韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2016.30.4.435
제 30집 제 4호, 2016. 11. 435-452

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 30, No. 4, Nov. 2016. 435-452

GeoGebra 를 활용한 반힐레 기하교수법에서 도구화에 관한 연구

임 현 정 (단국대학교 교육대학원)
고 상 숙 (단국대학교)†

본 연구는 기하학습에서 공학도구를 활용하였을 때 도구화가 어떻게 이루어지는지와 이 도구화가 교수법과는 어떤 관계인지를 살펴보고자 하였다. 이를 위하여 중학교 학생 두 명을 대상으로 공학환경에서의 van Hiele 교수학습 모델에 근거한 4차시 학습지도안이 구성되었고 2015년 5월 관찰과 면담을 통해 자료수집이 이루어졌다. 학생들의 도구화는 준비기, 적응기, 응용기의 과정을 거치는 것으로 파악되었는데 학습차시를 진행하면서 시각화에 의존하는 준비기와 적응기에는 실제 시행착오적 과정이 활발히 일어남을 알 수 있었다. 하지만 시각화가 덜 필요한 단계, 즉 응용기에서는 도구의 역할이 자신의 추측과 정당화를 확인하는 것으로 바뀌는 것을 알 수 있다. 따라서 교사는 학생들의 이해수준에 맞추어 도구화 과정에 따른 교수법을 구성하여야 하며, 공학 도구사용이 학생의 학습을 자기주도적 학습으로 변화되도록 도와야 한다. 교사는 교수법에서 학생들의 도구화 과정에 대해 전체적인 구조를 파악할 수 있는 심도있는 고찰이 요구된다.

Ⅰ. 서론

1. 연구의 목적 및 필요성

2015년 2월에 발표된 제2차 수학교육 종합 계획에는 3가지의 추진 전략과 9가지의 추진과제(교육부, 2015)를 포함하였는데 9가지 추진과제 중 두 번째인 "체험ㆍ탐구 중심의 수학교육"에는 '체험ㆍ탐구 중심의 수학수업을 위한 교구, SW 및 첨단 IT 활용 지원'을 언급하고 있어 앞으로 수학수업에서 공학도구의 활용은 더욱 활발하게 이루어질 것이고 따라서 이를 안내하는 연구가 더욱 필요하다는 것은 두말할 나위 없다.

최근에 공학도구를 활용하는 수학 교수·학습 관련 연구에서 Trouche(2004)가 언급하기 시작한 도구화란 주제가 자주 언급된다(e.g., 한세호 외, 2009; 김진환 외 2010; 고상숙 외, 2015). 수학수업에서 사용되는 도구란 학습과정에서 다루어지는 연장의 일부를 뜻하며, 도구화는 그 연장을 효과적으로 사용하여 특정 유형의 과제를 달성하기 위해 사용자(교사나 학생)가 도구를 활용하면서 얻게 되는 정신적인 또는 행동으로서의 scheme이 이루어지는 과정을 뜻한다(Trouche, 2004). 광범위하게는 도구화는 인류가 연장을 사용한 때부터 이미 시작되었다고 할 수 있으며 다른 존재와 다르게 인류는 이를 뛰어나게 사용해옴으로써 문명의 발전을 이루어왔다. 문명의 발전은 바로 이런 도구들의 혁신을 통해 가능했던 것이다. 현재도 컴퓨터, 계산기, 스마트폰, 나아가 웨어러블 기기까지 그 활용도는 우리의 상상을 뛰어넘는다. 따라서 수학교육에서 도구화에 대한 연구도 더욱 활성화될 필요가 있다. 본 연구에서는 이런 공학도구 활용에 대한 시대적 흐름에 힘입어 중학교 기하수업에서 GeoGebra를 활용

