순열조합 기초 연산에 대한 배치, 분할 유형의 정의를 사용할 수 있을 정도로 능숙하여 문제 이해 과정에서 의미 구조의 변환을 할 필요가 없었거나 구조를 변환하는 전략을 사용했음에도 불구하고 단편적인 정답률 비교에서는 난이도 차이가 나타나지 않은 것으로 판단된다.

학생들은 일반적으로 한 가지 유형에 대해서만 공식을 적용할 수 있는 스키마를 가지고 있으며(이주영 외, 2006; Batanero et al., 1997; Roa, 2000), 본 연구의 안구 운동 분석 결과 의미 구조의 변환은 학생에게 어려운 과정이다. 따라서 이지현 외(2005), 이주영 외(2006)의 제안처럼 학생들에게 다양한 유형의 연산 정의와 문제를 제

시하여 선택, 배치, 분할에 대한 스키마를 모두 형성할 수 있도록 유도하고, 의미 구조가 다른 문항 사이의 구조적 동형을 탐구할 수 있는 경험을 제공할 필요가 있다.

본 연구는 문제 이해 과제에서의 안구 운동을 분석하였다. 따라서 문제의 의미론적 구조는 순열 조합 문제 해결에 있어서 계획 및 실행 단계가 아닌 이해 단계에 영향을 주는 난이도 변인임을 확인할 수 있었다. 이는 수학적 문제 해결에 있어서 학생들이 겪는 어려움의 원인이 주로 문제 이해와 관계된다는 것(Cummins et al., 1988)을 뒷받침한다.

과제 해결 전략의 유형은 연구참여자의 응시 분포, 응시 길이, 응시횟수 등 안구 운동 전반에 큰 영향을 주는 요인이었다. 실제로 통계적으로 각 안구운동 지표를 혼합모형으로 분석할 때 해결 전략은 대부분의 지표에 유의미한 영향을 주는 고정요인이었으며 이를 고정요인으로 포함시켰을 때 모형의 정확도가 상승하였다. 또한 학생들의 과제 해결 과정에 대한 정성적인 분석은 정량적 분석에서 나타나는 안구운동 지표를 의미있게 해석할 수 있는 기초를 제공하였다. 안구 운동 추적을 통해 문제 이해 또는 문제 해결 과정을 분석할 때 연구 참여자의 과제 해결 전략을 고려하는 것이 매우 중요한 것으로 판단된다.

V. 결론 및 제언

순열 조합은 타교과와 연계성이 높고, 확률적 사고의 기초가 되는 학교수학의 중요한 분야이다. 그럼에도 불구하고 순열 조합은 일반적으로 교사에게는 가르치기 어렵고, 학생에게는 학습하기 어려운 분야이다. 학생들은 특히 문제 이해에 많은 어려움을 겪는다(Batanero et al., 1997; Roa, 2000; 이지현 외, 2005).

이에 본 연구는 안구 운동 추적을 이용하여 순열조합 문장제 이해 과제를 해결하는 대학원생의 안구운동을 분석함으로써 기존의 선행연구와 다른 관점에서 교수-학습적 시사점을 얻고자 하였다. 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 안구 운동을 통해 연구 참여자의 과제 해결 전략을 문제의 핵심 정보로부터 내적인 정신모델을 구성하는 모델 구성 접근과 보기를 문제 상황과 비교하여 답을 찾는 보기 번역 접근으로 분류할 수 있었다. 모델 구성 접근 전략을 사용하는 학생들의 안구 운동 패턴은 Mayer (1992)와 English & Halford(1995)의 이론을 토대로 한 문장제 이해 모델로 설명 가능하였다. 모델 구성 접근 전략에서 나타난 안구 운동은 문장제의 이해가 문제-텍스트 모델, 문제-상황 모델을 기초로 핵심 정보와 수학적 스키마의 통합이 반복적으로 이루어지면서 수학적 모델을 정교화하는 과정임을 뒷받침하였다. 모델 구성 접근과 보기 번역 접근에서의 안구 운동의 정량적 비교에 있어서 가장 두드러진 특징은 문제영역에서의 응시 시간이다. 문제 통합 단계에서 수학적 모델을 구성하는 인지활동이 평균 응시 시간의 증가와 연관된다고 판단할 수 있다.

