韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2016.30.4.469
제 30집 제 4호, 2016. 11. 469-497

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 30, No. 4, Nov. 2016. 469-497

삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대한 학습 자료 개발

신 현 용 (한국교원대학교)
한 인 기 (경상대학교)†

본 연구에서는 추상대수학의 체, 벡터공간, 최소다항식 등의 개념을 중심으로 삼차방정식 해의 작도(불)가능성을 학습할 수 있는 학습 자료와 초등수학적 접근을 구현한 학습 자료를 각각 개발하였다. 그리고 개발된 자료들에 대해 타당성, 학습 가능성, 장점 및 단점을 실험적으로 확인하였다. 본 연구에서 개발된 자료들은 중등학교의 수학 우수학생들, 수학을 배우는 대학생들, 수학교사들에게 유익할 것으로 기대되며, 3대 작도불능문제의 해결, 다양한 3차방정식의 해의 작도(불)가능성을 학습하는데 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅰ. 서론

수학의 역사에서 가장 오래된 수학 영역이 대수학과 기하학일 것이다. 수학 역사의 초창기부터 대수학과 기하학은 서로 밀접하게 관련을 맺으면서 역동적으로 발전해 왔다. 피타고라스는 만물의 근원을 수라고 규정짓고, 세계의 모든 대상들을 수로 파악하고 이해하려고 시도했다. 그러나 정사각형의 대각선이 수(그 당시의 수는 유리수를 의미함)로 표현되지 않는다는 것이 밝혀지게 된다. 이로 인해 수학적 연구의 대상이 수로부터 기하학적 대상인 선분, 도형으로 옮겨가게 된다. 그 결과 유명한 유클리드 원론이 기하학적으로 기술되었으며, 데카르트가 기하학을 체계적으로 대수화하여 해석기하학을 발명할 때까지 수학의 무게중심은 기하학에 놓이게 된다. 그러나 데카르트 이후에 대수적 개념과 방법들이 강력한 문제해결의 도구라는 인식이 확산되면서 기하학화된 수학은 대수학과 다시 결합된다. 이와 같은 대수학과 기하학의 역동성이 수학 발전의 중요한 원동력이 되었음은 의심할 수 없는 사실일 것이다.

수학사에서 대수학과 기하학의 역동적 결합을 볼 수 있는 대표적인 예들 중의 하나가 방정식이다. 방정식은 주변 현상들의 양적인 관계를 표현하는 수학적 도구로 인식되어 왔으며, 기원전의 바빌로니아 점토판에도 다양한 방정식들이 기록되어 있다. 그리고 서양의 유클리드 원론, 동양의 구장산술에도 다양한 방정식들이 소개되어 있으며, 최근에는 앤드류 와일스가 '$n \geq 3$에 대해 방정식 $x^n + y^n = z^n$은 정수해를 가지지 않는다'는 페르마 정리를 증명하면서 수학사에 큰 획을 긋기도 하였다. 특히 페르마 정리가 타원곡선론과 같은 새로운 연구를 촉발시켰으며, 오차다항식의 근의 공식에 관한 문제가 갈루아 이론으로 대표되는 '추상대수학(Abstract Algebra)'을 낳았다는 것은 방정식이 수학사에서 얼마나 큰 역할을 해 왔는가를 간접적으로 보여준다고 할 수 있다.

수학에서 대수적인 방정식은 기하학적으로 해석되어 표현되고, 기하학적 관계는 대수적으로 탐구되면서 많은 미해결 문제들이 해결되기도 하였다. 특히 수학사에서 유명한 3대 작도불능문제는 처음에는 자와 컴퍼스를 가지

* 접수일(2016년 10월 5일), 심사(수정)일(2016년 10월 18일), 게재확정일(2016년 10월 19일)
* ZDM분류 : U15
* MSC2000분류 : 97U99
* 주제어 : 삼차방정식의 해, 작도문제, 작도불능, 3대 작도불능문제
† 교신저자 : inkiski@gnu.ac.kr

고 직접적인 작도방법을 찾으려고 시도했지만, 이러한 시도는 성공하지 못하고 오랫동안 미해결 문제로 남겨졌다. 후에 이 작도문제들을 방정식의 풀이 문제로 변환시켰으며, 대수학적인 개념들을 이용하여 그 작도불가능성이 증명되었다. 3대 작도불능문제는 수학 발전의 생생한 역사의 한 단면을 담고 있다고 해도 과언이 아닐 것이다.

3대 작도불능문제는 주로 대학교 3학년에서 배우는 추상대수학의 체론 분야에서 다루어진다. 각의 3등분선 작도문제와 배적문제는 삼차방정식의 해와 관련되며, 원적문제는 초월수 π의 성질에 관련된다. 이때 대부분의 추상대수학 교재에서는 체, 벡터공간, 최소다항식 등의 개념을 바탕으로 3대 작도불능문제를 해결한다.

본 연구는 '3대 작도불능문제의 해결을 다른 방법으로 할 수는 없을까'라는 의문에서 출발하였다. 기존의 증명 방법과는 다른 접근 방법을 연구하였는데, 러시아에서 출판된 문헌(Argunov & Balk, 1957)에서 배적문제와 각의 3등분선 작도문제에 대해 초등수학적 접근이라고 볼 수 있는(추상대수학에서 다루는 접근 방법을 고등수학적 접근이라고 한다면) 그러한 방법을 찾았다. 이 방법은 삼차방정식의 해의 작도(불)가능성에 대한 흥미로운 접근을 포함하고 있었으며, 각의 3등분선 작도문제와 배적문제의 해결에서 실질적으로 기존의 방법과는 차별되는 방법이었다.

본 연구에서는 추상대수학의 체, 벡터공간, 최소다항식 등의 개념을 중심으로 삼차방정식 해의 작도(불)가능성을 학습할 수 있는 학습 자료와 Argunov & Balk의 연구에 제시된 삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대한 방법을 수정, 보완하여 재구성한 학습 자료를 개발하며, 이들 학습 자료의 타당성, 학습 가능성, 장점 및 단점을 실험적으로 확인하였다. 본 연구에서 개발된 자료들은 중등학교의 수학 우수학생들, 수학 관련 학과의 대학생들, 수학교사들이 3대 작도불능문제 및 삼차방정식 해의 작도(불)가능성을 학습하고 탐구하는데 체계적인 학습 자료로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 작도문제

작도문제는 수학의 발전과 맥을 같이 해왔다고 해도 과언은 아닐 것이다. 실수 개념이 완성되기 전까지 수학적 탐구의 대상은 선분, 넓이 등과 같은 기하학적 개념이었으며, 이때의 수학은 기하학화된 수학이었다. 기하학화된 수학의 전형적인 모범을 유클리드의 원론에서 찾아볼 수 있다.

유클리드 원론의 1권은 정의, 공준, 공리로 시작된다. 1권에는 23개의 수학적 개념들이 정의되어 있는데, 이들은 점, 선, 직선, 표면, 평면각, 직교, 예각, 둔각, 원, 지름, 반원 등과 같이 모두 기하학적 개념들이며, 5개의 공준도 기하학에 관련된 것이다. 공준 중에서 처음 세 개는 작도와 관련된 것이며, 네 번째 것은 모든 직각이 서로 같다는 것이고, 다섯 번째 것은 유명한 평행선 공준이다. 작도에 관련된 세 개의 공준은 다음과 같다(Heath, 1908. p.154): 공준1. 임의의 한 점에서 다른 임의의 점으로 직선을 작도하기(to draw a straight line from any point to any point); 공준2. 직선에서 유한 직선을 연속적으로 연장하기(to produce a finite straight line continuously in a straight line); 공준3. 중심과 거리를 가지는 원을 작도하기(to describe a circle with any center and distance).

공준1과 공준2는 작도에서 직선의 역할을 규정하며, 공준3은 컴퍼스의 역할을 규정한다. 유클리드 원론에서는 이들을 공준으로 삼아서 원론 13권 전체의 문제해결의 도구로 삼았기 때문에, 자와 컴퍼스를 유클리드적 도구라고 부른다. 유클리드 원론에는 다양한 작도문제들이 포함되어 있으며, 공교롭게도 유클리드 원론의 1권 첫 번째 명제가 '주어진 유한 직선에 등변삼각형을 작도'하는 것이다.

유클리드 원론에는 여러 다각형을 작도하는 문제들뿐만 아니라 직선, 선분, 원, 다면체를 작도하는 다양한 문제들이 포함되어 있다. 그리고 정수론이나 대수 분야의 많은 문제들도 기하학적으로(선분이나 도형을 이용하여 기술됨) 기술되었거나 작도문제의 형태로 해결되어 있다. 예를 들어, 소수가 무한히 많다는 정수론의 문제는 유클리드 원론 9권의 명제20에 '소수들을 몇 개를 주든, 그보다 더 많은 소수들이 있다'로 기술되어 있으며(한인기, 2003, p.112), 이 명제는 유한개의 소수인 선분이 주어졌을 때에 다른 소수인 선분을 작도하는 작도문제로 모습을 바꾸어 증명되었다.

유클리드 원론에서는 자와 컴퍼스를 이용하여 작도문제를 해결하였지만, 후에 많은 수학자들에 의해 작도의 도구들에 대한 다양한 시도가 있었다. 모어, 마스케로니는 다른 시대에 살았으며, 컴퍼스만을 이용한 작도문제의 해결을 각각 시도하였다. 모어와 마스케로니의 이러한 접근은 '컴퍼스와 자를 이용하여 해결할 수 있는 유한개의 점들의 도형을 작도하는 기하학 문제들을 컴퍼스만으로 해결할 수 있다'는 모어-마스케로니의 정리로 유명하다.

모어와 마스케로니가 사용한 컴퍼스만으로는 직선조차 작도할 수 없다. 그러나 모어와 마스케로니는 기하학적 작도문제를 유한개의 점들을 작도하는 문제로 바꾸었다. 즉 직선을 작도하는 것은 직선에 속하는 두 점을 작도하는 것으로 바꾸어 해결하였다. 그러므로 모어와 마스케로니의 접근에서는 작도문제는 점들을 작도하는 문제가 된다. 실제로 유클리드의 공준1, 공준2, 공준3을 점을 작도하는 문제로 바꿀 수 있다. 유클리드의 공준1과 공준2는 '두 점(또는 선분)이 주어진 경우에, 이 두 점(또는 선분)을 지나는 직선에 속하는 두 점을 작도하기'로 바꿀 수 있다. 공준3은 모어와 마스케로니가 컴퍼스를 이용하였으므로, 작도가능하게 된다.

Argunov & Balk(1957, pp.232-233)는 자와 컴퍼스를 이용한 작도에서 점들이 다음의 7가지 경우에서 얻어진다고 하였다: ① 알려진(이미 작도된) 두 직선의 교점 작도; ② 작도된 원과 알려진(이미 작도된) 직선의 교점 작도; ③ 작도된 두 원의 교점 작도; ④ 알려진(이미 작도된) 직선(또는 반직선 또는 선분)에 속하는 유한개의 점의 작도; ⑤ 작도된 원(또는 호)에 속하는 유한개의 점의 작도; ⑥ 작도된 원들과 알려진(이미 작도된) 직선들의 작도된 유한개의 점들의 합집합에 속하지 않는 점의 작도.

결국 모어-마스케로니의 정리에서는 이러한 7가지 경우에 대해 컴퍼스만을 이용하여 점들을 작도할 수 있다는 것을 말하고 있는 것이다.

한편 작도문제에 대한 다른 접근은 슈타이너(Jakob Steiner, 1796-1863)의 '직선자와 부동원을 이용한 기하학적 작도'라는 연구에서 찾아볼 수 있다. 슈타이너가 이용한 자는 한 면만을 이용해서 직선을 그을 수 있는 자이며, 부동원은 중심이 알려져 있는 원이다. 슈타이너(1939, p.13)는 '만약 평면에 보조적인 부동원이 주어진다면, 모든 작도가 자만을 이용하여 수행될 수 있다'고 하였다. 그리고 그는 이 책에 임의의 점을 지나 주어진 직선에 평행한 직선 작도하기; 직선에 선분이 주어진 경우에 이 선분의 유리수 배를 작도하기, 주어진 점을 지나 주어진 직선에 직교하는 직선을 작도하기, 주어진 점을 지나 주어진 직선과 주어진 크기의 각을 이루는 직선을 작도하기, 주어진 각을 이등분하기 등의 작도문제에 대한 풀이를 실제로 제시하였다. 모어-마스케로니 정리에 관련된 구체적인 문제해결의 예는 한인기(2003)에 제시되어 있다.

이밖에도 양면자를 이용한 작도, 직각을 이용한 작도문제들이 연구되었으며, 단면자를 이용한 작도, 양면자를 이용한 작도, 직각을 이용한 작도문제의 해결의 몇몇 예들이 프라소로프(2009, pp.279-282)에 제시되어 있다.

살펴본 바와 같이, 작도문제의 탐구의 역사는 아주 오래되었으며, 다양한 작도의 도구들이 사용되었다. 본 연구에서는 자와 컴퍼스를 사용한 일반적인 작도문제의 해결을 대상으로 하며, '작도하여라'는 '자와 컴퍼스를 이용하여 작도하여라'는 것을 의미한다.

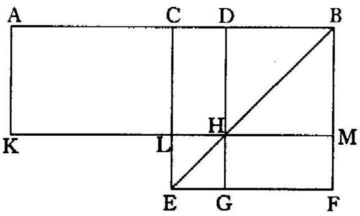
2. 유클리드 원론에서 이차방정식 근[2]의 작도

2) 여기서는 '방정식의 근/방정식의 해', '다항식의 근/다항식의 해'라는 표현을 엄밀히 구분하지 않고 문맥에 따라 사용했음.

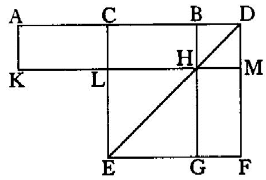
유클리드 원론에는 이차방정식의 근의 작도에 관련된 명제들이 있다. 유클리드 원론 제2권의 명제 5와 명제 6은 다음과 같다.

명제 5. 직선을 길이가 같도록 두 토막을 내 보고, 또 어떤 점을 잡아서 길이가 다르도록 두 토막을 내 보자. 그러면 길이가 다른 두 토막을 가지고 만든 직사각형에다 자른 점들 사이의 직선을 가지고 만든 정사각형을 더하면, 그것은 전체 길이의 절반을 가지고 만든 정사각형과 넓이가 같다. (유클리드, 1998, p.75)

명제 6. 어떤 직선을 등분한 다음, 거기에다 다른 어떤 직선을 한 줄이 되도록 붙여라. 그러면 직선 전체와 붙인 직선을 가지고 만든 직사각형에다 반토막을 가지고 만든 정사각형을 더하면, 그것은 반토막에다 직선을 붙인 것을 가지고 만든 정사각형과 넓이가 같다. (유클리드, 1998, p.76)



[그림 II-1] 명제 5



[그림 II-2] 명제 6

명제 5을 도형으로 나타내면 [그림 Ⅱ-1]과 같고(유클리드, 1998, p.75)와 명제 6은 [그림 Ⅱ-2]와 같다(유클리드, 1998, p.77). 유클리드 원론의 해설서(유클리드, 토마스 히드, 1998)에 의하면, [그림 Ⅱ-1]에서 $\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{DB}}=x$라 하고 도형 CLHGFB의 넓이를 b^2이라 하면 이차방정식 $ax-x^2=b^2$이 얻어진다. 그리고 [그림 Ⅱ-2]에서 $\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{BD}}=x$라 하고 정사각형 CEFD의 넓이를 b^2이라 하면, 이차방정식 $ax+x^2=b^2$이 얻어진다.