* 접수일(2016년 2월 11일), 심사(수정)일(1차: 2016년 4월 18일, 2차: 2016년 6월 30일, 3차: 2016년 9월 21일), 게재확정일(2016년 11월 9일)
* 본 논문은 임현정(2015) 석사논문에서 발췌되었음.
* ZDM분류 : C73
* MSC2000분류 : 97C70
* 주제어 : 기하학, 공학도구, 도구화, 반 힐레 기하교수법
† 교신저자 : sangch@dankook.ac.kr

하였을 때 도구화는 어떻게 이루어지는지 그리고 기하교수법과 관계는 어떠한지 조사하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학교육에서 공학도구[1)]

2000년 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)의 “Principles and Standards for School Mathematics”에 제시된 여섯 가지 학교 수학의 원리 중, 기술공학의 원리에서는 다음과 같이 밝히고 있다.

> 기술공학은 수학을 가르치고 배우는 데 필수적인 요소이다. 기술공학은 가르쳐야 할 수학 내용에 영향을 주며, 학생들의 수학 학습 능력을 높여준다. 수학적 사고를 시각적으로 표현할 수 있으며 자료를 정리하고 해석하는 일을 돕는다. 또한 효율적이고 정확한 계산을 가능하게 한다. 기술공학은 기하, 통계, 대수, 측정, 산술 등 수학의 모든 분야에서 학생들의 탐구과정을 지원할 수 있다. 이 기술공학을 이용할 때 학생들은 의사결정, 반성, 추론, 그리고 문제해결에 초점을 둘 수 있다(NCTM, 2000, p. 24).

기기의 발달과 더불어 수학교육에서 공학도구의 활용은 2015년 개정교육과정에 핵심역량에 포함되었으며 더욱 발전해나가고 있다. 산업 혁명 이후 수학에서도 사칙 연산기, 컴퓨터, 공학 계산기, 인터넷 및 슈퍼컴퓨터의 활용 등 기술공학의 혁신적인 발전이 지속되어 왔으며, 수학을 가르치고 학습하는데 필수적인 도구가 되었다(김종화, 2013). 수학적 기술공학은 수학 문제의 답을 유도할 수 있는 도구로써의 기능뿐만 아니라, 궁극적으로 학생의 수학적 이해를 유발하고 관심을 증진시킬 것인가에 초점이 맞추어져 있다. 즉 수학적 기술공학을 복잡한 계산을 신속, 정확하게 계산하는데 사용할 수도 있지만, 수학적 개념을 지도하는 과정에서도 활용할 수 있기 때문에 수학 교수·학습 방법의 측면을 살펴 볼 필요가 있다. 나아가 수학교육에 발전된 기술공학을 활용할 때, 수학 교수·학습 방법뿐만 아니라 내용적인 면에서도 변화를 가져올 것이다(NCTM, 1989, 2000; 강옥기 외, 2012; 고상숙 외, 2015).