둘째, 전문가의 안구 운동으로부터 순열 조합 문장제를 바르게 이해하기 위해서는 복잡한 진술 속에서 대상의 구별성, 중복가능성, 의미 구조와 관련된 서술어 등의 핵심정보를 선별해내고 주의를 효율적으로 배분하는 것이 중요함을 추론할 수 있었다. 또한 확률실행식과 같은 정신모델이나 자신의 이해를 스스로 평가하고 반성할 수 있는 메타인지적 점검 전략을 사용할 수 있도록 지도할 필요성을 확인할 수 있었다.

셋째, 학생들은 의미 구조의 변환이 필요한 문제를 풀 때 핵심정보를 더 많이 응시하고, 보기의 확률실행식을 평균적으로 오래 응시하며, 문제와 보기 영역 사이의 응시 전환을 더 많이 하

였다. 이로 부터 서로 다른 의미 구조의 문제 사이의 변환이 학생에게 복잡한 인지처리를 요구하는 어려운 과정이라는 것을 확인할 수 있었다. 또한 의미구조의 변환과 같이 관계나 구조를 변환하는 인지활동은 안구 운동에서 응시 시간보다는 응시 횟수와 관계된다는 것을 추론할 수 있었다. 이지현 외(2005), 이주영 외(2006)의 제안처럼 학생들에게 다양한 유형의 연산 정의와 문제를 제시하여 선택, 배치, 분할에 대한 스키마를 모두 형성할 수 있도록 유도하고, 의미 구조가 다른 문항 사이의 구조적 동형을 탐구할 수 있는 경험을 제공할 필요가 있다.

넷째, 본 연구로부터 안구 운동 추적이 문제 해결 과정을 조사하는데 유의미한 데이터를 제공함을 확인할 수 있었다. 밀리초(ms) 단위로 기록된 시선 흐름에 대한 분석을 통해 학생들의 과제 해결 전략을 구분할 수 있었다. 또한 각종 안구운동 지표에 대한 통계적 분석을 통해 정답에 응답한 학생들 사이에서도 문제 변인에 따른 인지과정의 차이를 수치화할 수 있었다. 이는 안구 운동 추적을 이용하여 학습자의 인지 전략을 구분하고 문제의 난이도 변인을 조사할 수 있음을 의미한다.

그러나 안구운동 데이터만으로 연구참여자의 인지 처리 과정을 파악할 수는 없다(Holmqvist et al., 2011). 우리는 Mayer(1992)와 English & Halford(1995)의 문제 이해 모델, 인지신경과학에서의 안구 운동 지표에 대한 선행연구, 그리고 문제 자체의 수학적 구조 및 수학적 문제 해결 과정을 바탕으로 학생들의 안구운동으로부터 문제 이해 과정을 추론한 것이다. 안구운동 데이터 분석은 기존의 질적 분석을 보완하는 것일 뿐 완전히 대체하는 것이 아니며 해석의 주관성에 대한 비판으로부터 여전히 자유로울 수 없다.

Campbell(2010)은 신경과학 수학교육을 체화된 인지를 바탕으로 인지 신경과학과 수학교육이라는 거대한 두 연구 분야 사이의 거대한 갭(gap)을 줄여나가는 것이라고 정의하였다. 수학교육 연구자로서 우리는 인지 신경과학의 안구운동, 뇌파(EEG) 등에 대한 연구결과를 수학 교육 연구에 적용하고 활용하는 방안에 대한 연구를 할 필요가 있다. 표상이론이나 체화된 인지가 연구자들의 수학적 인지를 바라보는 시야를 확장하였듯이 인지 신경과학은 학생들의 인지 과정을 새로운 차원에서 관찰할 수 있는 기회를 제공할 것이다. 국외에서는 안구운동 추적기와 같은 신경과학 측정 도구를 이용한 수학교육 연구가 지속적으로 증가하고 있는 추세이지만(Andrá et al., 2015; Lin & Lin, 2014, Susac et al., 2014), 상대적으로 국내 연구는 부족한 실정이다. 따라서 국내에서도 신경과학 기반 수학교육에 관한 연구에 관심을 가질 것을 제안하는 바이다.