즉 유클리드 원론에서는 이차방정식 $ax-x^2=b^2$, $ax+x^2=b^2$의 근들을 대수적으로 해결하지 않았고, 기하학적으로 정사각형과 직사각형, 도형의 넓이의 개념을 이용하여 해결하였으며, 방정식의 해도 수의 형태가 아닌 선분의 형태로 제시하였다. 이렇게 기하학적으로 방정식을 해결한 것은 그 당시에 일부 무리수에 대해서는 알려졌지만, 무리수 집합의 성질에 대해서는 체계적으로 정리되지 못했던 것에서 그 원인을 찾을 수 있다.

일차방정식의 근은 비례하는 선분들의 작도를 통해 작도할 수 있다는 것을 감안하면, 유클리드가 활동했던 고대 그리스 시대에 일차방정식과 이차방정식의 일반적인 경우에 대한 해법이 알려져 있었다는 것을 알 수 있다. 특히 이 방정식들의 근은 자와 컴퍼스를 이용하여 작도가능하다. 그러나 작도의 방법을 이용한 삼차방정식의 해법은 난관에 봉착하며, 이러한 시도는 수학사에서 유명한 3대 작도불능문제로 연결된다.

3. 작도불능문제

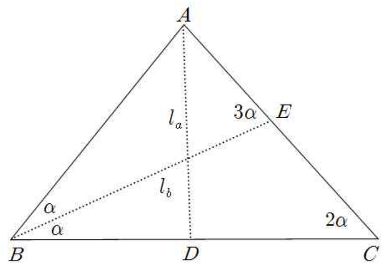
자와 컴퍼스를 이용하여 작도할 수 없는 선분이나 도형들은 다양하다. 수학사에서 대표적으로 잘 알려진 작도불능문제는 첫째, 배적문제로 주어진 정육면체 부피의 두 배를 가지는 정육면체를 작도하는 문제이며, 두 번째는 각의 3등분 문제이다. 90°와 같이 특별한 경우에 대해서는 3등분선을 작도할 수 있지만(직각을 작도한 후에 직각의 꼭짓점을 한 꼭짓점으로 하며, 직각의 한 변을 한 변으로 하는 정삼각형을 작도하면 직각의 3등분인 30°

를 작도할 수 있음), 3등분선을 작도할 수 없는 각들이 존재한다(예를 들어, 60°의 3등분선은 작도할 수 없음). 세 번째는 원적문제로 원과 넓이가 같은 정사각형을 작도하는 문제이다. 이 세 가지 작도불능문제를 흔히 3대 작도불능문제라고 부른다.

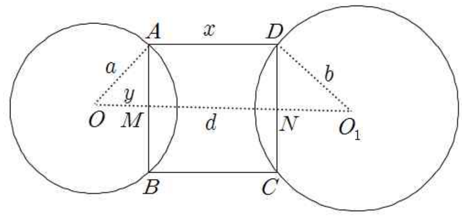
수학사에서 3대 작도불능문제를 해결하기 위한 많은 시도들이 있었다. 예를 들어, 기원전 4세기경의 메나에크무스는 배적문제를 포물선과 쌍곡선을 이용하여 해결하였고, 기원전 5세기경의 히피아스는 각의 3등분문제를 초월곡선인 원적곡선(quadratrix)를 이용해 해결하였으며, 기원전 5세기경의 아르키타스는 배적문제를 원기둥, 직원뿔, 원환체(torus) 등의 입체의 성질과 관련하여 연구하였다(한인기, 2003). 그러나 3대 작도불능문제를 해결하기 위한 기하학적 시도는 실패로 돌아갔고, 결국 1700년대 이후에 이들 작도문제를 대수학의 개념들을 이용하여 작도가 불가능함이 증명되었다.

그 후에 작도불가능성 문제에 대해 수학자들이 관심을 가지고 해결하려 시도하였다. 본 연구에서는 삼차방정식과 사차방정식에서 그 해가 작도불가능한 경우에 대해 살펴보자(3대 작도불능문제에 대해서는 본 연구의 4장에서 자세히 다루었음).

Kushnir(2013, pp.503-504)는 삼차방정식의 해의 작도불가능성으로 귀착되는 작도문제인 '이등변삼각형의 꼭지각과 한 밑각 각각의 이등분선이 주어진 경우에, 이 이등변삼각형을 작도할 수 없다'는 것을 소개하였다. Kushnir의 증명 아이디어를 중심으로 이등변삼각형의 작도불능을 살펴보자. 이등변삼각형 ABC에서 꼭지각 A의 이등분선 $\mathrm{AD}=l_a$와 밑각 B의 이등분선 $\mathrm{BE}=l_b$가 주어졌다고 하자([그림 Ⅱ-3]). $\overline{\mathrm{AB}}=c$이고 $\angle\mathrm{ABE}=\alpha$라고 하면, $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=2\alpha$이고 $\angle\mathrm{BEA}=3\alpha$, $\angle\mathrm{BAE}=180^\circ-4\alpha$이다.



[그림 Ⅱ-3]



[그림 Ⅱ-4]

삼각형 ABE에서 $\dfrac{l_b}{\sin(180^\circ-4\alpha)}=\dfrac{c}{\sin3\alpha}$이고 삼각형 ABD에서 $\sin2\alpha=\dfrac{l_a}{c}$이다. 이들을 연립하면 $\dfrac{l_b}{\sin4\alpha}=\dfrac{l_a}{\sin2\alpha\cdot\sin3\alpha}$, $\dfrac{l_b}{l_a}=\dfrac{2\cos2\alpha}{\sin3\alpha}$이 얻어진다. 이제 $l_b=4l_a$인 경우를 생각하면, $2\sin3\alpha=\cos2\alpha$가 되며, $6\sin\alpha-8\sin^3\alpha=1-2\sin^2\alpha$, $8\sin^3\alpha-2\sin^2\alpha-6\sin\alpha+1=0$이 성립함을 알 수 있다.

여기서 $\sin\alpha=x$라 놓으면, 삼차방정식 $8x^3-2x^2-6x+1=0$이 얻어지며, 이 방정식은 유리수인 근이 존재하지 않는다. 결국 이등변삼각형 ABC는 작도불가능하다는 결론을 얻을 수 있다.

한편 Aleksandrov(2004, p.119)는 사차방정식의 해의 작도문제인 '꼭짓점 A, B가 주어진 원 O 위에 있으며, 꼭짓점 C, D가 다르게 주어진 원 O_1 위에 있는 정사각형 ABCD를 작도'하는 문제를 제시하였다. 이 문제의 해결을 위해, Aleksandrov는 '정수 계수를 가지는 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$이 제곱근을 사용하여 풀릴 수 있기(solvable by radicals) 위한 필요충분조건은 이 사차방정식의 분해방정식(resolvent)이 제곱근을 사

용하여 풀릴 수 있는 것'이라는 사실을 이용하였다. 이 문제의 해결을 Aleksandrov(2004, p.121)의 방법을 중심으로 살펴보자. 한 원이 다른 원의 밖에 놓여있다고 하고, 선분 OO_1이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$와 점 M, N에서 만난다고 하자([그림 Ⅱ-4]). $\overline{OA}=a$, $\overline{O_1D}=b$, $\overline{OO_1}=d$, $\overline{AD}=x$, $\overline{OM}=y$라고 하자. $\overline{AB}=\overline{AD}=x$이며 $\overline{AM}=\frac{x}{2}$이다. 직각삼각형 AOM, DNO_1에서 $y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=a^2$, $(d-x-y)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=b^2$이 성립한다. 이제 이 두 식을 연립하고 $a^2-b^2=c^2$을 생각하면, $c^4+(d-x)^4+2c^2(d-x)^2+x^2(d-x)^2=4a^2(d-x)^2$이 된다. 이로부터 $x^4-3dx^3+\frac{2c^2+7d^2-4a^2}{2}x^2+(4a^2d-2d^3-2c^2d)x+\frac{(c^2+d^2)^2-4a^2d^2}{2}=0$이 얻어진다.

이제 계수가 정수인 사차방정식을 얻기 위해, $a=5$, $b=3$라 하면 $c=4$가 되며, $d=4$로 하면, 방정식 $x^4-12x^3+22x^2+144x-288=0$, 분해방정식 $z^3-64z^2+(32^2-4.99)z-60^2=0$가 얻어진다. 이로부터 구하는 선분 AB의 작도불가능성이 증명될 수 있다.

일반적으로 작도가능하지 않는 사차방정식의 근을 제시하는 것은 간단하지 않다. 신현용(2016b)은 갈루아 이론을 사용하여 정수 계수를 가지는 사차방정식 $4x^4+8x+3=0$의 실근이 작도가능하지 않음을 설명하였다.

4. 작도(불)가능성에 대한 대수학적 접근

작도(불)가능한 도형의 문제는 작도(불)가능한 수의 문제로 귀착된다. 이는 작도(불)가능성의 문제가 대수적 문제로 이해될 수 있음을 의미한다. $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ 등과 같은 많은 무리수가 작도가능하지만, 무리수 $\sqrt[3]{2}$의 작도가능성은 오랫동안 알려지지 않았으며 $\sqrt[3]{2}$는 작도가능하지 않을 것이라는 추측이 자연스럽게 생겨났다. 그러나 $\sqrt[3]{2}$의 작도불가능성을 증명하기 위해서는 완전히 새로운 수학을 필요로 하였다.

16세기에 들어 삼/사차방정식의 근이 거듭제곱근을 사용하여 표현되었지만, 18세기 중반에 이르도록 오차방정식의 경우는 풀리지 않고 있었다. 18세기 중반에 라그랑주 등은 주어진 다항식의 근들 사이에 존재하는 대칭성에 주목하였고, 기존의 대수학과는 완전히 다른 대수학을 싹틔웠다. 이때 대칭성의 분석은 대수적 구조에 근거하여 연구되었으며, 결국 19세기 초반에 이르러 아벨과 갈루아 등에 의하여 오차방정식 중에는 거듭제곱근을 사용하여 근을 구할 수 없는 방정식이 있다는 사실이 밝혀졌다. 이러한 과정을 거쳐 정립된 대수학을 추상대수학이라고 부른다.

추상대수학은 작도가능성에 관한 분명한 해결을 제공하였다. 삼차방정식이나 사차방정식의 근의 작도가능성에 관한 분석뿐만 아니라, 모든 대수적인(algebraic) 수의 작도가능성을 주어진 수에 의해 얻어지는 대수적 구조의 성질로부터 확인할 수 있게 된 것이다. 이러한 접근을 통해 초월수는 작도불가능하다는 것이 알려졌다. 그리고 원주율 π가 초월수임이 확인되면서 π, $\sqrt{\pi}$가 작도불가능함을 알게 되었다. 그리고 정n각형의 작도(불)가능성도 어렵지 않게 설명될 수 있었다.

추상대수학에서는 정다각형의 작도가능성에 관련하여 다음의 동치관계가 알려져 있다(신현용, 2016b): 정n각형이 작도가능하다 $\Leftrightarrow$ 적당한 자연수 l이 존재하여 $\phi(n)=2^l$이다. 이때 ϕ는 오일러 함수임.

예를 들어, $\phi(7)=6$가 2의 거듭제곱 꼴이 아니기 때문에 정7각형은 작도불가능하며, 정17각형은 $\phi(17)=16=2^4$이므로 작도가능하다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구는 삼차방정식 해의 작도불가능성에 학습 자료를 개발하는 연구로, 문헌연구와 실험연구로 구성된다. 문헌연구에서는 삼차방정식 해의 작도불가능성에 대한 학습 자료를 개발하였으며, 실험연구에서는 예비교사, 현직교사, 전문가들을 대상으로 개발된 학습 자료의 타당성, 학습 가능성 등을 탐색하였다.

1. 문헌연구

문헌연구에서는 삼차방정식 해의 작도(불)가능성을 다루는 다양한 국내외 문헌들을 조사하였다. 일반적으로 삼차방정식의 해의 작도(불)가능성은 대학의 현대대수학 또는 추상대수학(이하 추상대수학으로 통일하여 기술함)에서 다루어진다. 본 연구에서는 국내외에서 출판된 추상대수학 문헌들(김응태, 박승안, 2011; Fraleigh, 2016; 최상기, 2013; 신현용, 2007 등)을 분석하였다.

문헌분석을 통해 삼차방정식의 해의 작도(불)가능성에 대한 전형적인 접근 방법을 추출할 수 있었으며, 이 방법이 고등수학적 접근(증명)이 바탕이 된다. 고등수학적 접근은 대수적 구조에 근거하는 방법으로, 유리수 전체의 집합과 작도가능한 수 전체의 집합이 체(field)라는 사실로부터 출발하여 벡터공간의 구조, 작도하려는 수의 최소다항식(minimal polynomial)등의 개념이 이용된다. 이러한 접근은 3대 작도불능문제뿐만이 아니라 정다각형의 작도가능성 문제에 대한 명확한 해결을 제공할 수 있다.

삼차방정식의 해의 작도(불)가능성에 대한 다른 방법(고등수학적 접근이 아닌)에 대한 학습 자료를 개발하기 위해, 추상대수학 전공서적을 비롯하여 작도에 대한 문헌들을 분석하였다. Argunov & Balk(1957)는 삼차방정식의 해의 작도(불)가능성에서 중요한 정리인 '유리수인 계수를 가지며, 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식의 어떤 근이 자와 컴퍼스로 작도될 수 있다면, 이 방정식은 적어도 하나의 유리수인 근을 가진다'를 대수적 구조의 개념들을 거의 사용하지 않고 증명하였다. 본 연구에서는 Argunov & Balk의 증명을 바탕으로 삼차방정식의 해의 작도(불)가능성에 대한 학습 자료를 개발하였고, 이것은 초등수학적 접근(증명)의 바탕이 되었다.

개발된 학습 자료는 세 부분으로 구성된다. 첫 번째 부분은 공통 영역(이하 자료1이라고 함)으로 초등수학적 접근과 고등수학적 접근의 바탕이 되는 기본 개념들로 구성하였다. 자료1에서는 도형의 작도를 수의 작도 문제로 이해함으로써 작도문제가 어떻게 기하 문제에서 대수 문제로 바뀌는지를 살펴보고, 작도가능한 수에 대해 이해한다. 특히 자료1에서 다음 내용들이 포함되었다: ① 작도가능한 수 전체의 집합이 체의 구조를 가진다; ② 작도를 한 단계 진행할 때 얻어지는 수 전체의 집합도 체의 구조를 가진다; ③ 정수 계수 다항식의 근이 될 수 있는 유리수는 유한개이다.

두 번째 부분인 자료2에서는 정수 계수 삼차방정식의 근의 성질을 이용하여 $\sqrt[3]{2}$ 의 작도불가능성과 각의 3등분선의 작도불가능성 문제를 다룬다. 자료2의 기술에 체, 확대체 등의 개념들이 포함되지만, 이 개념들이 증명의 핵심을 구성하는 것은 아니다. 자료2에서는 대수적 구조를 염두에 두지 않고도 $\sqrt[3]{2}$ 의 작도불가능성, 각의 3등분선의 작도불가능성 문제에 접근한다. 본 연구에서는 자료1과 자료2를 합쳐서 삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대한 초등수학적 접근을 위한 학습 자료로 구성하였다.

