Regular paper

Journal of the KIECS. pp. 81-86, vol. 11, no. 1, Jan. 31 2016, t. 69, pISSN 1975-8170 | eISSN 2288-2189
http://dx.doi.org/10.13067/JKIECS.2016.11.1.81

# Van der Pol 발진기에서의 미분방정식과 Fractional 미분방정식의 거동 비교 해석

배영철*

# Comparison Analysis of Behavior between Differential Equation and Fractional Differential Equation in the Van der Pol Equation

Young-Chul Bae*

요 약

300년 전에 발표한 fractional calculus의 개념인 fractional 미분 방정식을 제어공학, 수학, 물리학 등에 적용하고자 하는 노력이 지속되고 있다. 본 논문에서는 Van der Pol 방정식으로 표현되는 동적 방정식을 정수 차수와 실수 차수를 가진 fractional 차수로 표현하고 실수 차수의 값을 변화시켜 가면서 시계열 데이터와 위상공간으로 정수 차수와 실수 차수의 비교를 수행한다.

ABSTRACT

Three hundred years ago, the fractional differential equation that is one of concept of fractional calculus released. Now, many researchers continue to try best effort applying into the control engineering, mathematics and physics.

In this paper, the dynamics equation which is represented by Van der Pol, represent integer order and fractional order that having real order. Then this paper performs the comparisons between integer and real order as time series and phase portrait according to variation of parameter value for real order.

키워드

Fractional Order, Van Der Pol Equation, Limit Cycle Behavior, Time Series, Phase Portrait
분수 차수, 반데어폴 방정식, 리미트 사이클, 시계열, 위상 공간

## Ⅰ. 서 론

많은 연구자들은 지난 몇 십 년 동안 비선형 시스템에 대한 연구를 수행하고 있다왔다. 이중 카오스에 대한 연구는 물리학[1], 수학[2], 생물학[3], 공학[4-11, 20], 사회과학[12-20] 등에서 많은 발전된 연구가 있었다.

Van der Pol 발진기는 비선형 제동 현상을 가진 비보존 발진기[21]이다. 에너지는 높은 진폭에서 소산적이며(dissipative)이고 낮은 진폭들에서 생성된다. 그 결과 에너지 생성과 에너지 소산 균형 상태 부근에서 발진이 존재한다. 이 상태는 리미트 사이클로 알려진 발전 수렴을 향해 진행한다.

약 300년 전에 발표한 fractional calculus의 개념은 fractional 미분 방정식[22-23]으로 표현한다. 일반적으

* 교신저자 : 전남대학교 전기·전자통신·컴퓨터공학부
• 접 수 일 : 2015. 12. 23
• 수정완료일 : 2016. 01. 13
• 게재확정일 : 2016. 01. 24
• Received : Dec. 23, 2015, Revised : Jan. 13, 2016, Accepted : Jan. 24, 2016
• Corresponding author : Young-Chul Bae
Division of Electrical · Electronics Communication and Computer Engineering, Chonnam National University
Email : ycbae@jnu.ac.kr

로 미분방정식으로 표현하는 차수는 정수차원이지만 Fractional 미분 방정식의 차수는 실수차원으로 표현한다.

본 논문에서는 Van der Pol 방정식으로 표현되는 동적 방정식을 정수 차수와 실수 차수를 가진 fractional 차수로 표현하고 실수 차수의 값을 변화시켜 가면서 시계열 데이터와 위상공간으로 정수 차수와 실수 차수의 비교를 수행한다.

## II. Van der Pol 방정식

일반적으로 Van der Pol 발진기는 식(1)과 같이 표현하거니 등가적으로 식(2)과 같이 표현한다.

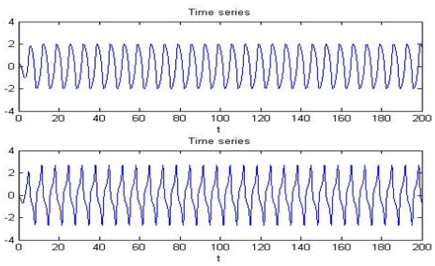
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+u(1-x(t)^2)\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=0 \quad (1)$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=y-F(x)=y-u(\frac{x^3}{3}-x) \quad (2)$$
$$\frac{dy(t)}{dt}=-x$$

식(1)과 식(2)는 우리가 알고 있는 비보존 시스템과는 다르다. 이는 $u=0$ 일 때를 제외하고 크기를 보존하지 않는다. 만약 $u=0$ 라면 식(1)과 식(2) 방정식은 식(3)과 같이 표현되는 간단한 조화발진이며 보전시스템이 된다.