본 연구는 순열 조합 문장제의 이해를 선택형 과제를 이용하여 분석하였다는 제한점이 있다. 보기 번역 접근은 선택형 과제에서만 나타날 수 있는 전략이기 때문이다. 또한 정확한 안구 운동 측정을 위해 문장제를 확률실행식으로 변환하는 과제를 통해 문제 이해 과정을 간접적으로 분석했다는 한계점이 있다. 후속 연구에서 안구 운동 추적기와 펜태블릿을 결합한 환경을 설계, 개발하여 서술형 과제로 구성된 실험 자료를 통해 학생들의 안구 운동, 풀이 과정, 표상의 사용 등을 종합적으로 분석한다면, 학생들의 문제 해결 과정을 더욱 심층적으로 이해할 수 있을 것으로 기대된다. 또한 일반 학생이나 성취도가 낮은 학생의 안구 운동을 분석하여 본 연구에서 분석한 전문가의 안구 운동 패턴과 비교한다면, 더 많은 교수-학습적 시사점을 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

김선희 (2004). 수학 문장제 해결에 영향을 주는 언어적·인지적 요인 -혼합물 문제를 중심으로-. **수학교육학연구 14**(3), 267-281.

우정호 외 (2016). **고등학교 확률과 통계**. 서울: 동아출판.

이미진, 이광호 (2015). 시선 추적기를 통해 본, 4학년 학생들의 방정식에 대한 관계적 사고 형성. **학교수학 17**(3), 391-405.

이주영, 김서령, 박혜숙, 김완순 (2006). 조합문제 사이의 구조적 동형. **수학교육 45**(1), 123-138.

이지윤 (2015). **3D 입체 변별 과제에서 공간 인지 전략의 유형과 역할 : 체화된 3D 거북 표현식과 전략을 중심으로**. 박사학위논문, 서울대학교, 서울.

이지현, 이정연, 최영기 (2005). 순열 조합 문장제의 문제 변인과 오류 분석. **학교수학 7**(2), 123-137.

조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육. **수학교육 42**(2), 177-191.

조한혁, 송민호 (2014). 실행식 (Executable expression) 기반 SMART 스토리텔링 수학교육. **수학교육학연구 24**(2), 269-283.

Andrá, C., Lindström, P., Arzarello, F., Holmqvist, K., Robutti, O., & Sabena, C. (2015). Reading mathematics representations: An eye-tracking study. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 237-259.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*(2), 181-199.

Bates, D., Maechler, M., Bolker, B., Walker, S., Christensen, R. H. B., Singmann, H., ... & Rcpp, L. (2015). Package 'lme4'. *convergence, 12*, 1.

Campbell, S. R. (2010). Embodied minds and dancing brains: New opportunities for research in mathematics education. *In Theories of mathematics education* (pp. 309-331). Springer Berlin Heidelberg.

Clifton, C., Staub, A., & Rayner, K. (2007). Eye movements in reading words and sentences. *Eye movements: A window on mind and brain*, 341-372.

Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive psychology, 20*(4), 405-438.

Dambacher, M., & Kliegl, R. (2007). Synchronizing timelines: Relations between fixation durations and N400 amplitudes during sentence reading. *Brain research, 1155*, 147-162.

DeAngelus, M., & Pelz, J. B. (2009). Top-down control of eye movements: Yarbus revisited. *Visual Cognition, 17*(6-7), 790-811.

De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2010). Traveling down the road: from cognitive neuroscience to mathematics education… and back. *ZDM, 42*(6), 649-654.

Dubois, J. G. (1984). A Systematic Study of Simple Combinatorial Configurations. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 37-57.

Eizenberg, M. M., & Zaslavsky, O. (2004). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and learning, 6*(1), 15-36.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics, 22*(5), 451-474.

English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two-and three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 255-273.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education*. 고상숙, 고호경, 박만구, 이중권, 정인철, 황우형 역. 서울: 경문사.

Epelboim, J., & Suppes, P. (2001). A model of eye movements and visual working memory during problem solving in geometry. *Vision Research, 41*(12), 1561-1574.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5,* 193-198.

Gegenfurtner, A., Lehtinen, E., & Säljö, R. (2011). Expertise differences in the comprehension of visualizations: A meta-analysis of eye-tracking research in professional domains. *Educational Psychology Review, 23*(4), 523-552.