세 번째 부분인 자료3에서는 대수적 구조가 핵심을 이루는 추상대수학적 접근으로, 대수적 구조의 개념들, 정리들을 다루면서 그 내용이 다소 길게 구성되어 있다. 특히 작도하고자 하는 수의 최소다항식 개념과 그에 따른 차수 개념이 중요하게 다루어진다. 본 연구에서는 자료1과 자료3을 합쳐서 삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대한 고등수학적 접근을 위한 학습 자료로 구성하였다.

2. 실험연구

실험연구에서는 대학교 1학년 학생들, 현직교사, 전문가를 대상으로 개발된 자료의 적용 가능성, 장점 및 단점, 활용 가능성 모색에 관련된 자료가 수집되었다. 대학교 1학년 학생들은 ○○대학교 수학교육과 학생 29명으로, 이들은 대학교에서의 첫 학기이기 때문에, 고등학교 수준의 수학적 지식을 가졌다고 할 수 있다.

본 연구에서는 대학교 1학년 학생들을 위해 자료1과 자료2를 바탕으로 학습 자료를 재구성, 편집하였으며, 학습 자료와 활동지가 제공되었다. 학습 자료는 삼차방정식의 해의 작도가능성에 관련된 수학적 지식들, 예제, 문제들로 구성되었다. 활동지에 제시된 문제들은 다음과 같다.

예제 1. 집합 $\{r_1+r_2\sqrt{2} \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$은 수체가 되는가? 그 이유를 설명하여라.

예제 2. $p_1, p_2 \in P,\ p \in P,\ \sqrt{p} \notin P$에 대해 $p_1+p_2\sqrt{p}$인 꼴의 수들의 집합 P^*는 원소 $\sqrt{p}$의 결합에 의한 수체 P의 확대체 $P(\sqrt{p})$에 속한다는 것을 보여라.

문제 1. $a,\ b,\ c$가 유리수인 삼차방정식 $y^3+ay^2+by+c=0$이 주어졌다. $y=x-\dfrac{a}{3}$로 치환하여 얻어지는 x에 관한 삼차방정식을 구하여라.

문제 2. 정리 3의 대우를 써라.

탐구과제 1. 삼차방정식 $x^3-2=0$의 근은 자와 컴퍼스로 작도하지 못한다는 것을 증명하여라.

탐구과제 2. 삼차방정식 $x^3-3x-1=0$의 근은 자와 컴퍼스로 작도하지 못한다는 것을 증명하여라.

학습 자료와 활동지의 탐구 활동을 위해, 학생들을 4-5명을 한 조로 하여 7개 조로 나누었다. 학생들은 조별로 방과 후에 학습을 하였으며, 전체 학생이 모여서 학습 내용에 대한 질의 및 응답, 문제해결 결과에 대한 발표 및 토론의 시간을 가졌다. 그리고 학생 개개인의 학습 결과에 대한 정보 수집도 이루어졌다.

한편 ○○대학교 교육대학원에 재학 중인 현직교사를 대상으로는 초등수학적 접근을 위한 학습 자료(자료1과 자료2), 고등수학적 접근을 위한 학습 자료(자료1과 자료3)의 학습 가능성을 탐색하고, 두 접근의 장점과 단점을 조사하였다. 현직교사 집단은 9명으로 구성되었으며, 초등학교 교사 2명, 중등학교 수학교사 7명이다. 초등학교 교사들은 추상대수학의 내용을 학습한 경험이 전혀 없었으며, 중등학교 교사들은 대학에서 추상대수학을 수강했던 경험이 있었으나 작도(불)가능성 문제를 상세하게 공부한 적은 없었다.

교사들에게 자료1, 자료2, 자료3을 제공하여 자립적으로 학습하도록 하였다. 그런 후에 학급에서 자료1, 자료2, 자료3을 발표하고 이에 대한 전체 토론을 진행하였다. 이때 담당교수는 주로 교사들의 질문에 대답하거나 교사들에게 필요한 질문을 제시하는 역할을 하였다. 그런 다음, 개발된 자료의 적용 가능성, 장점 및 단점에 대한 정보를 수집하였다.

한편 전문가 설문에서는 수학교육학 전문가 1인, 현직 수학교사 1인, 대수학 전문가 1인을 대상으로, 개발된 자료1, 자료2, 자료3의 타당성, 활용 가능성, 장점 및 단점에 대한 정보를 수집하였다. 전문가 설문의 결과는 개발된 자료를 수정, 보완하는데도 사용되었다.

수학교육 전문가는 수학교육학 전문가는 수학교육학을 전공하여 박사학위를 취득하였고 현재 수학교육학을 강의하고 있다. 현직 수학교사는 수학교육학을 전공하여 박사학위를 취득하였으며, 수학교육학 논문과 대수학 분야의 논문을 학술지에 게재하였으며, 현재는 고등학교에서 수학을 지도하고 있다. 그리고 대수학 전문가는 대수학 전공으로 박사학위를 취득하였고, 현재 대수학을 강의하고 있다.

전문가 설문은 개발된 자료의 타당성 및 활용 가능성, 장점 및 단점에 대해 묻는 8개의 문항으로 구성되었다(표 Ⅲ-1). 전문가 설문은 개발된 자료들과 함께 전문가에게 보내졌으며, 3인 모두 설문에 답을 하였다.

<표 III-1> 전문가 설문의 내용

자료의 타당성 및 활용 가능성	문항 내용
	‘삼차방정식 해의 작도 가능성’에 대한 핵심적인 내용의 포함 여부
	수정, 보완되어야 할 내용
	어떤 학생에게 활용가능한가
	어떤 학생에게 가장 적합한가
	자료 활용의 목적 및 용도
자료의 장점 및 단점	자료의 장점
	자료의 단점
	자료에 대한 기타 의견 제시

Ⅳ. 결과 및 논의

1. 삼차방정식 해의 작도불가능성에 대한 자료 개발

작도(불)가능성 문제는 자와 컴퍼스를 사용하는 기하학적 문제라고 할 수 있다. 어떤 도형(또는 수)가 작도가능하다는 것은 자와 컴퍼스를 사용하여 유한번의 작도 절차를 통해 그 도형을 얻을 수 있는 것을 말한다. 그러나 어떤 도형(또는 수)이 작도불가능하다는 것은 자와 컴퍼스를 사용해서 증명될 수 없다.

수학자들은 작도(불)가능성 문제를 대수적 언어로 해석하여 문제를 해결하였다. 즉 작도의 기하학적 모든 행위와 절차를 수와 연산에 관한 대수적 문제로 바꾸어 작도(불)가능성 문제를 해결한 것이다. 예를 들어, 단위선분(단위길이를 가지는 선분)은 자연수 1, 단위 선분의 두 배인 선분은 2, 단위선분의 중점은 $\frac{1}{2}$을 뜻하고, 자에 의한 직선 또는 컴퍼스에 의한 원의 교점의 좌표는 해당 직선의 방정식과 원의 방정식을 연립한 연립방정식의 해를 의미하는 것으로 해석하였다. 본 연구에서 다루는 작도(불)가능성은 실수에 국한한다.

(1) 자료1(공통 자료)

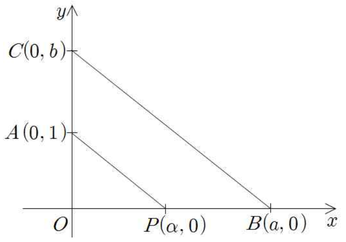
가. 작도가능한 수의 집합

작도에서 단위선분은 주어지므로, 자연수 1은 작도가능하다. 단위선분이 주어지면 그 길이를 2배, 3배, ⋯ 등을 할 수 있으므로 자연수 2, 3, ⋯ 등은 작도가능하다. 또 단위선분의 이등분점, 삼등분점의 작도를 통해 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ 등도 작도가능하다. 수학적 편의를 위해, 0은 작도가능한 것으로 인정된다. 결국 좌표평면에서 양의 방향과 음의 방향을 생각하면, 모든 유리수가 작도될 수 있다는 것을 알 수 있다.

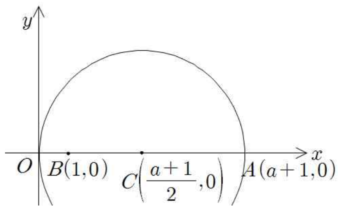
문제 1. 작도가능한 두 수 a, b와 자연수 m, $n(\neq 0)$에 대해, $x=a+b$, $x=a-b$(이때 $a>b$), $x=na$, $x=\frac{a}{n}$, $x=\frac{m}{n}a$인 x를 작도하여라.

a, b(단 $b\neq 0$)가 작도가능하면, $\frac{a}{b}$도 작도가능하다. 그 이유를 살펴보자. 좌표평면에 점 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(a,0)$,

$C(0,b)$를 잡자(그림 Ⅳ-1). 이제 선분 BC를 긋고, 선분 BC에 평행하면서 점 A를 지나는 선분을 긋자. 작도한 선분이 x축과 만나는 점을 $P(\alpha,0)$이라고 하면, $\alpha=\frac{a}{b}$가 된다.



[그림 Ⅳ-1] $\frac{a}{b}$의 작도



[그림 Ⅳ-2] $\sqrt{a}$의 작도

한편 a, b가 작도가능하면, $\frac{1}{b}$도 작도가능하며, $\frac{a}{\frac{1}{b}}=ab$도 작도가능하다는 것을 알 수 있다. 이로부터, 다음을 알 수 있다.

정리 1. a, b가 작도가능하면, $a+b$, $a-b$, ab, $\frac{1}{a}$(이때 $a\neq 0$)도 작도가능하다.

작도가능한 수 전체의 집합에 대해 다음을 알 수 있다: ① 덧셈에 관하여 닫혀있고, 덧셈에 관한 결합법칙과 교환법칙이 성립한다. ② 덧셈에 관한 항등원 0이 있다. ③ 모든 작도가능한 수의 덧셈에 관한 역원이 존재한다. ④ 곱셈에 관하여 닫혀있고, 곱셈에 관한 결합법칙과 교환법칙이 성립한다. ⑤ 곱셈에 관한 항등원 1이 있다. ⑥ 작도가능한 수 x가 0이 아니면 x의 곱셈에 관한 역원이 존재한다. ⑦ 덧셈에 관한 곱셈의 분배법칙이 성립한다.

한편, 수의 집합이 덧셈과 곱셈에 관하여 위의 조건을 만족시킬 때 체라고 한다. 작도가능한 수 전체의 집합은 덧셈과 곱셈에 관하여 체의 구조를 가진다.

문제 2. a, b, $c(c\neq 0)$가 작도가능할 때, $x=\frac{ab}{c}$인 x를 작도하여라.

이제 양수 a가 작도가능하면 $\sqrt{a}$도 작도가능하다는 것을 알 수 있다. 좌표평면에 점 $A(a+1,0)$를 표시하고, 선분 OA의 중점 $C\left(\frac{a+1}{2},0\right)$를 잡자(그림 Ⅳ-2). 이제 점 C를 중심으로 하며 반지름이 $\frac{a+1}{2}$인 원을 작도하자. 그리고 점 $B(1,0)$에서 수선을 세워 원과의 교점을 P라 하자. 이때 직각삼각형 OBP와 PBA를 생각하면, 이들은 닮음이 되며, 점 P의 y좌표가 $\sqrt{a}$임을 쉽게 알 수 있다.

문제 3. a, b가 작도가능할 때, $x=\sqrt{ab}$, $x=\sqrt{a^2+b^2}$, $x=\sqrt{a^2-b^2}$(이때 $a>b$), $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$(이때

$a > b$)인 x를 작도하여라.

일반적으로 유리수 a, b, $c(c \neq 0)$, d, e, $e(e \neq 0)$, f, $g(g \neq 0)$에 대해 $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$, $\dfrac{d+\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}}}{e}$, $\dfrac{f+\sqrt{\dfrac{d+\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}}}{e}}}{g}$, … 등이 작도가능하며, 작도가능한 무리수는 무수히 많다.

나. 작도가능성과 확대체

모든 유리수는 작도가능하므로 유리수 좌표평면 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$에서 작도를 시작하자. 우선 $(x_1,y_1) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $(x_2,y_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$인, 즉 좌표가 유리수인 점 (x_1,y_1), (x_2,y_2)을 지나는 직선을 작도할 수 있으며, 중심이 $(x_1,y_1) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$이며 반지름이 $r \in \mathbb{Q}$인 원을 작도할 수 있다.

두 점 (x_1,y_1), (x_2,y_2)을 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1 = \dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}(x-x_1)$이므로, 유리수 a, b, c에 대해 $ax+by+c=0$로 나타낼 수 있다. 그리고 중심이 $(x_1,y_1) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$이며 반지름이 $r \in \mathbb{Q}$인 원의 방정식은 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$이므로, 이것을 정리하면 유리수 l, m, n에 대해 $x^2+y^2+lx+my+n=0$으로 나타낼 수 있다.

이제 직선과 직선, 직선과 원, 원과 원의 교점을 생각하자. 즉 이들의 교점은 일차방정식들의 연립, 일차방정식과 이차방정식의 연립, 이차방정식들의 연립의 형태로 표현된다. 이러한 연립방정식을 풀면 계수가 유리수인 일차방정식, 이차방정식이 얻어진다. 일반적으로 유리수인 p, q, r에 대해 이차방정식 $px^2+qx+r=0$의 근은 $\dfrac{-q \pm \sqrt{q^2-4pr}}{2p}$이므로, 직선들의 교점, 직선과 원의 교점, 원들의 교점은 모두 $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$와 같은 형태로 표현될 수 있다(이때 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$은 유리수). 그러므로 $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$인 형태의 수들의 집합은 작도와 관련하여 중요한 의미를 가진다.

유리수 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$에 대해 $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$인 형태의 수들의 집합의 성질을 살펴보자. 첫째, $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$인 형태의 수들 전체의 집합은 덧셈과 곱셈 연산에 대해 체의 구조를 가진다.

어떤 실수들의 집합이 덧셈과 곱셈 연산에 대해 체가 되려면, 덧셈, 뺄셈(덧셈의 역연산), 곱셈에 대해 닫혀 있고, 0이 아닌 원소의 곱셈에 관한 역원이 존재하면 된다. $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$에서 $\sqrt{\gamma_1}$이 유리수이면 $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$은 유리수가 되며, 유리수의 집합 $\mathbb{Q}$는 체이므로, $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$인 형태의 수들의 집합은 체가 된다.