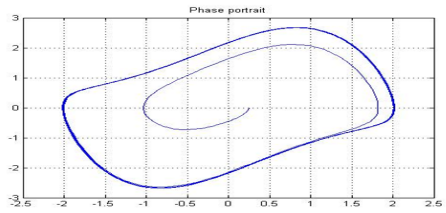
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t)=0 \quad (3)$$

식(1)과 식(2)에서 $u=1$ 라 놓으면 그림 1과 같이 시계열과 리미트 사이클이라 부르는 위상공간을 얻는다.




(a) 시계열 데이터

(a) Time series




(b) 위상 공간

(b) Phase portrait

그림 1. Van der Pol 발진기에서 시계열(a)과 위상공간(b)

Fig. 1 Time series(a) and phase portrait(b) in Van der Pol equation

## III. Fractional Van der Pol 발진기

본 논문에서는 Van der Pol 발진기를 변형한 실수 차수의 fractional Van der Pol 발진기를 식(4)과 같이 표시한다.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+u(1-x(t)^2)\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}+x(t)=0 \quad (4)$$

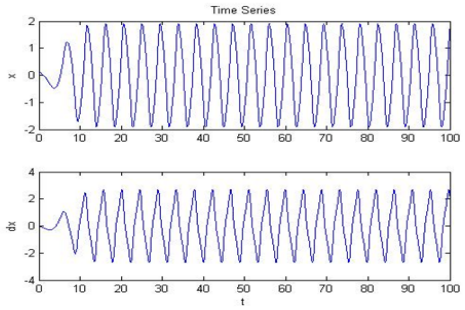
식(4)에서 $c\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$ 와 같이 표시되는 fractional 미분방정식의 해는 Riemann과 Liouville[22]에 의하여 식(5)과 같이 주어진다.

$${}_a^G D_t^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_0^t\frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (5)$$

식(4)을 풀기 위하여 식(5)의 방정식을 이용하고 파라미터 $u=1$ 로 정하고 $\alpha$값을 변화시켰을 때 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

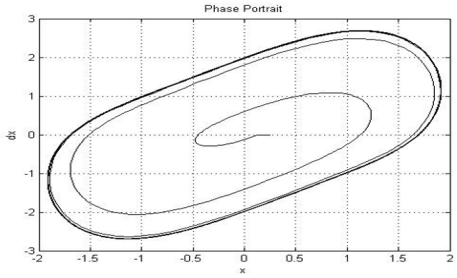
### 2.1 $\alpha=0.7$ 일 때

식(4)에서 $\alpha=0.7$ 일 때의 시계열데이터와 위상공간은 그림 2와 같은 리미트 사이클을 가짐을 알 수 있다. 그림 2와 같은 리미트 사이클은 타원형의 모습을 가지고 있음을 알 수 있다.




(a) 시계열 데이터

(a) Time series




(b) 위상 공간

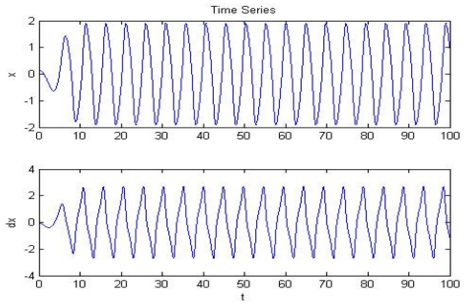
(b) Phase portrait

그림 2. $\alpha = 0.7$ 일 때 시계열과 위상공간

Fig. 2 Time series and phase portrait when $\alpha = 0.7$

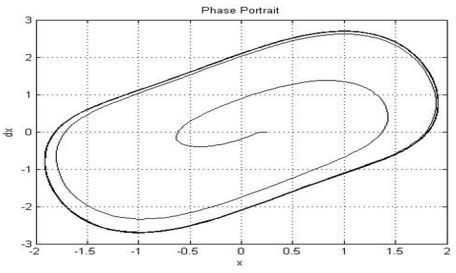
### 2.2 $\alpha = 0.8$ 일 때

식(2)에서 $\alpha = 0.8$ 일 때의 시계열데이터와 위상공간은 그림 3과 같다.




(a) 시계열 데이터

(a) Time series




(b) 위상 공간

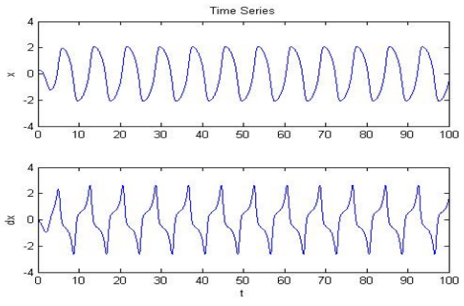
(b) Phase portrait

그림 3. $\alpha = 0.8$ 일 때 시계열과 위상공간

Fig. 3 Time series and phase portrait when $\alpha = 0.8$

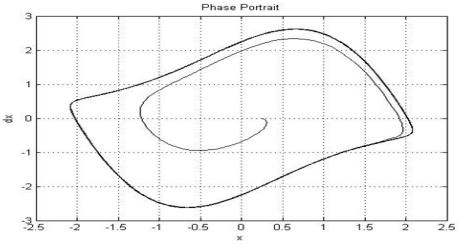
### 2.3 $\alpha = 1.1$ 일 때

식(2)에서 $\alpha = 1.1$ 일 때의 시계열데이터와 위상공간은 그림 3과 같다. 그림 3을 통하여 $\alpha = 1.0$ 를 넘어서면 리미트 사이클의 형태가 달라짐을 확인 할 수 있다.