Goldberg, J. H., & Kotval, X. P. (1999). Computer interface evaluation using eye movements: methods and constructs. *International Journal of Industrial Ergonomics, 24*(6), 631-645.

Grant, E. R., & Spivey, M. J. (2003). Eye movements and problem solving guiding attention guides thought. *Psychological Science, 14*(5), 462-466.

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Green, C. E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from students' eye fixations. *Journal of Educational Psychology, 84*(1), 76.

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of educational psychology, 87*(1), 18.

Holmqvist, K., Nyström, M., Andersson, R., Dewhurst, R., Jarodzka, H., & Van de Weijer, J. (2011). *Eye tracking: A comprehensive guide to methods and measures*. OUP Oxford.

Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1980). A theory of reading: from eye fixations to comprehension. *Psychological review, 87*(4), 329.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 3*(1), 111-127.

Knoblich, G., Ohlsson, S., & Raney, G. E. (2001). An eye movement study of insight problem solving. *Memory & cognition, 29*(7), 1000-1009.

Kingsdorf, S., & Krawec, J. (2014). Error analysis of mathematical word problem solving across students with and without learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 29*(2), 66-74.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A paradigm for cognition*. 김지홍, 문선모 역. 경기도: 나남.

Lewis, A. B. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 81*(4), 521.

Lin, J. J. H., & Lin, S. S. (2014). Cognitive Load for Configuration Comprehension in Computer-Supported Geometry Problem Solving: AN Eye Movement Perspective. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*, 605-627.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.

Papert, S. (1980). Mindstorms: *Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books, Inc..

Polya, G. (1945). *How to solve it; a new aspect of mathematical method.* Princeton university press.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics, 30*(2), 2-7.

Rayner, K. (1998). Eye movements in reading and information processing: 20 years of research. *Psychological bulletin, 124*(3), 372.

R Core Team (2013). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL http://www.R-project.org/.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.* (Unpublished Doctoral dissertation). Universidad de Granada, Granada, Spain.

Snowden, R., Thompson, P., & Troscianko, T. (2012). *Basic vision: an introduction to visual perception*. 오성주 역. 서울: 학지사.

Susac, A., Bubic, A., Kaponja, J., Planinic, M., & Palmovic, M. (2014). Eye Movements Reveal Students' Strategies in Simple Equation Solving. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*, 555-577.

Thomas, L. E., & Lleras, A. (2007). Moving eyes and moving thought: On the spatial compatibility between eye movements and cognition. *Psychonomic bulletin & review, 14*(4), 663-668.

Van Dijk, T. A., & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

Yarbus, A. L. (1967). *Eye movements during perception of complex objects* (pp. 171-211). Springer US.

Eye Movements in Understanding Combinatorial Problems

Choi, In Yong (Hansung Science High School)
Cho, Han Hyuk (Seoul National University)

Combinatorics, the basis of probabilistic thinking, is an important area of mathematics and closely linked with other subjects such as informatics and STEAM areas. But combinatorics is one of the most difficult units in school mathematics for leaning and teaching. This study, using the designed combinatorial models and executable expression, aims to analyzes the eye movement of graduate students when they translate the written combinatorial problems to the corresponding executable expression, and examines not only the understanding process of the written combinatorial sentences but also the degree of difficulties depending on the combinatorial semantic structures. The result of the study shows that there are two types of solving process the participants take when they solve the problems : one is to choose the right executable expression by comparing the sentence and the executable expression frequently. The other approach is to find the corresponding executable expression after they derive the suitable mental model by translating the combinatorial sentence.

We found the cognitive processing patterns of the participants how they pay attention to words and numbers related to the essential informations hidden in the sentence. Also we found that the student's eyes rest upon the essential combinatorial sentences and executable expressions longer and they perform the complicated cognitive handling process such as comparing the written sentence with executable expressions when they try the problems whose meaning structure is rarely used in the school mathematics. The data of eye movement provide meaningful information for analyzing the cognitive process related to the solving process of the participants.

* Key Words : combinatorics(조합), word problem(문장제), executable expression(실행식), eye-tracking (안구 운동 추적)

논문접수 : 2016. 8. 9
논문수정 : 2016. 11. 11
심사완료 : 2016. 11. 11