이제, $\sqrt{\gamma_1}$이 유리수가 아닌 경우를 생각하자. 유리수 α_1, β_1, α_2, β_2, 무리수 $\sqrt{\gamma_1}$에 대해 두 수 $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$, $\alpha_2+\beta_2\sqrt{\gamma_1}$을 생각하자.

$$(\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}) \pm (\alpha_2+\beta_2\sqrt{\gamma_1}) = (\alpha_1 \pm \alpha_2)+(\beta_1 \pm \beta_2)\sqrt{\gamma_1}$$
$$(\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1})(\alpha_2+\beta_2\sqrt{\gamma_1}) = (\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2\gamma_1)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\sqrt{\gamma_1}$$

$$(\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1})\div(\alpha_2+\beta_2\sqrt{\gamma_1})=\frac{(\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{\gamma_1})}{(\alpha_2+\beta_2\sqrt{\gamma_1})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{\gamma_1})}$$
$$=\frac{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\gamma_1)+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\sqrt{\gamma_1}}{\alpha_2^2-\beta_2^2\gamma_1}$$

여기서 $\alpha_2+\beta_2\sqrt{\gamma_1}\neq 0$이고, 이 경우 $\alpha_2^2-\beta_2^2\gamma_1\neq 0$임을 쉽게 보일 수 있다. 결국, $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$인 형태의 수들 전체의 집합은 체가 된다.

둘째, $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$인 형태의 수들 전체의 집합은 유리수 집합 $\mathbb{Q}$와 $\sqrt{\gamma_1}$을 포함하는 체들 중에서 가장 작은 체이다. 이에 대해 알아보자. 어떤 체 K가 유리수 집합 $\mathbb{Q}$와 $\sqrt{\gamma_1}$을 포함한다고 하자. K는 체이므로 임의의 유리수 α_1, β_1에 대해 $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$는 K의 원소이다. 따라서 $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$인 형태의 수들 전체로 이루어진 체는 K의 부분체이다. 즉, $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$인 형태의 수들 전체로 이루어진 체는 유리수 집합 $\mathbb{Q}$와 $\sqrt{\gamma_1}$을 포함하는 체 중에서 가장 작은 체이다. 이 체를 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})$로 나타내고, $\mathbb{Q}$와 $\sqrt{\gamma_1}$으로 생성되는 체라고 말한다. $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})=\{\alpha+\beta\sqrt{\gamma_1}\mid\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$는 체 $\mathbb{Q}$의 확대체이고 $\sqrt{\gamma_1}\in\mathbb{Q}$인 경우에는 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})=\mathbb{Q}$이다.

특히 모든 유리수와 $\sqrt{\gamma_1}$이 작도가능하며, 작도가능한 수의 집합은 덧셈과 곱셈에 관하여 닫혀있으므로, $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})$의 모든 원소는 작도가능하다. 결국 유리수체 $\mathbb{Q}$에서 시작하여 한 단계의 작도 과정을 거쳐서 확대체 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})$을 얻을 수 있다. 체의 구조를 유지하며 작도가능한 수의 집합을 확장한 것이다.

편의상 $\mathbb{Q}$를 F_0로 나타내고, $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})$을 F_1로 나타내자. 두 번째 단계의 작도는 F_1을 좌표축으로 하는 좌표평면에서 시작하자. F_1의 원소를 좌표로 갖는 두 점을 지나는 직선은 $ax+by+c=0$(이때 $a,b,c\in F_1$)로 표현되며, 중심과 반지름의 길이가 F_1의 원소인 원은 $x^2+y^2+rx+sy+t=0$(이때 $r,s,t\in F_1$)로 표현될 수 있다.

앞에서와 마찬가지로, 방정식의 계수가 모두 F_1의 원소일 때, 직선과 직선, 직선과 원, 원과 원으로 구성되는 연립방정식의 해는 $\alpha_2+\beta_2\sqrt{\gamma_2}$(이때 $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$는 F_1의 원소)로 표현된다. 그러면 F_1의 원소 전체와 $\sqrt{\gamma_2}$를 포함하는 체 중에서 가장 작은 체, 즉 F_1과 $\sqrt{\gamma_2}$로 생성되는 체는 $F_1(\sqrt{\gamma_2})$이며 $F_1(\sqrt{\gamma_2})=\{\alpha_2+\beta_2\sqrt{\gamma_2}\mid\alpha_2,\beta_2\in F_1\}$이다.

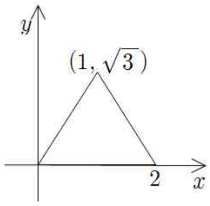
문제 4. $F_1(\sqrt{\gamma_2})=\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})(\sqrt{\gamma_2})$는 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1},\sqrt{\gamma_2})$임을 증명하여라. 여기서 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1},\sqrt{\gamma_2})$는 $\mathbb{Q}$, $\sqrt{\gamma_1}$, $\sqrt{\gamma_2}$를 품는 가장 작은 체를 나타낸다.

그리고 $F_1(\sqrt{\gamma_2})$의 모든 원소는 작도가능하다. $F_1(\sqrt{\gamma_2})$를 F_2로 나타내자. F_2은 유리수체 $\mathbb{Q}$에서 시작하여 두 차례의 작도 과정을 거쳐서 얻은 확대체이다. 체의 구조를 유지하며 작도가능한 수의 집합을 한 차례 더 확장한 것이다.

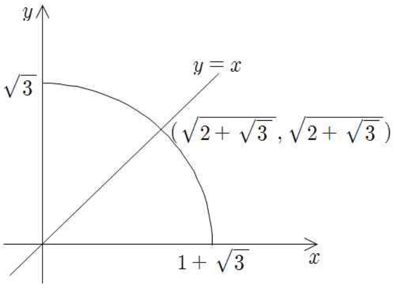
작도는 유한 번의 단계를 거쳐 끝나는 것이므로, n단계의 작도 과정을 거쳐 최종적으로 수 γ를 작도하였다고 하자. 이것은 다음 조건들을 만족시키는 실수 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$이 존재한다는 것을 의미한다: $\gamma_1\in\mathbb{Q}$, $\gamma\in\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1},\ldots,\sqrt{\gamma_n})$, $\gamma_i\in\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1},\ldots,\sqrt{\gamma_{i-1}})$, $i=2,\ldots,n$.

실제로 확대체를 만들어 보자. [그림 Ⅳ-3]에는 x축과 y축이 유리수 집합 $\mathbb{Q}$인 좌표평면에 한 변의 길이가

2인 정삼각형이 제1사분면에 작도되어 있다. 제1사분면에 있는 한 꼭짓점의 좌표는 $(1, \sqrt{3})$이다. 따라서 이러한 정삼각형 작도 과정을 통해 얻어지는 확대체는 $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$이 된다.



[그림 Ⅳ-3] 정삼각형



[그림 Ⅳ-4] 원과 직선

이제, [그림 Ⅳ-4]와 같이 확대체 F_1을 x축, y축으로 하는 좌표평면의 제1사분면에 중심이 원점이며 반지름이 $1+\sqrt{3}$인 원과 직선 $y=x$를 작도하고 교점을 표시하자. 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하면, 교점은 $(\sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}})$이 된다. [그림 Ⅳ-3]과 [그림 Ⅳ-4]의 두 번의 작도를 통해 얻어지는 확대체는 다음과 같다: $F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2+\sqrt{3}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{2+\sqrt{3}}) = \{\alpha+\beta\sqrt{2+\sqrt{3}} \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})\}$.

이로부터, 작도가능한 유리수 집합 $\mathbb{Q}$를 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})$(이때 $\gamma_1 \in \mathbb{Q}$)로 확대하면 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})$의 모든 원소는 작도가능하다. 이러한 과정을 거쳐 작도가능한 수의 집합을 점점 확대할 수 있다. 그리고 이와 같은 과정을 통해 얻어진 확대체 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, \ldots, \sqrt{\gamma_n})$의 모든 원소는 작도가능하다.

이제 $\sqrt[3]{2}$ 등과 같은 수의 작도가능성을 살필 때 유용하게 활용할 수 있는 정리를 살펴보자.

정리 2. 계수가 정수인 방정식 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$가 기약분수인 해 $x_0 = \frac{p}{q}$를 가진다면 a_n은 q로 나누어떨어지고, a_0는 p로 나누어떨어진다.

증명. x_0가 $P(x)$의 해이므로, $x_0 = \frac{p}{q}$를 $P(x) = 0$에 대입하여 다음을 알 수 있다.

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$
$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0,$$
$$-a_n p^n = a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

위 등식의 우변은 q로 나누어떨어지며 p와 q는 서로소이므로, a_n은 q로 나누어떨어진다. 마찬가지로, 등식의 좌변은 p로 나누어떨어지며 p와 q는 서로소이므로, a_0는 p로 나누어떨어진다. □

(2) 자료2

삼차방정식 $px^3 + qx^2 + rx + s = 0 (p \neq 0)$을 생각하자. $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$을 삼차항의 계수 p로 나누

면, 삼차항의 계수가 1인 $x^3+ax^2+bx+c=0$를 얻을 수 있다. 그리고 $x=X-\dfrac{a}{3}$를 대입하면, 이차항이 없는 삼차방정식 $X^3+qX+r=0$를 얻을 수 있다. 결국 삼차방정식 $X^3+qX+r=0$을 풀면, 삼차방정식 $px^3+qx^2+rx+s=0$을 풀 수 있게 된다. 그러므로 삼차방정식 $X^3+qX+r=0$의 근을 다룰 것이다.

정리 3. 유리수인 계수를 가지며, 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식의 어떤 근이 작도가능하다면, 이 방정식은 적어도 하나의 유리수 근을 가진다.

증명. 방정식 $x^3+r_1x+r_2=0$의 한 실수 근 x_1이 작도가능하면 x_1을 단위 길이 1에 기본 연산을 유한 번 적용하여 얻을 수 있다. 만약 x_1이 유리수라면, 정리가 증명된다.

x_1이 유리수가 아니라고 가정하자. 앞에서 살펴본 것과 같이, 유리수체 $\mathbb{Q}=F_0$를 바탕으로 F_0의 확대체 F_1, F_2, $\cdots$, F_n, $\cdots$ 등을 얻을 수 있다. x_1을 포함하는 첫 번째 확대체를 F_{k+1}이라고 하면 x_1은 $r_k'+r_k''\sqrt{r_k}$인 꼴이다(이때 r_k', r_k'', $r_k\in F_k$). 근 $x_1=r_k'+r_k''\sqrt{r_k}$을 방정식 $x^3+r_1x+r_2=0$에 대입하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\left(r_k'+r_k''\sqrt{r_k}\right)^3+r_1\left(r_k'+r_k''\sqrt{r_k}\right)+r_2=0,$$
$$\left((r_k')^3+3(r_k')^2r_k''\sqrt{r_k}+3r_k'(r_k''\sqrt{r_k})^2+(r_k''\sqrt{r_k})^3\right)+r_1r_k'+r_1r_k''\sqrt{r_k}+r_2=0,$$
$$\left((r_k')^3+3r_k'(r_k'')^2r_k+r_1r_k'+r_2\right)+\left(3(r_k')^2r_k''+(r_k'')^3r_k+r_1r_k''\right)\sqrt{r_k}=0.$$

여기서 $p_k'=(r_k')^3+3r_k'(r_k'')^2r_k+r_1r_k'+r_2$, $p_k''=3(r_k')^2r_k''+(r_k'')^3r_k+r_1r_k''$이라고 놓으면 p_k', p_k''은 F_k의 원소임을 알 수 있다. 사실, $p_k''=3(r_k')^2r_k''+(r_k'')^3r_k+r_1r_k''$는 0이다. 이를 확인하기 위해, $p_k''\neq 0$라고 가정하자. $\sqrt{r_k}=-\dfrac{p_k'}{p_k''}$이며 $\sqrt{r_k}$는 F_k에 속하게 된다. $x_1=r_k'+r_k''\sqrt{r_k}$은 F_k에 속하고, 이것은 가정한 F_{k+1}이 x_1을 포함하는 첫 번째 확대체라는 것에 모순되므로 $p_k''=0$이다. 더 나아가 $p_k'+p_k''\sqrt{r_k}=0$으로부터 $p_k'=0$이 유도된다.

이제 $p_k'=0$, $p_k''=0$이라는 사실로부터, 수 $x_2=r_k'-r_k''\sqrt{r_k}$도 방정식 $x^3+r_1x+r_2=0$의 근이라는 것을 확인할 수 있다. $x_2=r_k'-r_k''\sqrt{r_k}$을 $x^3+r_1x+r_2=0$에 대입하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\left(r_k'-r_k''\sqrt{r_k}\right)^3+r_1\left(r_k'-r_k''\sqrt{r_k}\right)+r_2=0$$
$$\left((r_k')^3-3(r_k')^2r_k''\sqrt{r_k}+3r_k'(r_k''\sqrt{r_k})^2-(r_k''\sqrt{r_k})^3\right)+r_1r_k'-r_1r_k''\sqrt{r_k}+r_2=0,$$
$$\left((r_k')^3+3r_k'(r_k'')^2r_k+r_1r_k'+r_2\right)-\left(3(r_k')^2r_k''+(r_k'')^3r_k+r_1r_k''\right)\sqrt{r_k}=0.$$

이때 $p_k'=(r_k')^3+3r_k'(r_k'')^2r_k+r_1r_k'+r_2=0$이고 $p_k''=3(r_k')^2r_k''+(r_k'')^3r_k+r_1r_k''=0$이 성립하므로, $x_2=r_k'-r_k''\sqrt{r_k}$도 방정식 $x^3+r_1x+r_2=0$의 근이다.

한편 삼차방정식 $x^3+r_1x+r_2=0$의 세 근 x_1, x_2, x_3에 관한 근과 계수의 관계로부터 $x_1+x_2+x_3=0$이 성립한다. 이때 세 번째 근 x_3은 $-(x_1+x_2)=-2r_k'$이 되는데, x_3도 F_k에 속함을 알 수 있다.

결국, 방정식 $x^3+r_1x+r_2=0$의 근들 중 하나가 F_k에 속한다. 마찬가지 방법으로, 방정식 $x^3+r_1x+r_2$의 한 근이 F_k에 속한다는 것으로부터, 이 방정식의 어떤 근이 F_{k-1}에 속한다는 것을 증명할 수 있다. 이러한 과정을 반복하면, 방정식 $x^3+r_1x+r_2=0$의 근들 중 하나가 $\mathbb{Q}$에 속한다는 것이 증명된다. □

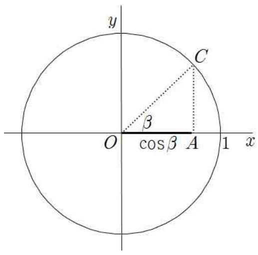
정리 3의 증명은 Argunov & Balk(1957)의 연구를 중심으로 재구성한 것으로, 이 정리는 작도(불)가능성을 탐구하는데 중요한 역할을 한다. 정리 3은 작도가능성에 대한 정리이지만, 정리 3의 대우를 생각하면 작도불가능성에 대한 중요한 사실을 알 수 있다.

문제 5. 정리 3의 대우를 기술하여라.

이제 배적 문제와 임의의 각의 3등분 문제를 살펴보자. 배적 문제에서 한 모서리가 1인 정육면체가 주어졌다고 하자. 그러면 주어진 정육면체의 부피는 1이고, 부피가 2인 정육면체를 작도해야 한다. 즉 작도해야 하는 정육면체의 한 모서리를 x라 하면, 삼차방정식 $x^3=2$, $x^3-2=0$의 근을 작도해야 한다. 문제 5를 해결하자.

문제 6. 삼차방정식 $x^3-2=0$의 근을 작도하지 못한다는 것을 증명하여라.