(a) 시계열 데이터

(a) Time series




(b) 위상 공간

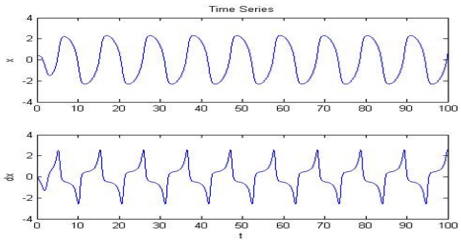
(b) Phase portrait

그림 4. $\alpha = 1.1$ 일 때 시계열과 위상공간

Fig. 4 Time series and phase portrait when $\alpha = 1.1$

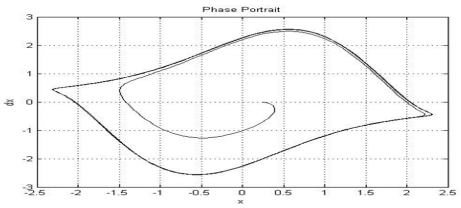
### 2.4. $\alpha = 1.2$ 일 때

식(2)에서 $\alpha = 1.2$ 일 때의 시계열데이터와 위상공간은 그림 4와 같다. 그림 4의 리미트 사이클은 그림 1의 원래의 Van der Pol 리미트 사이클과 많이 달라진 모습을 가지고 있음을 알 수 있다.




(a) 시계열 데이터

(a) Time series




(b) 위상 공간

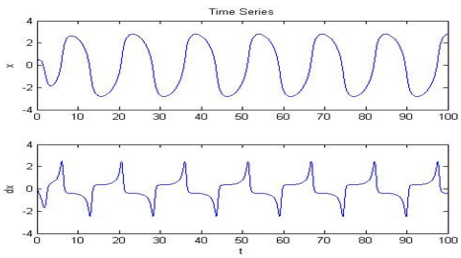
(b) Phase portrait

그림 5. $\alpha = 1.2$ 일 때 시계열과 위상공간

Fig. 5 Time series and phase portrait when $\alpha = 1.2$

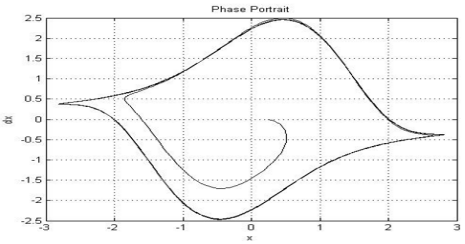
### 2.5. $\alpha = 1.3$ 일 때

식(2)에서 $\alpha = 1.3$ 일 때의 시계열데이터와 위상공간은 그림 5와 같다. 그림 5의 리미트 사이클은 그림 4와 마찬가지로 그림 1의 원래의 Van der Pol 리미트 사이클과 많이 달라진 모습을 가지고 있음을 알 수 있다.




(a) 시계열 데이터

(a) Time series




(b) 위상 공간

(b) Phase portrait

그림 6. $\alpha = 1.3$ 일 때 시계열과 위상공간

Fig. 6 Time series and phase portrait when $\alpha = 1.3$

지금까지 Van Der Pol 발진기에서 미분 방정식으로 표현하는 해와 Fractional 미분 방정식으로 표현하는 해를 시계열데이터와 위상공간을 이용하여 비교하여 살펴보았다.

Fractional 미분 방정식으로 표현하는 Van der Pol 발진기에서 $\alpha$값의 변화에 따라 서로 다른 리미트 사이클의 형태를 가지고 있음을 확인하였다.

## Ⅳ. 결론

본 논문에서는 Van Der Pol 발진기에서 정수차수를 가지는 미분 방정식으로 표현되는 동적 방정식과 실수 차수를 가진 fractional 미분 방정식으로 각각 나타내고 fractional 미분 방정식으로 표현되는 Van der Pol 발진기에서 $\alpha$값의 파라미터를 변화시켜 가면서 시계열 데이터와 위상공간으로 정수 차수와 실수 차수의 비교를 수행하였다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과 파라미터 $\alpha$의 값이 1을 기준으로 1보다 적을 때와 1보다 클 때의 리미트 사이클이 서로 다르게 변화하고 있음을 알 수 있다.

앞으로 이를 이용한 카오스 제어, 카오스 동기화 기법 등의 적용이 과제로 남는다.