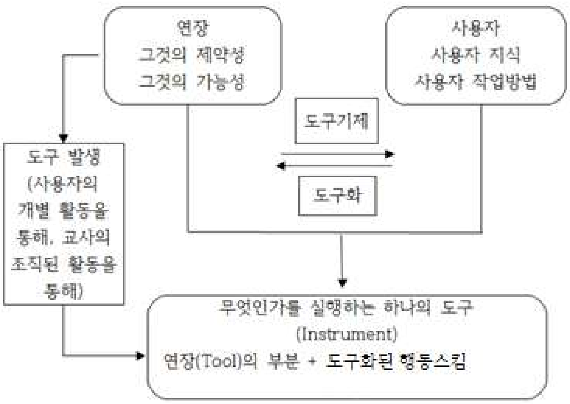
다시 말해 수학적 기술공학의 활용을 통해 수학적 사고를 시각적으로 표현하고 자료의 정리, 분석, 표현을 용이하게 하여 학생들에게 좀 더 정확하고 효율적인 계산을 가능하게 지원할 수 있고, 단지 단순 계산을 통한 답을 이끌어 내는 과정이 아닌, 의사결정, 반성, 추론, 문제해결에 학생들은 초점을 두어 기술공학을 이용할 수 있다. 하지만 기술공학은 이해와 직관을 기르는데 사용되어야 하며 대체물로 사용되어서는 아니 된다(류희찬 외, 2007). 여러 컴퓨터 프로그램 중 GeoGebra는 기하, 대수, 미적분, 통계, 이산수학, 3차원 기하 등을 하나의 환경안에서 통합적으로 다룰 수 있는 ‘움직이는 수학 소프트웨어(Dynamic Mathematics Software)’이다(최경식, 2012). 이를 증명하듯 이상구 외(2014) 연구에서는 추상적인 수학적 개념의 직관적 이해를 바탕으로 대학 미분적분학 교재의 순서에 맞추어 학생들의 이해를 도울 수 있는 교수자료를 개발하였는데 이는 학생들에게 시뮬레이션 도구를 활용하여 개념의 이해와 함께 새로운 지식을 생산할 수 있는 교육환경을 제공함으로써 GeoGebra의 무한한 가능성을 보였다. 또한 양성현과 강옥기(2011)에서는 고등학교 이차곡선 단원 중 포물선에 관련된 부분을 분석하여 시각적 표상을 극대화할 수 있는 실험적 수업을 진행하고 학생들의 표상의 변화를 분석하였다. 연구결과 GeoGebra를 활용한 시각적 표상을 이차곡선의 지도에 병렬적으로 첨가하여 지도하는 것은 학생들의 시각적 표상을 증진시키고 대수와 기하의 연결성을 확고히 해줌으로써 대수와 기하의 다면적 이해를 촉진할 수 있다고 하였다.

---

1) 영어 technology가 한글로 기술공학으로 번역되고 수업에서 이를 도구로 활용할 때 공학도구로 쓰였다.

GeoGebra는 Geometry(기하학)과 Algebra(대수학)이 합쳐서 만들어진 단어로 기하와 대수를 교육하는데 사용할 수 있는 동적 기하 소프트웨어라고 정의될 수 있다. 오스트리아 짤스부르크 대학원 Markus Hohenwarter에 의해 2001년 개발되었으며 학생들이 학교 수업을 더 효과적이고 쉽게 배울 수 있도록 돕기 위한 자바 소프트웨어이다. 개발자는 수학교육과 컴퓨터 공학을 복수로 전공한 후, 움직이는 기하와 컴퓨터 대수 시스템을 결합하는 소프트웨어를 구현하며 2002년 인터넷을 통하여 초기버전을 공개하였다. 오스트리아 및 독일에서 수학 교수용으로 GeoGebra를 사용하기 시작하였고, 긍정적인 피드백을 통하여 훨씬 유용하고 폭 넓은 기능을 가진 소프트웨어로 발전시키고자 꾸준히 개선을 도모하고 있다. 이후 한국어로 번역되었으며, 무료 소프트웨어 프로그램으로써 인터넷에서 GeoGebra의 공식 홈페이지(http://www.geogebra.org)를 통하여 다운받을 수 있다. 일선 학교에서 GeoGebra를 활용한 연구가 더욱 활발히 이루어지고 있다(최경식, 2010). 현재 GeoGebra 연구소 네이버 카페(http://cafe.naver.com/geogebra)는 회원수가 8,000명이 넘을 정도로 성장하였음을 알 수 있는데 IoT(Internet of Things)시대라는 미래 사회에서는 교사와 학생들을 포함한 사용자들에 의해 더욱 왕성하게 사용될 것으로 예측된다.