한편, 각의 3등분 문제는 임의의 각이 주어지면, 주어진 각의 $\frac{1}{3}$을 작도하는 문제이다. [그림 Ⅳ-5]에서 $\cos\beta$를 작도할 수 있으면, 단위원에 $\cos\beta$를 작도하여 각 β를 작도할 수 있다. 즉 x축에 길이가 $\cos\beta$인 선분 OA를 작도한 후에, 점 A를 지나는 수선을 그어 단위원과의 교점을 C라 하자. 이제 OC를 연결하면, $\angle$COA가 구하는 각 β가 된다. 결국 각 β를 구하는 문제는 길이가 $\cos\beta$인 선분 OA를 구하는 문제로 귀착된다.



[그림 Ⅳ-5] 각의 3등분

이제 $\frac{\pi}{3}$의 3등분은 작도불가능하다는 것을 살펴보자. 코사인 3배각 공식에 의해, $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$가 성립한다. 즉 $\cos\alpha=4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right)-3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$가 성립한다. $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{x}{2}$라 놓고, $\cos\alpha$는 주어진 각이므로 $\cos\alpha=\frac{b}{2}$라 놓자. 그러면 $\cos\alpha=4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right)-3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$는 삼차방정식 $x^3-3x-b=0$가 된다. 이제 $\alpha=\frac{\pi}{3}$으로 놓으면, $b=1$이 되어, 방정식은 $x^3-3x-1=0$이 된다. 이제 다음 문제를 해결하자.

문제 7. 삼차방정식 $x^3-3x-1=0$의 근을 작도하지 못한다는 것을 증명하여라.

(3) 자료3

가. 벡터공간으로서의 체

$F_1=\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})$의 모든 원소는 $\alpha_1+\beta_1\sqrt{\gamma_1}$ $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\in\mathbb{Q})$의 꼴로 유일하게 표현되므로, F_1은 $\mathbb{Q}$위에서 벡터공간이다. $\sqrt{\gamma_1}\not\in\mathbb{Q}$인 경우 집합 $\{1,\sqrt{\gamma_1}\}$이 벡터공간 F_1의 기저이므로 F_1은 $\mathbb{Q}$위에서 이차원 벡터공간이다. 일반적으로 확대체는 기초체 위에서 벡터공간이다. 예를 들어, 작도가능한 수 전체의 집합 C는 $\mathbb{Q}$의 확대체이므로 C는 $\mathbb{Q}$위에서 벡터공간이다. 체 $F\subseteq K$에 대하여 F위에서의 벡터공간 K의 차원이 유한일 때 그 차원을 $[K:F]$로 나타낸다. 예를 들어, $[\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}):\mathbb{Q}]=2$이다.

정리 4. 체 $F\subseteq K\subseteq L$에 대해 $[K:F]$, $[L:K]$이 각각 유한이면, $[L:F]=[L:K][K:F]$이다.

증명. $\{a_1,\cdots,a_n\}$가 F위의 K의 기저이고, $\{b_1,\cdots,b_m\}$가 K위의 L의 기저일 때, $\{a_ib_j \mid i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m\}$가 F위의 L의 기저임을 증명하면 된다. 먼저 $\{a_ib_j \mid i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m\}$가 L을 생성함을 보이자. 임의의 $z\in L$은 $z=\sum_{j=1}^{m}y_jb_j$, $(y_j\in K)$와 같이 표현된다. 그리고 y_j는 $y_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}a_i$, $(x_{ij}\in F)$와 같이 표현된다. 따라서 $z=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}a_i\right)b_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}(a_ib_j)$이므로 L의 원소는 nm개의 원소 $a_ib_j\in L$에 의하여 생성된다. 이제 $\{a_ib_j \mid i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m\}$가 일차독립임을 보이자. $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}c_{ij}a_ib_j=0$, $(c_{ij}\in F)$이라고 하면 $\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}c_{ij}a_i)b_j=0$, $\sum_{i=1}^{n}c_{ij}a_i\in K$이고 $\{b_1,\cdots,b_m\}$은 K위의 L의 기저이므로, 모든 j에 대해 $\sum_{i=1}^{n}c_{ij}a_i=0$이다. $\{a_1,\cdots,a_n\}$은 F위의 K의 기저이므로 모든 i, j에 대하여 $c_{ij}=0$이다. 따라서 $\{a_ib_j \mid 1\le i\le n,\ 1\le j\le m\}$는 체 F위에서 L의 기저이다. □

예를 살펴보자. $\sqrt{\gamma_2}\not\in\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})$인 경우에 $F_2=F_1(\sqrt{\gamma_2})=\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1},\sqrt{\gamma_2})$는 F_1위의 이차원 벡터공간이다. 따라서 F_2는 $\mathbb{Q}=F_0$위에서 $2\times2=4$차원 벡터공간이다.

$$\begin{array}{c} F_2=F_1(\sqrt{\gamma_2}) \\ | \\ F_1=\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}) \\ | \\ F_0=\mathbb{Q} \end{array}$$

[그림 IV-6]

작도는 유한 번에 끝나는 것이므로, n단계의 작도 과정을 거쳐 최종적으로 수 γ를 작도하였다면 다음 조건

을 만족시키는 실수 $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n$이 존재한다: $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1},...,\sqrt{\gamma_n})$, $\gamma_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1},...,\sqrt{\gamma_{i-1}})$, $i=2,...,n$, $\gamma_1 \in \mathbb{Q}$. 여기서 모든 $i=2,...,n$에 대하여 $\sqrt{\gamma_i} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1},...,\sqrt{\gamma_{i-1}})$인 경우에 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1},...,\sqrt{\gamma_n})$는 $\mathbb{Q}=F_0$위에서 2^n차원의 벡터공간이다.

나. 작도가능한 수의 꼴

$\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})(\sqrt{\gamma_2})=\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1},\sqrt{\gamma_2})$의 임의의 원소 γ는 $a_2+b_2\sqrt{\gamma_2}$ $(a_2,b_2,\gamma_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}))$의 꼴이다. a_2,b_2,γ_2는 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})$의 원소이므로, 이들은 $a_1+b_1\sqrt{\gamma_1}$, $(a_1,b_1,\gamma_1 \in \mathbb{Q})$의 꼴이다. 예를 들어, 실수 γ가 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$의 원소이면 $\gamma=a+b\sqrt{3}$, $a,b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$이다. $\gamma=a+b\sqrt{3}$, $(a,b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}))$, $(\gamma-a)^2=3b^2$, $\gamma^2-2a\gamma+a^2=3b^2$. 여기서 $a=c+d\sqrt{2}, b=e+f\sqrt{2}$, $(c,d,e,f \in \mathbb{Q})$의 꼴이므로, 다음을 알 수 있다.

$$\gamma^2-2(c+d\sqrt{2})\gamma+(c+d\sqrt{2})^2=3(e+f\sqrt{2})^2$$
$$\gamma^2-2c\gamma+c^2+2d^2-3e^2-6f^2=2(d\gamma-cd+3ef)\sqrt{2}$$

위의 마지막 식의 양변을 제곱하면, γ는 사차 유리수계수방정식의 근이 됨을 알 수 있다. 일반적으로, 수 γ가 n단계의 작도 과정을 거쳐 작도되었다면, 위와 같은 계산을 반복하여 γ가 유리수 계수를 가지는 방정식의 근임을 알 수 있다. π와 같은 초월수는 유리수계수를 가지는 방정식의 근이 아니므로, 작도가능하지 않다. 이 사실을 이용하면 $\sqrt{\pi}$는 작도가능하지 않다는 것을 알 수 있다. 만약 $\sqrt{\pi}$가 작도가능하면 $\pi=\sqrt{\pi}\times\sqrt{\pi}$도 작도 가능하게 되며, 이로부터 모순이 얻어진다.

다. 최소다항식

$p(x)$가 n차 다항식일 때, $p(x)=0$은 n차 방정식이다. 'n차 방정식 $p(x)=0$의 근'을 'n차 다항식 $p(x)$의 근'이라고도 한다. 체 F,K에 대하여 $F \subseteq K$이고 $\gamma \in K$가 계수가 F에 속하는 어떤 다항식의 근이라고 하자. 수 γ를 근으로 가지는 다항식 중에서 최저차이면서 최고차항의 계수가 1인 다항식을 γ의 최소다항식이라고 부른다. 예를 들어, $\sqrt{2}$의 유리수 계수를 가지는 최소다항식은 x^2-2이고, $\sqrt[3]{2}$의 유리수 계수를 가지는 최소다항식은 x^3-2이다.

$\mathbb{Q}$와 $\sqrt{\gamma_1}$, $(\gamma_1 \in \mathbb{Q})$으로 생성되는 체 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1})$은 $\mathbb{Q}$와 $\sqrt{\gamma_1}$을 포함하는 체 중에서 가장 작은 것이다. 마찬가지로, 체 F,K, $(F \subseteq K)$와 $\gamma \in K$에 대하여 $F(\gamma)$는 F와 γ로 생성되는 체를 나타내며 F와 γ를 포함하는 가장 작은 체이다. 다음 사실은 유용하다.

정리 5. 체 F,K에 대하여 $F \subseteq K$이고 $\gamma \in K$가 계수가 F에 속하는 어떤 다항식의 근이라고 하자. γ의 최소다항식 $p(x) \in F[x]$의 차수가 n이면, 체 $F(\gamma)$는 F위에서 n차원 벡터공간이다.

증명. $F(\gamma)$는 F와 γ를 포함하는 체이므로, $b_0+b_1\gamma+b_2\gamma^2+\cdots+b_t\gamma^t$, $(b_i \in F)$꼴의 원소는 모두 $F(\gamma)$의 원소이다. 한편, $p(x)$의 차수가 n이므로 임의의 $f(x) \in F[x]$에 대하여 $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$, $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$, $r(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$을 만족시키는 $q(x)$와 $r(x)$가 있다. $f(\gamma)=p(\gamma)q(\gamma)+r(\gamma)=r(\gamma)=b_0+b_1\gamma+\cdots+b_{n-1}\gamma^{n-1}$이므로 임의의 $f(x) \in F[x]$에 대하여 $f(\gamma)=r(\gamma)$인 다항식 $r(x)(\deg r(x)<n)$가 존재한다.

$F(\gamma)$의 부분집합 $\{f(\gamma) \mid f(x) \in F[x],\ \deg f(x)<n\}$을 생각하자. $\{f(\gamma) \mid f(x) \in F[x],\ \deg f(x)<n\}$가 체의 구조를 가진다는 것을 보이기 위해 곱셈에 관한 역원을 고찰하면 된다. 체에 관한 다른 모든 조건

은 쉽게 확인할 수 있기 때문이다. 임의의 $0 \neq f(x) \in F[x]$, $(\deg f(x) < n)$에 대하여 $f(x)$는 n차 미만의 다항식이고 $p(x)$는 n차의 기약다항식이므로 $f(x)$와 $p(x)$는 서로소이다. 따라서 $f(x)f^*(x) + p(x)p^*(x) = 1$을 만족시키는 $f^*(x) \in F[x]$와 $p^*(x) \in F[x]$가 존재한다. $f(\gamma)f^*(\gamma) + p(\gamma)p^*(\gamma) = 1$이고 $p(\gamma) = 0$이므로 $f(\gamma)f^*(\gamma) = 1$이다. 앞에서와 마찬가지 방법으로 $f(\gamma)r(\gamma) = 1$, $\deg r(x) < n$인 $r(x) \in F[x]$가 존재한다. $F(\gamma)$는 F와 γ를 품는 가장 작은 체이므로 $F(\gamma)$와 $\{\mathrm{f}(\gamma) \mid f(x) \in F[x],\ \deg f(x) < n\}$는 같다.

이제 $F(\gamma)$는 F위에서 n차원 벡터공간임을 보이자. $\{1, \gamma, \gamma^2, \cdots, \gamma^{n-1}\}$은 분명히 $F(\gamma)$를 생성한다. 이제 $\{1, \gamma, \gamma^2, \cdots, \gamma^{n-1}\}$는 일차독립임을 보이자. 실제로, $c_0 + c_1\gamma + c_2\gamma^2 + \cdots + c_{n-1}\gamma^{n-1} = 0$, $(c_i \in F)$이면 γ는 다항식 $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$의 근이 된다. 그런데 γ의 최소다항식 $p(x)$의 차수가 n이므로, γ를 근으로 가지고 차수가 $n-1$ 이하인 위의 다항식은 영다항식이다. 따라서 $\{1, \gamma, \gamma^2, \cdots, \gamma^{n-1}\}$는 일차독립이다. 결국 $\{1, \gamma, \gamma^2, \cdots, \gamma^{n-1}\}$가 $F(\gamma)$의 기저이므로 $F(\gamma)$는 F위에서 n차원 벡터공간이다. □

참고로, $p(x) \in F[x]$로 생성되는 이데알 $< p(x) >$은 다항식환 $F[x]$의 극대이데알이다. 따라서 상환 $F[x]/ < p(x >$은 체이다. $F(\gamma)$는 바로 이 체이다.

라. 문제의 해결

n단계의 작도 과정을 거쳐 γ를 작도하였다고 하면, 다음 조건을 만족시키는 실수 $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$이 존재한다: $\gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, ..., \sqrt{\gamma_n})$, $\gamma_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, ..., \sqrt{\gamma_{i-1}})$, $(i = 2, ..., n)$, $\gamma_1 \in \mathbb{Q}$.

이제 $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\gamma) \leq \mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, ..., \sqrt{\gamma_n})$이 성립한다는 것에 주목하자. 즉, $\mathbb{Q}(\gamma)$는 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, ..., \sqrt{\gamma_n})$의 부분공간이고, $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{Q}(\gamma)$의 부분공간이다. 정리 4로부터, $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, ..., \sqrt{\gamma_n})$는 $\mathbb{Q}$위에서 차원이 2^n이므로 $\mathbb{Q}(\gamma)$의 $\mathbb{Q}$위에서 차원은 2^k, $(k \leq n)$이다. 따라서 γ가 작도가능하면 $\mathbb{Q}(\gamma)$의 $\mathbb{Q}$위에서 차원은 2의 거듭제곱이다. 이로부터, 다음 정리를 얻을 수 있다.

정리 6. 어떤 수 γ에 대하여, $\mathbb{Q}(\gamma)$의 $\mathbb{Q}$위에서 차원이 2^k꼴이 아니면 γ는 작도불가능하다.

이제 작도불능문제인 문제 6, 문제 7을 해결할 수 있다. 문제 6에서 구하는 정육면체의 한 변의 길이 $\sqrt[3]{2}$는 $x^3 - 2 = 0$의 실수해이다. $x^3 - 2$는 유리수 근이 없으므로 이 다항식은 $\sqrt[3]{2}$의 최소다항식이다. 따라서 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$는 $\mathbb{Q}$위에서 3차원 벡터공간이다(정리 5). 그러나 차원 3은 2^k꼴이 아니므로 $\sqrt[3]{2}$는 작도불가능하다.

문제 7에서는 $\cos 20^\circ$는 다항식 $x^3 - 3x - 1$의 근이다. 이 다항식은 유리수 근을 갖지 않으므로 $\cos 20^\circ$의 최소다항식의 차수는 3이고 3은 2^k꼴이 아니므로 $\cos 20^\circ$는 작도불가능하다.