## Reference


[1] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.

[2] J. K. Hale, *Oscillations in Nonlinear Systems.* New York: McGraw-Hill, 1963.

[3] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* New York: Springer, 1983.

[4] Y. Bae, J. Kim, Y. Kim, and Y, Shon, "Secure Communication using Embedding Drive Synchronization," *J. of Korean Institute of Intelligent Systems,* vol. 24, no. 6, Dec. 2014, pp. 615-621.

[5] S. Yu, C. Hyun, and M. Park, " Backstepping Control and Synchronization for 4-D Lorenz-Stenflo Chaotic System with Single Input," *Int. J. of Fuzzy Logic and Intelligent Systems,* vol. 11, no. 3, 2011, pp. 143-148.

[6] S. Yu, C. Hyun, and M. Park, "Control and Synchronization of New Hyperchaotic System using Active Backstepping Design," *Int. J. of Fuzzy Logic and Intelligent Systems,* vol. 11, no. 2, 2011, pp. 77-83.

[7] Y. Bae, "Diagnosis of power supply by analysis of chaotic nonlinear dynamics," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences,* vol. 8, no. 1, 2013, pp. 113-119.

[8] Y. Bae, "Chaotic Phenomena in MEMS with Duffing Equation," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences,* vol. 6, no. 6, 2011, pp. 709-716.

[9] Y. Bae and J. Park "A Study on Obstacle Avoid Method and Synchronization of multi chaotic robot for Robot Formation Control based on Chaotic Theory," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences,* vol. 5, no. 5, 2010, pp. 534-540.

[10] Y. Bae, "A study on chaotic phenomenon in rolling mill bearing," *J. of Korean Institute of Intelligent Systems,* vol. 11, no. 4, Aug. 2001, pp. 315-319.

[11] Y. Bae, J. Kim, Y. Kim, and Y. Shon, "Secure communication using embedding drive synchronization," *J. of Korean Institute of Intelligent Systems*, vol. 13, no. 3, June 2003, pp. 310-315.

[12] Y. Bae, "Chaotic Phenomena in Addiction Model for Digital Leisure," *Int. J. of Fuzzy Logic and Intelligent Systems* vol. 13, no. 4, Dec. 2013, pp. 291-297.

[13] S. Metin and N. S. Sengor, "Dynamical system approach in modeling addiction," In *Int. Conf. of Brain Inspired Cognitive Systems,* Madrid, Spain, July 2010.

[14] M. Kim and Y. Bae, "Mathematical Modelling and Chaotic Behavior Analysis of Cyber Addiction," *J. of Korean Institute of Intelligent Systems,* vol. 24, no. 3, June 2014, pp. 245-250.

[15] Y. Bae, " Synchronization of Dynamical Happiness Model," *Int. J. of Fuzzy Logic and Intelligent Systems,* vol. 13, no. 4, 2013, pp. 291-297.

[16] S. Kim, S. Choi, Y. Bae, and Y. Park, "Mathematical Modelling of Happiness and its Nonlinear Analysis," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 9, no. 6, 2014, pp. 711-717.

[17] Y. Bae, "Mathematical Modelling of Love and its Nonlinear," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Science*, vol. 9, no. 11, pp. 1297-1303, 2014.

[18] Y. Bae, "Mathematical Modelling and Behavior Analysis of Addiction of Physical Exercise," *J. of Korean Institute of Intelligent Systems,* vol. 24, no. 6, Dec. 2014, pp. 615-621.

[19] Y. Bae, "Chaotic Dynamics in Tobacco's Addiction Model," *Int. J. of Fuzzy Logic and Intelligent Systems,* vol. 14, no. 4, 2014, pp. 322-331.

[20] F. C. Moon, *Chaotic Vibrations.* New York: Wiley, 1987.

[21] Y. H. Ku and X. Sun, "Chaos in Van der Pol's

equation," *J. of the Franklin Institute,* vol. 327, no. 2, 1990, pp. 197-207.

[22] R. Magaña. A, Hermosillo, and M. Pérez "Fractional Numerical Methods in Geotechnics, 8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8)," *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008),* Venice, Italy, June 30 – July 5, 2008.

[23] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations.* New York: Spriger, 2004.

## 저자 소개

**배영철(Young-Chul Bae)**

1984년 광운대학교 전기공학과 (공학사)
1986년 광운대학교대학원 전기공학과 (공학석사)
1997년 광운대학교대학원 전기공학과(공학박사)
1986년～1991년 한국전력공사
1991년～1997년 산업기술정보원 책임연구원
1997년～현재 전남대학교 전기・전자통신・컴퓨터공학부 교수
2002년～2002년 Brigham Young University 방문교수
2011년～2011년 University of Utah 방문교수
※ 관심분야 : Chaos Control and Chaos Robot, Robot control etc.