2. 개발된 자료에 대한 교수실험 및 설문의 결과

(1) 대학교 1학년 학생 및 현직교사의 수업에 적용한 결과

대학교 1학년 학생들은 대수적 구조에 대해서 배우지 않았다. 이들에게 체의 정의를 자료1과 같이 제시한 후, 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$와 집합 $\{r_1 + r_2\sqrt{2} \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$가 체의 구조를 가지는지를 묻는 문제를 제시하였다. 다음 [그림 Ⅳ-7]은 조별 학습의 결과로 학생이 제시한 증명이다.

Q가 수체이면, $r_1, r_2 \in Q$, $r \in Q$ 이고 $\sqrt{2} \notin Q$에 대해, $r_1 + r_2\sqrt{2}$ 인 형태의 수들 전체의 집합 Q^*는 수체가 된다. 그 이유를 살펴보자.

$r_1, r_2 \in Q$, $s_1, s_2 \in Q$에 대해, 수 $r = r_1 + r_2\sqrt{2}$, $s = s_1 + s_2\sqrt{2}$에 대해 $r+s$를 생각하자. $r+s = (r_1+r_2\sqrt{2}) + (s_1+s_2\sqrt{2}) = (r_1+s_1) + (r_2+s_2)\sqrt{2}$가 된다. $r_1, r_2 \in Q$, $s_1, s_2 \in Q$ 이므로 $r_1+s_1 \in Q$, $r_2+s_2 \in Q$ 이며; $r+s \in Q$ 이다. $r-s$도 이와 유사하게 생각할 수 있다.

이제 곱셈 rs를 생각하자.

$$rs = (r_1+r_2\sqrt{2})(s_1+s_2\sqrt{2}) = r_1s_1 + r_1s_2\sqrt{2} + r_2s_1\sqrt{2} + 2r_2s_2$$
$$= (r_1s_1 + 2r_2s_2) + (r_1s_2 + r_2s_1)\sqrt{2}$$

$r_1s_1 + 2r_2s_2 \in Q$, $r_1s_2 + r_2s_1 \in Q$ 이므로 $rs \in Q$ 이다.

나눗셈 $\frac{r}{s}$를 생각하자.

$$\frac{r}{s} = \frac{r_1+r_2\sqrt{2}}{s_1+s_2\sqrt{2}} = \frac{(r_1+r_2\sqrt{2})(s_1-s_2\sqrt{2})}{(s_1+s_2\sqrt{2})(s_1-s_2\sqrt{2})} = \frac{r_1s_1 - r_1s_2\sqrt{2} + r_2s_1\sqrt{2} - 2r_2s_2}{s_1^2 - 2s_2^2}$$
$$= \frac{(r_1s_1 - 2r_2s_2) + (r_2s_1 - r_1s_2)\sqrt{2}}{s_1^2 - 2s_2^2} = \frac{r_1s_1 - 2r_2s_2}{s_1^2 - 2s_2^2} + \frac{(r_2s_1 - r_1s_2)\sqrt{2}}{s_1^2 - 2s_2^2}$$

이때, $\frac{r_1s_1 - 2r_2s_2}{s_1^2 - 2s_2^2} \in Q$, $\frac{(r_2s_1 - r_1s_2)\sqrt{2}}{s_1^2 - 2s_2^2} \in Q$ 이므로 $\frac{r}{s} \in Q$가 된다

[그림 IV-7] $\{r_1 + r_2\sqrt{2} \mid r_1, r_2 \in Q\}$ 이 체임을 증명

체라는 대수적 구조에 대해서는 보통의 경우 대학교 3학년 과정에서 배우는 추상대수학에서 다루지만, 본 연구에 참여한 대부분의 학생들은 체의 의미를 정확히 이해하고 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$와 집합 $\{r_1 + r_2\sqrt{2} \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$가 체의 구조를 가진다는 사실을 성공적으로 증명하였다. 그리고 확대체에 대한 다음 예제에 대해서도 학생들은 성공적으로 접근하였다([그림 Ⅳ-8]는 확대체에 대한 학생들의 증명임).

예제. $p_1, p_2 \in P$, $p \in P$, $\sqrt{p} \not\in P$에 대해 $p_1 + p_2\sqrt{p}$ 인 꼴의 수들의 집합 P^*는 원소 $\sqrt{p}$의 결합에 의한 수체 P의 확대체 $P(\sqrt{p})$에 속한다는 것을 보여라.

$p_1 + p_2\sqrt{p}$ 에서 $p_2 = 0$으로 두면 체 P가 체 P^*에 포함됨을 알 수 있고
$p_1 = 0$으로 두면 $\sqrt{p}$가 체 P^*에 포함됨을 알 수 있다.

$P(\sqrt{p})$가 체이므로 $p_1 \in P(\sqrt{p})$, $\sqrt{p} \in P(\sqrt{p})$로부터
$p_2\sqrt{p} \in P(\sqrt{p})$임이 유도된다.

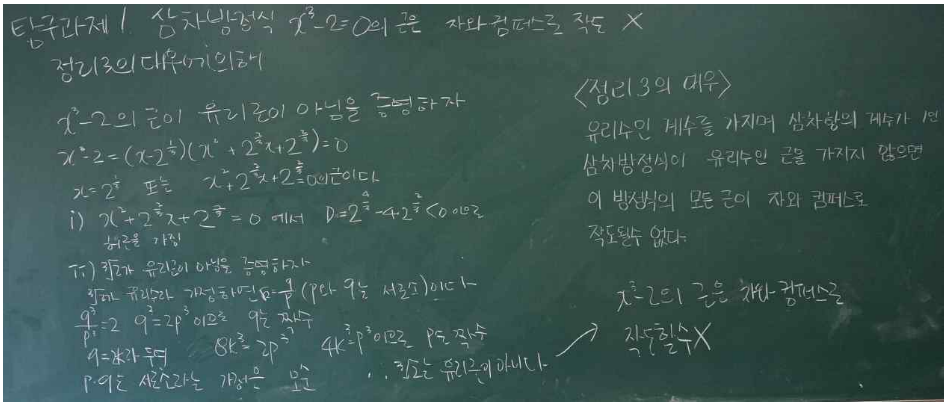
이를 통해 $p_1 + p_2\sqrt{p} \in P(\sqrt{p})$가 성립한다.

따라서 집합 P^*는 원소 $\sqrt{p}$의 결합에 의한 수체 P의 확대체 $P(\sqrt{p})$에 속함을 알 수 있다.

[그림 IV-8] 확대체에 대한 증명

특정한 집합 $\mathbb{Q}$ 와 $\{r_1 + r_2\sqrt{2} \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$ 뿐만이 아니라, 임의의 수의 집합에 대해서도 체의 구조를 인식한 것이다. 즉, 체, 확대체의 개념을 대학교 1학년 학생들이 이해하는데 큰 어려움이 발생하지 않았다는 것을 알 수 있다. 이러한 고등수학의 개념들을 의도적으로 고등학교 학생들이나 대학생들에게 조기에 도입하려 시도하는 것은 바람직하지 않겠지만, 필요한 경우에 최소한의 개념들을 학습의 도구로 이용하는 것까지 부정적으로 바라볼 필요는 없을 것이다.

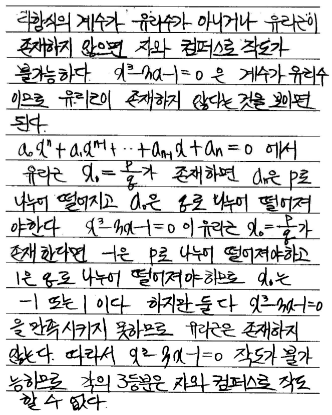
이제 학생들은 삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대한 정리 3을 학습할 준비가 되었다. 본 연구에서는 정리를 증명과 함께 제시하였고, 이를 바탕으로 배적문제, 즉 삼차방정식 $x^3 - 2 = 0$의 근을 작도하지 못한다는 문제를 해결하도록 하였다. [그림 Ⅳ-9]는 한 학생이 $x^3 - 2 = 0$의 근이 작도불가능하다는 것을 증명한 것이다.



[그림 Ⅳ-9] $x^3 - 2 = 0$의 근의 작도불가능성 증명

이 증명에서 학생은 $x^3 - 2$을 $(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}\,x + (\sqrt[3]{3})^2)$과 같이 인수분해 하고, $x - \sqrt[3]{2} = 0$의 근인 $\sqrt[3]{2}$가 유리수가 아니라는 것, 즉 $x^2 + \sqrt[3]{2}\,x + (\sqrt[3]{3})^2 = 0$의 근들이 유리수가 아니라는 것을 이용하여 삼차방정식 $x^3 - 2 = 0$의 근을 작도하지 못한다는 것을 증명하였다. 이 학생은 방정식의 계수와 근사이의 관계를 나타내는 정리 2를 이용하지 않고, $x^3 - 2 = 0$의 근을 직접 구해 유리수인 근이 없다는 것을 보였다.

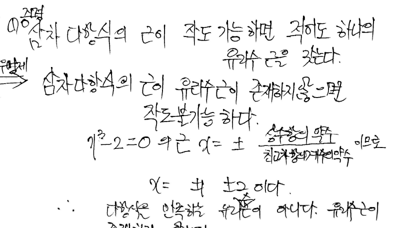
한편, 임의의 각의 3등분 문제를 살펴보자. 코사인 3배각 공식에 의해, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$가 성립한다. 즉 $\cos\alpha = 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$가 성립한다. $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$는 작도해야 선분이므로, $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \frac{x}{2}$라 놓고, $\cos\alpha$는 주어진 각이므로 $\cos\alpha = \frac{b}{2}$라 놓자. 그러면 $\cos\alpha = 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$는 삼차방정식 $x^3 - 3x - b = 0$가 된다. 이제 $\alpha = \frac{\pi}{3}$으로 놓으면, $b = 1$이 되어, 방정식은 $x^3 - 3x - 1 = 0$이 된다. 이제 학생들에게 방정식은 $x^3 - 3x - 1 = 0$의 근을 작도하지 못한다는 것을 증명하도록 하였다. [그림 Ⅳ-10]은 학생이 기술한 증명이다.


다항식의 계수가 유리수가 아니거나 유리근이 존재하지 않으면 자와 컴퍼스로 작도가 불가능하다. $x^3-3x-1=0$ 은 계수가 유리수이므로 유리근이 존재하지 않다는 것을 보이면 된다.
$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 에서 유리근 $x_0=\frac{p}{q}$가 존재하면 a_n은 p로 나누어 떨어지고 a_0은 q로 나누어 떨어져야 한다. $x^3-3x-1=0$ 이 유리근 $x_0=\frac{p}{q}$가 존재한다면 -1은 p로 나누어 떨어져야 하고 1은 q로 나누어 떨어져야 하므로 x_0는 -1 또는 1 이다. 하지만 둘 다 $x^3-3x-1=0$을 만족시키지 못하므로 유리근은 존재하지 않는다. 따라서 $x^3-3x-1=0$ 작도가 불가능하므로 각의 3등분은 자와 컴퍼스로 작도할 수 없다.

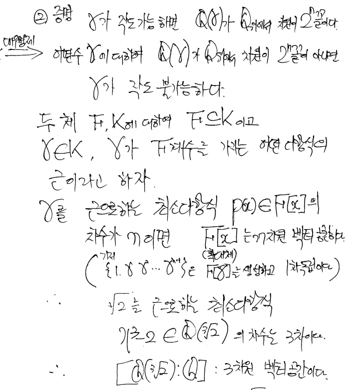
[그림 Ⅳ-10] 작도불가능성 증명

학생들은 정리 2, 정리 3을 이용하여, 삼차방정식 $x^3-2=0$, $x^3-3x-1=0$의 근을 작도할 수 없다는 것을 성공적으로 증명하였다. 이를 통해, 대학교 1학년 학생들이 개발된 자료들을 바탕으로 삼차방정식의 근의 작도(불)가능성에 대해 이해하고, 이에 관련된 문제를 성공적으로 해결하였다는 것을 알 수 있다.

한편, 현직교사들을 대상으로 하는 실험에서는 자료1, 자료2, 자료3을 모두 제시하였다. 현직교사들 중에서 초등교사들은 학부에서 작도가능성을 배운 적이 없었지만, '자료1'과 '자료 2'를 통하여 $\sqrt[3]{2}$와 cos20°의 작도불가능성을 어렵지 않게 이해하였지만 '자료 3'에 대해서는 어려움을 겪기도 하였다. 다음은 초등교사가 기술한 $\sqrt[3]{2}$의 작도불가능성에 대한 초등수학적 증명(그림 Ⅳ-11), 고등수학적 증명(그림 Ⅳ-12)이다.


① 증명 삼차 다항식의 근이 작도 가능하면 적어도 하나의 유리수 근을 갖는다.
$\xleftrightarrow{\text{대우명제}}$ 삼차다항식의 근이 유리수근이 존재하지 않으면 작도불가능하다.
$x^3-2=0$ 의 근 $x=\pm\frac{\text{상수항의 약수}}{\text{최고차항의 계수의 약수}}$ 이므로
$x=\pm1\ \pm2$ 이다.
∴ 다항식을 만족하는 유리수근이 아니다. 유리수근이 존재하지 않는다.
∴ $\sqrt[3]{2}$는 작도 불가능하다.

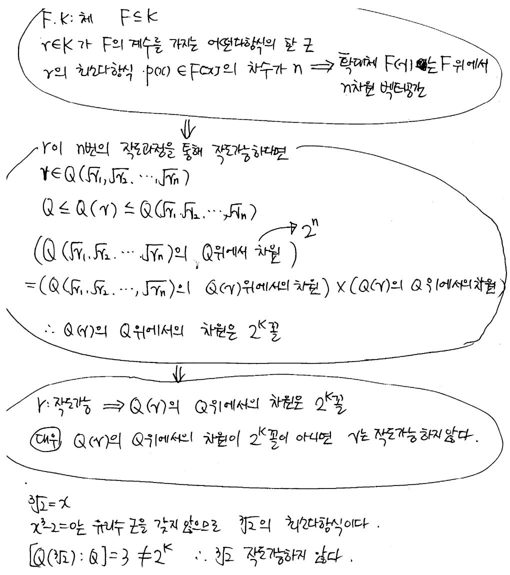
[그림 Ⅳ-11] 초등교사가 제시한 $\sqrt[3]{2}$의 작도불가능성 증명1


② 증명 γ가 작도가능하면 $\mathbb{Q}(\gamma)$가 $\mathbb{Q}$위에서 차원이 2^n꼴이다.
$\xleftrightarrow{\text{대우명제}}$ 어떤수 γ에 대하여 $\mathbb{Q}(\gamma)$가 $\mathbb{Q}$위에서 차원이 2^n꼴이 아니면 γ가 작도 불가능하다.
두 체 F, K에 대하여 $F\subseteq K$이고 $\gamma\in K$, γ가 F계수를 가지는 어떤 다항식의 근이라고 하자.
γ를 근으로하는 최소다항식 $p(x)\in F[x]$의 차수가 n이면 $F[x]$는 n차원 벡터 공간이다.
(기저 $\{1, \gamma, \gamma^2 \cdots \gamma^{n-1}\}$은 (확대체) $F[\gamma]$를 생성하고 1차독립이다)
∴ $\sqrt[3]{2}$를 근으로하는 최소다항식 $x^3-2\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$의 차수는 3차이다.
∴ $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]$: 3차원 벡터공간이다.
∴ 2^n꼴이 아니므로 $\sqrt[3]{2}$는 작도불가능하다.

[그림 Ⅳ-12] 초등교사가 제시한 $\sqrt[3]{2}$의 작도불가능성 증명2

한편, 학부에서 추상대수학을 배웠던 중등학교 교사의 경우에는 '자료1'과 '자료 2'를 통하여 $\sqrt[3]{2}$와 cos20°의 작도(불)가능성을 쉽게 이해하였을 뿐만이 아니라, '자료 3'의 내용들을 '자료 2'와 비교하면서 의미를 부여하였다. 중등학교 교사들은 대부분 $\sqrt[3]{2}$의 작도가능성에 대한 두 가지 증명을 정확하게 기술하였다. 다음은 중등학

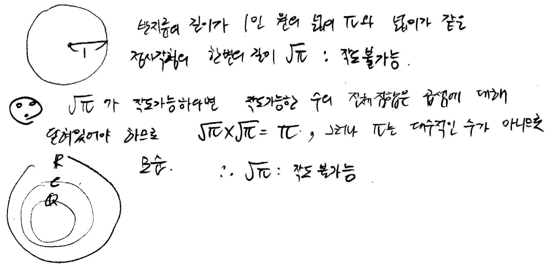
교 교사가 제시한 $\sqrt[3]{2}$ 의 작도불가능성에 대한 고등수학적 증명이다(그림 Ⅳ-13).



[그림 Ⅳ-13] 중등교사의 $\sqrt[3]{2}$ 의 작도불가능성 증명

초등교사의 [그림 Ⅳ-12]의 증명에서 'γ를 근으로 가지는 최소다항식 $p(x) \in F[x]$의 차수가 n이면 $F[x]$는 n차원 벡터공간'이라는 표현에서 교사가 겪고 있는 어려움을 볼 수 있으나, 중등교사의 [그림 Ⅳ-13]의 증명에서는 '$F(\gamma)$는 F위에서 n차원 벡터공간'이라고 정확히 기술하고 있다. 그러나 초등교사도 $\sqrt[3]{2}$ 의 작도불가능성에 대한 고등수학적 증명의 기본 흐름은 이해하고 있다고 볼 수 있다.

한편 [그림 Ⅳ-14]는 $\sqrt{\pi}$ 의 작도불가능성에 대한 중등학교 교사의 증명이다. $\sqrt{\pi}$ 의 작도불가능성에 대해서는 초등학교 교사들도 거의 유사한 증명을 제시하였다. π가 유리계수 다항식의 근이 될 수 없는 초월수라는 사실을 인정하는 경우에는 $\sqrt{\pi}$ 의 작도불가능성을 쉽게 설명할 수 있는 것이다.



[그림 Ⅳ-14] 중등교사의 $\sqrt{\pi}$ 의 작도불가능성 증명

한편, 교사들에게 초등수학적 접근과 고등수학적 접근 방법의 장점 및 단점에 대해서 물었다. [그림 Ⅳ-15]는 한 교사의 대답이다.

①번 방법의 장점: 대수적 구조를 필요로 하지 않는다.
단점: 3차다항식에서만 작도가능성 여부를 알수 있다.
②번 방법의 장점: n차다항식 (or 정n각형) 으로 확장 가능하다.
단점: 대수적 구조 (군, 환, 체, 벡터공간등) 를 필요로 한다.

[그림 Ⅳ-15] 초등수학적 접근과 고등수학적 접근의 장점 및 단점

[그림 Ⅳ-15]에서 ①번 방법은 초등수학적 접근을 의미하며, ②번 방법은 고등수학적 접근을 의미한다. [그림 Ⅳ-15]와 같이 답한 교사는 초등수학적 접근이 대수적 구조에 대한 폭넓은 이해를 요구하지 않지만 3차 다항식에 국한하여 적용가능한 것으로 인식하였고, 고등수학적 접근은 다양한 상황으로 확장 가능하지만, 대수적 구조에 대한 이해를 필요로 한다고 기술하였다. 초등수학적 접근의 장점 및 단점에 대한 다른 교사들의 의견을 정리하면 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 초등수학적 접근의 장점 및 단점

초등수학적 접근의 장점	초등수학적 접근의 단점
·대수적 구조를 필요로 하지 않는다. ·대수적 구조(군, 환, 체, 벡터공간)을 이용하지 않은 증명이다. 증명이 간단하다. ·쉽게 증명을 이해할 수 있다. ·누구나 쉽게 이해할 수 있다는 장점이 있고 증명이 쉽고 간단하다. ·대수적 구조가 많이 필요하지 않다. ·증명과정이 이해하기 쉽다. ·대수적 구조를 모르는 사람도 접근할 수 있다.	·3차 다항식에서만 작도가능성 여부를 알 수 있다. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식의 근이 작도불가능한 것에만 국한하여 증명이 가능하다. ·$\sqrt[3]{2}$ 의 증명에는 유용하나 다른 것으로의 확장이 불가능하다. ·삼차방정식으로 표현할 수 있는 작도불가능의 문제만 해결할 수 있다(예를 들어, $\sqrt[3]{2}$, $\cos 20^{\circ}$의 작도불가능). ·삼차다항식에만 국한된다. ·3차의 경우에만 적용할 수 있다. $\sqrt[3]{2}$, 각의 3등분에 대한 증명은 가능하지만, 일반적으로 작도가능성을 알 수는 없다. ·삼차다항식의 근에 대한 작도불가능을 보일 수 있으나, 다른 작도 불가능 문제에 확장하여 적용할 수 없다. ·$\sqrt[3]{2}$, $\cos 20^{\circ}$의 작도불가능은 증명하나 다른 작도불가능을 설명하지 못함

교사들은 초등수학적 접근의 장점으로 대수적 구조에 대한 이해를 필요로 하지 않는다는 것, 증명이 간단하다는 것, 쉽게 이해할 수 있다는 것을 들었고, 단점으로는 3차 다항식에 대해서만 활용 가능하며 다른 상황으로 확장이 어렵다는 것을 들었다.

한편 고등수학적 접근에 대한 교사들의 생각을 정리하면 <표 Ⅳ-2>와 같다. <표 Ⅳ-2>를 정리하면, 교사들은 고등수학적 접근의 장점으로 초등수학적 접근에 비해 활용 가능성이 크다는 것, 예를 들어 $\sqrt{\pi}$, $\sqrt[5]{2}$, 정n

각형의 작도불가능을 설명할 수 있다는 것을 들었으며, 단점으로는 대수적 구조에 대한 사전 지식이 많이 필요하다는 것, 증명이 복잡하고 어렵다는 것을 들었다.

<표 Ⅳ-2> 고등수학적 접근의 장점 및 단점

고등수학적 접근의 장점	고등수학적 접근의 단점
·차원을 구할 수 있는 모든 경우에 사용 가능 ·초등수학적 접근에 비해 어려우나 $\sqrt{\pi}$, 정n각형의 작도불가능을 설명할 수 있음. ·초등수학적 접근에서는 $\sqrt{\pi}$의 작도불가능을 증명할 수 없으나 고등수학적 증명으로는 π가 초월수라서 차원이 ∞로 볼 수 있기 때문에 이를 이용하여 작도불가능을 설명할 수 있다. $\sqrt[5]{2}$가 작도불가능이라는 것을 $\sqrt[5]{2}$의 최소다항식의 차수가 5로서 2의 거듭제곱이 아니가 때문에 $\sqrt[5]{2}$가 작도불가능하다는 것을 보일 수 있다. ·모든 작도 가능성을 다 기술할 수 있다. 덧붙여 정다각형의 작도가능성, 방정식의 일반해의 존재 유무를 구하는 것까지 다양한 분야에 응용된다. ·삼차방정식뿐만 아니라 일반적인 작도불가능성을 판단할 수 있다. ·3대 작도불가능 문제에 대한 해답 외에 정다각형의 작도 가능성 문제까지 해결할 수 있는 강점이 있어 일반화나 좀더 포괄적인 해답을 줄 수 있다. · $\sqrt[3]{2}$의 작도불가능성만 증명하는 것이 아니라 더 확장된 것까지도 증명할 수 있는 장점이 있다. ·대수적 구조인 군, 환, 체, 벡터공간을 이용한 포괄적인 증명으로 초등수학적 증명을 포함하는 증명이다. ·n차다항식(정n각형)으로 확장 가능하다.	대수적 구조가 많이 사전지식이 많이 필요하여 이해가 어렵다. 대수적 구조를 알아야 이해할 수 있는 증명으로 초등수학적 증명에 비해 어렵다. 이 증명은 많은 다른 분야의 수학적 지식을 요구하고 있어 그 이해가 쉽지 않다. 매우 복잡하고 시간이 많이 걸리며 추상대수학 전반을 알고 있어야 증명이 가능하다. 대수적 구조(군, 환, 체, 벡터공간 등)를 필요로 한다.

<표 Ⅳ-1>과 <표 Ⅳ-2>에서 교사들이 인식하는 초등수학적 접근과 고등수학적 접근의 장점 및 단점을 바탕으로 생각해 보면, 초등수학적 접근과 고등수학적 접근을 교육적 의도, 교육 대상에 따라 적절히 활용한다면 폭넓게 교육현장에서 이용할 수 있을 것으로 기대된다.

(2) 전문가 설문의 결과

본 연구에서는 개발된 자료에 대한 전문가의 의견을 조사하기 위해, 현직 수학교사(이하 전문가 A로 표시함), 수학교육학 전문가(이하 전문가 B로 표시함), 대수학 전문가(이하 전문가 C로 표시함)에게 개발된 자료1, 자료2, 자료3의 타당성, 활용 가능성, 장점 및 단점에 대한 의견을 수집하였다.

첫째, 개발된 자료가 삼차방정식 해의 작도 가능성에 대한 핵심적인 내용을 포함하고 있는지에 대해서, 전문가 A, B, C 모두 긍정적인 대답을 하였다. 특히 전문가 A는 초등수학적 접근에 관련하여, ‘정리 3과 정리 3의

대우에 의해 삼차방정식의 해의 작도 가능성에 대한 논의를 할 수 있으므로 그렇다고 할 수 있다. 특히 초등수학적 접근은 공통의 내용 없이도 논의 가능하다는 장점이 있다'고 하면서, 고등수학적 접근에 대해서는, '최소다항식의 개념과 정리 5, 6을 활용하면 삼차방정식의 해의 작도가능성에 대하여 논하기는 어렵고 공통 내용의 이해가 수반되어야 한다'고 기술하였다. 즉 전문가 A는 개발된 자료들이 삼차방정식 해의 작도가능성에 대한 내용을 포함하면서, 특히 초등수학적 접근은 고등수학적 접근과는 달리, 자료1의 내용을 크게 활용하지 않고도 작도(불)가능성에 대한 논의가 가능하다는 측면에 주목하였다.

한편 전문가 C는 초등수학적 접근에 관련하여, '작도가능한 실수 γ가 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_2}, \cdots, \sqrt{\gamma_n})$의 원소라는 사실과 3차 방정식의 근과 계수의 관계를 사용하였으므로 핵심적인 수학적 내용을 포함하고 있다'고 하였고, 고등수학적 접근에 대해서는 '작도가능한 실수 γ가 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_2}, \cdots, \sqrt{\gamma_n})$의 원소라는 사실과 확대체의 차원 계산을 도입하였으므로 핵심적인 수학적 내용을 포함하고 있다'고 하였다.

둘째, 개발된 자료의 수정 및 보완의 측면에 관련하여, 전문가 A는 "체의 정의에서 '나눗셈에 대하여 닫혀 있다'는 표현은 '0을 제외한 수의 곱셈에 관한 역원이 존재한다'로 바뀌어야 한다. 학습 자료이므로 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 서로소이면 $f(x)f^*(x)+g(x)g^*(x)=1$인 $f^*(x)$와 $g^*(x)$가 존재한다는 사실을 좀 더 구체적으로 다룰 필요가 있다"고 지적하였다. 실제로, 이 부분이 본 연구에서 개발한 자료 내용 중에서 가장 난해한 곳이다. 두 개의 정수 m, n이 서로소이면 $ms+nt=1$인 정수 s, t가 존재한다는 사실을 상기시키며 서로소인 두 다항식 $x+1$과 x^2+1의 경우를 예로 제시하며 설명하는 방식으로 보완될 수 있을 것이다. 정수의 경우와 다항식의 경우 모두 유클리드 알고리즘을 적용할 수 있기 때문이다. 실제로 $x+1$과 x^2+1의 경우에는 $x^2+1=(x+1)(x-1)+2$이므로 $\frac{1}{2}(x^2+1)-\frac{1}{2}(x+1)(x-1)=1$임을 알 수 있다. 그리고 이러한 전문가의 의견은 정리 5의 증명 기술에 반영되었다.

전문가 B는 '대학생이라면(사범대) 초등적 접근에서 3차방정식에서 작도가 불가능한 형태가 어떤 것인지 구체적이지 않아서, 가능한 모양과 불가능한 모양에 대한 궁금증이 생길 것 같습니다'라고 답하였다. 본 연구에서는 주로 작도불가능한 선분, 도형에 대해서 다루었기 때문에, 예비교사의 입장에서는 작도가능한 선분에 대한 논의도 충분히 의미있을 것으로 생각된다. 실제로 수업에서 이차방정식이나 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$으로 인수분해되는 $x^3-6x^2+11x-6=0$과 같은 삼차방정식을 다루는 것도 의미있을 것으로 생각된다.

전문가 C는 '고등수학적 접근에서 정리 3을 다시 한 번 언급하고 정리 6을 이용해서 정리 3을 증명하는 것을 참가하였으면 좋을 것 같다'고 하였다. 자료의 활용 과정에서 충분히 고려해볼 수 있는 의견으로 생각된다.

셋째, 개발된 자료를 어떤 학생들부터 활용가능한가에 대한 물음에 대해, 전문가 A는 '공통 내용은 중학교 3학년도 가능하고 초등수학적 접근은 고등학교 수준에서 이해 가능하다고 생각되며 고등수학접 접근은 고급수학을 이수한 과학고나 영재학교에서도 가능하다고 본다'고 대답하였다. 중학교 3학년이 실제로 개발된 자료를 의미충실하게 이해할 수 있을까라는 물음이 들 수도 있다. 그러나 전문가 A가 오랫동안 중학교, 고등학교의 영재학생들을 지도했다는 것을 감안하면, 교수실험을 통해 중등학교의 수학 우수학생들을 대상으로 활용가능성을 확인해 보는 것도 의미있는 연구가 될 것이다.

반면에 전문가 B는 '초등적 접근이든, 고등적 접근이든 고등학생에게는 이해 불가능할 것 같습니다. 공통자료에서 체에 대해, 확대체에 대해 언급함으로 인해, 대학교 2학년 이상을 되어야 이해가 가능할 것으로 판단이 됩니다. 초등적 접근에서 제시하고 있는 내용만으로 중고등학생이 이해하기에는 다소 어려울 듯 생각합니다'라고 하였다. 한편 전문가 C는 전공에 관계없이 대학교 1학년부터 개발된 자료의 활용이 가능할 것으로 답하였다.

결국 전문가 A, 전문가 B, 전문가 C는 개발된 자료를 중등학교 수학 우수학생들이나 전공수학을 아직 배우지 않은 학생들에게 활용할 수 있을 것으로 생각하고 있다.

넷째, 개발된 자료가 어떤 학생들에게 가장 적합하게 활용될 수 있는가에 대해, 전문가 A는 과학고등학교나 영재학교에서 가장 가치롭게 활용될 것으로 기대했으며, 전문가 B와 전문가 C는 대학교에서 현대대수학을 배우는 학생들이라고 답했다. 이것은 각 전문가가 가르치는 학생들을 염두에 두고 답한 것으로 추측할 수 있는데, 전문가 A는 ○○고등학교, 전문가 B와 전문가 C는 대학에서 학생들을 가르치고 있는 것도 대답에 영향을 준 것으로 생각할 수 있다.

다섯째, 개발된 자료는 어떤 목적이나 용도로 활용될 수 있는가에 대해, 전문가 A는 '기하에서 작도와 관련한 심화과정 또는 과학고나 영재학교에서 고급수학과정에서 다항식에 관한 내용이 작도라는 기하와 밀접한 관계가 있다는 사례로 활용가능하다'고 하였다. 그리고 전문가 B는 현대대수학에서 보조적인 성격의 자료로 활용될 수 있을 것으로 기대했고, 전문가 C는 '학생들에게 수학의 용이함을 설명하는데 활용될 수 있다'고 하였다.

전문가 A, 전문가 B, 전문가 C가 개발된 자료의 활용 대상, 목적에 대해 서로 다른 의견을 제시하였다. 이것은 전문가들이 다른 내용을 전공했고 다른 수준의 학생들을 지도하고 있음을 감안하면, 충분히 이해할 수 있다. 전문가들의 대답을 긍정적인 측면에서 분석하면, 개발된 자료가 다양한 교육적 목적을 달성하기 위해 활용될 수 있으며, 그 활용의 폭도 크다고 할 수 있을 것이다.

여섯째, 개발된 자료의 장점에 대한 질문에, 전문가 A는 초등수학적 접근에 대해 '다항식 이론이 어떻게 작도와 연관되어지는가를 이해할 수 있고 작도가능한 실수들의 대수적 성질을 알 수 있다'고 하였고, 전문가 B는 '3차 방정식으로 제한하여 직관적으로 이해하려고 시도한 점'을 들었다. 그리고 전문가 C는 '학생들이 사칙연산과 3차방정식의 근과 계수의 관계만 알면 이해할 수 있는 내용으로 다수의 학생들이 내용을 이해할 수 있다'고 하였다.

한편, 고등수학적 접근의 장점에 대해, 전문가 A는 '주어진 실수의 최소다항식을 계산하고 정리 5, 6을 활용하면 모든 실수의 작도 가능성을 논할 수 있다. 확대체 개념과 벡터공간의 개념도 이해할 수 있다'고 하였고, 전문가 C는 '고등수학의 사용으로 정리의 증명이 복잡하지 않아 수학의 특성 중 단순성을 느낄 수 있다'고 하였다.

전문가 A, 전문가 B, 전문가 C가 기술한 장점들을 통해, 개발된 자료들이 수학적으로, 교육적으로, 그리고 심미적으로 학생들에게 의미있는 자료가 될 수 있을 것으로 기대할 수 있다.

일곱째, 개발된 자료의 단점에 대한 질문에, 전문가 A는 초등수학적 접근에 대해 '원과 넓이가 같은 직사각형의 작도 가능성 등은 논할 수 없다'는 단점을 지적했다. 이것은 현직교사들이 지적한 내용과 일치한다. 실제로, 이 문제는 $\sqrt{\pi}$의 초월성으로 인하여 확대체 $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$의 $\mathbb{Q}$ 위에서의 차수가 무한이라는 사실로 귀착되는데 본 연구에 제시된 초등수학적 접근으로는 이러한 논의를 할 수 없다. 그리고 전문가 C는 '계산이 약간 복잡하여 집중도가 약해질 수 있을 것 같다'는 의견을 제시하였다. 한편, 고등수학적 접근의 단점에 대해서, 전문가 A, 전문가 B, 전문가 C는 특별한 언급을 하지 않았다.

여덟째, 개발된 자료에 관련된 기타 의견 제시와 관련하여, 전문가 A는 '처음 도입부분에 3대 작도 불가능과 관련한 스토리텔링식 전개가 있어도 좋다고 보며, 특히 각의 3등분을 작도하는데 성공했다는 주장들에 대한 반박에 관한 내용이 있으면 좋겠으며 작도 불가능성뿐만 아니라 작도 가능성에 대해서도 다양한 예를 들면 좋겠음'이라고 했다. 즉 3대 작도불능문제에 관련하여 흥미로운 역사적 전개를 모색하고, 각의 3등분 작도의 다양한 오류들을 수학사에서 찾아 소개한다면, 학생들에게 흥미로운 자료가 될 수 있을 것이다.

한편 전문가 B는 '초등적 접근의 의미가 고등학생이 이해할 수 있다고 생각하고 읽었는데, 그렇지 않은 것 같습니다'라는 의견을 제시하였다. 개발된 초등수학적 접근의 내용이 중등학교 학생들에게 활용가능한가에 대해서는 전문가 A의 긍정적인 의견과 전문가 B의 부정적인 의견이 엇갈리고 있다. 이 부분에 대한 논의는 근의 작도 가능성에 대한 주제뿐만 아니라, 수학의 다양한 주제들에 관련하여 수학교육학이나 영재교육학 분야에서 의미있게 논의될 수 있을 것이다. 이를 통해, 고등수학의 대중화, 많은 사람들이 접하는 수학의 깊이와 넓이가 확대될

수 있는 가능성을 모색할 수 있기 때문이다.

한편, 전문가 C는 내용 기술과 관련하여 '표현 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_2}, \cdots, \sqrt{\gamma_n})$에 대한 정의를 첨가하면 좋겠다'고 하였다. 이와 관련하여, 본 연구에서는 $\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_2}, \cdots, \sqrt{\gamma_n})$의 정의로 따로 구분하여 제시하지 않고, 문제 4의 기술에서 '$\mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_2})$는 $\mathbb{Q}$, $\sqrt{\gamma_1}$, $\sqrt{\gamma_2}$를 품는 가장 작은 체를 나타낸다'는 내용을 추가하였다.

V. 결론

본 연구는 3대 작도불능문제에 관련된 삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대한 다양한 학습가능성을 모색하는 연구로, 추상대수학의 체, 벡터공간, 최소다항식 등의 개념을 바탕으로 하는 고등수학적 접근을 위한 학습 자료와 초등수학적 접근이 가능한 학습 자료를 개발하였다. 개발된 자료들은 대학교 1학년 학생들, 현직교사들, 전문가들을 대상으로 교수실험 및 설문을 통해 타당성, 학습 가능성, 장점 및 단점에 대한 정보가 수집되었다.

학습 자료는 자료1, 자료2, 자료3으로 구성된다. 자료1에는 작도문제의 대수학화, 작도가능한 수의 집합, 작도가능성과 확대체의 내용이 포함되었고, 자료2에는 정수 계수 삼차방정식의 근의 성질을 이용하여 배적문제와 각의 3등분선의 작도불가능성 문제가 다루어졌다. 자료3에는 대수적 구조의 개념들, 정리들이 다루어졌고, 작도하려는 수의 최소다항식 개념과 그에 따른 차수 개념이 중요하게 다루어졌다. 본 연구에서는 자료1과 자료2를 결합하여 초등수학적 접근을 위한 학습 자료를 구성하였고, 자료1과 자료3을 결합하여 고등수학적 접근을 위한 학습 자료가 구성하였다.

학습 자료의 개발, 교수실험, 설문을 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 첫째, 대학교의 수학 교과내용에 대해 초등수학적 접근과 고등수학적 접근의 관점에서 학습 자료를 개발하는 가능성을 제시하였다. 중등학교의 수학 교과내용에 대해서는 다양한 수준 및 관점의 학습 자료들이 개발되었지만, 대학교의 수학 교과내용에 대한 연구는 우리나라에서는 아직 미흡한 실정이다. 본 연구에서는 삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대해 고등수학적 접근과 초등수학적 접근의 두 가지 관점에서 학습 자료를 개발하였다. 본 연구에서 초등수학적 접근에 관심을 가지고 자료를 개발한 것은, 대학교의 수학 교과내용은 대부분 중등학교 수학을 이해하는데 중요한 바탕이 되지만, 수학교사나 학생들이 대학교 수학 교과내용에 포함된 개념들, 방법들에 대해 막연한 어려움을 가지는 경우가 있기 때문이다. 초등수학적 접근에서는 대학교 수학 교과내용을 최소화시켜, 중등학교의 수학 교과내용을 이해하면 충분히 접근할 수 있도록 자료를 개발하려 시도하였다.

둘째, 중등학교 수학과 대학교 수학의 연결을 시도한 한 예를 제시하였다. 대학교의 수학은 추상적이고 새로운 수학적 개념들, 방법들이 있어야만 이해가 가능하다고 생각할 수 있다. 그러나 본 연구의 초등수학적 접근에서 살펴본 것처럼, 중등학교에서 배운 개념들, 그리고 이들의 확장을 통해서 대학교의 추상적인 수학을 이해할 수도 있다. 즉 중등학교 수학에서 출발하여 대학교의 고등수학으로 연결을 시도할 수도 있으며, 초등수학적 접근은 그러한 한 예라고 할 수 있을 것이다. 물론 모든 그러한 시도가 성공적인 결과를 내지는 못할 수 있지만, 중등학교 수학과 대학교 수학을 연결시키는데 의미있는 시도임에는 틀림없을 것이다.

셋째, 개발된 자료들의 다양한 타당성 및 활용 가능성을 확인하였다. 본 연구에서 개발된 삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대한 초등수학적 접근, 고등수학적 접근을 위한 학습 자료들은 삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대한 핵심적인 수학적 내용을 포함하고 있으며, 삼차방정식 해의 작도(불)가능성의 학습을 위한 자료로서 충분한 타당성을 가졌다는 것을 확인하였다. 실험을 통해, 대학교 1학년 학생들, 수학교사들이 개발된 자료들을 충분히 이해할 수 있으며, 이를 바탕으로 비정형적인 문제상황에서 성공적인 문제해결을 할 수 있다는 것을 확인하였다. 특히 ○○고등학교 수학교사는 초등수학적 접근에 대해 중등학교 수학 우수학생들도 이해할 수 있으며, 중등학교 수학 심화수업에서도 활용할 수 있을 것이라고 하였다. 물론 중등학교 학생들에게 개발된 자료의 내용

을 조기에 도입한다는 것 자체는 교육적으로 큰 의미를 가질 수는 없을 것이다. 그러나 개발된 자료의 활용의 폭이 그만큼 넓고 다양한 교수-학습 상황에서 활용할 수 있다는 것은 나름대로 의미를 부여할 수 있을 것이다.

넷째, 고등수학적 접근에서는 3대 작도불능문제인 배적문제, 각의 3등분선 작도문제, 원적문제를 모두 해결할 수 있었지만, 초등수학적 접근에서는 삼차방정식 해의 작도(불)가능성으로 귀착되는 배적문제와 각의 3등분선 작도문제만을 해결할 수 있었다. 즉 초등수학적 접근은 삼차방정식 해의 작도(불)가능성에 대해서는 의미로운 접근을 제시할 수 있었지만, 다른 작도 문제의 해결에서는 효과적인 도구가 되지는 못했다. 원적문제에 대한 초등수학적 접근에 대해서는 후속적인 연구가 필요할 것이다.

본 연구에서 개발된 자료들은 중등학교의 수학 우수학생들, 대학생들, 수학교사들이 3대 작도불능문제 및 삼차방정식 해의 작도(불)가능성을 학습하고 탐구하는데 체계적인 학습 자료로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

김응태 · 박승안 (2011). 현대대수학, 서울: 경문사.
Kim E.T., Park S.A. (2001). *Modern Algebra*, Seoul: Kyungmoonsa.
신현용 (2007). 교사를 위한 추상대수학, 서울: 교우사.
Shin, H.Y. (2007). *Abstract Algebra for the Teachers*, Seoul: Kyowoosa.
신현용 (2016a). 대칭: 갈루아 유언, 서울: 승산. 출간예정.
Shin, H.Y. (2016a). *Symmetry: Testamentary Letter of Galois*, Seoul: Seungsan.(To be published).
신현용 (2016b). 美: 갈루아 이론, 서울: 승산. 출간예정
Shin, H.Y. (2016b). *Beauty: Galois Theory*, Seoul: Seungsan.(To be published).
유클리드 (1998). 기하학 원론-평면기하- (이무현 역), 서울: 교우사.
Euclid (1998). *The Elements*, Seoul: Kyowoosa. (Translated by Lee M.H.)
유클리드 · 토마스 히드 (1998). 기하학원론 해설서-평면기하- (이무현 역), 서울: 교우사.
Euclid & Heath T. (1998). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Seoul: Kyowoosa. (Translated by Lee M.H.)
최상기 (2013). 예비교사를 위한 현대대수학, 서울: 경문사.
Choi S.K. (2013). *Modern Algebra*, Seoul: Kyungmoonsa.
프라소로프 (2009). 평면기하학의 탐구문제들 (한인기 역), 서울: 승산.
Prasolov V.V. (2009). *Mathematical Problems of Plane Geometry*, Seoul: Seungsan. (Translated by Han I.K.)
Fraleigh J.B. (2016). 현대대수학 (강병욱, 강변련 역), 서울: 피어슨에듀케이션코리아.
Fraleigh J.B. (2016). *Abstract Algebra*, Seoul: PearsoneducationKorea. (Translated by Kang Y.U., Kang B.R.)
한인기 (2003). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.
Han I.K. (2003). *Mathematics History*, Seoul: Kyowoosa.
Aleksandrov I.I. (2004) *Sbornik Geometrichskih Zadach na Postroenie s Resheniyami*, Moscow: URSS.
Argunov B.I. & Balk M.B. (1957). *Geometrichskie Postroeniya na Ploskosti*, Moscow: Gos-UPI.
Heath T.L. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements Vol.1*, Cambridge: The University Press.
Kushnir I. (2013). *Poisk I Vdohnovenie(Geometriya na barrikadah)*, Moscow: MTsNMO.
Steiner J. (1939). *Geometrichskie Postroenie Vypolnyaemye s Pomoshyu Pryamoi Linii I Nepodviznogo Kruga*, Moscow: Gos-UPI.

Development of Learning Materials on Constructibility of Roots of Cubic Polynomials

Hyunyong Shin
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education, Cheongju, Chungbuk, Korea
E-mail : shin@knue.ac.kr

Inki Han†
Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University, Gyeongsangnamdo, Korea
E-mail : inkiski@gnu.ac.kr

In this research, we develop a systematic learning the materials on constructibility of cubic roots. We propose two sets of materials: one is based on concepts of field, vector space, minimal polynomial in abstract algebra, another based on properties of cubic roots in elementary algebra. We assess the validity, applicability, defects and merits of developed materials through prospective teachers, in-service teachers, and professionals. It could be expected that materials be used for advanced secondary students, mathematics majoring college students and mathematics teachers. Furthermore, we may expect the materials be useful for understanding and solving the (un)constructibility problems.

* ZDM Classification : U15
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U99
* Key words : Root of cubic polynomial, Constructibility problem, Unconstructibility problem
† corresponding author