2. 공학도구의 도구화



[그림 II-1] 도구발생과정(Trouche, 2004)

도구의 발달에 대한 개인, 사회적 본질을 연구한 Trouche (2004, p.8)는 [그림 II-1]과 같은 결과를 도출하였다. 그는 [그림 II-1]에서 도구적으로 가치가 없는 가공물(artifact)의 잠재적인 기능(function)을 파악하여 특정한 목적(purpose)에 맞추어 변형(adapt)하여 사용하는 것을 가공물의 도구화(instrumentalization)라 하였고, 그 도구로 인하여 발생하는 행동(instrumented action)을 통해 과제를 효율적으로 처리하도록 하는 기술(technique)이 점진적으로 발달하게 되고 그 결과 스키마(schema)의 발달이 이루어질 때, 연장(tool)이 도구기제instrumentation)로 사용된다고 하였다(김진환 외, 2010, p. 613 재인용; 고상숙 외, 2012). 이 때 관찰자는 학습자의 도구화 정도를 학습자의 도구발생에 의해 구체화하여 나타나는 행동스킴을 근거로 판단할 수 있게 되는데, Rabardel(1995)는 도구발생을 사용스킴(US)[2]과 도구화된 행동스킴(IAS)[3]이 복합된 것으로 보았다. 그는 사용자가 도구를 켜거나

[2] Usage Scheme(US)
[3] Instrumented Action Scheme(IAS)

화면을 조정하는 등의 단순한 행동을 “사용스킴(US)”이라 하였고, 사용자가 함수극한을 구하는 것과 같은 세부적인 과제를 수행하고자 행하는 행동을 “도구화된 행동스킴(IAS)”이라고 하였다(Trouche, 2004, 재인용, p. 6) 도구기제가 학습의 제약성으로 작용하기도 하는데, 이는 도구를 사용하기 위하여 요구되는 지식과 방법이 사용자의 기존 인식과 차이가 날 때 발생한다. 제약성은 대부분 학생들이 도구 사용으로 예기치 않은 답을 얻게 되는 상황에서 벌어지는데, Drijvers(1999)는 도구기제 과정에서 우연히 만나게 되는 도구의 제약성이 또 다른 수학주제에 대한 학습 기회를 제공한다고도 하였다(한세호 외, 2009 재인용).

도구화에 대한 국내연구는 그리 많지 않지만 한세호(2010)에서는 CAS(Computer Algebra System)를 활용한 최적화 문제해결의 교수학적 의의로서 첫째, 도구화는 추측 및 발견활동을 촉진시키고, 수학적 모델링을 용이하게 하며 계산 알고리즘보다는 의미에 주목하게 하고, 둘째, CAS는 수학교육의 초점과 교육과정의 내용 제시 순서를 바꿀 수 있는 가능성을 보였으며, 셋째, 수학 교육과정 내용을 줄일 수 있는 여건을 조성할 수 있다는 점을 밝힘으로써 미래 공학도구의 활용이 수학교육과정에 미칠 영향을 피력하였다. 김진환과 조정수(2010)의 연구에서는 CAS를 도구로 활용한 다양한 사례의 생성과 관찰을 통해 특성이나 패턴을 찾고, 분류하고. 추측을 만들고 추측을 입증하는 수학적 활동을 제안하였는데 이런 수학적 발견의 과정에 입각한 탐구에서 기능적 조작이나 정형화된 기호 알고리즘을 적용하는 사례의 구성 또는 과제수행을 공학 도구에 맡김으로써 실행의 결과에 집중할 수 있다고 주장하였다.

우리가 수학문제를 해결할 때 막히는 경우가 종종 발생한다. 이것은 자신이 알고 있는 것을 적절히 활용하지 못하거나 해결하고자하는 다음 단계에 무엇을 해야 할 바를 모르는 때이다. 하지만 공학도구 환경에서는 적어도 시행착오적 방법을 사용하여서라도 문제의 해결의 실마리를 모색해볼 수 있다. 이에 대해 Dreyfus(1992)는 “컴퓨터 환경에서 학생들은 도구의 구체적인 특성을 사용하여 조사하고 학생 스스로에게 어떤 수학적 연산이 수행된다면 어떻게 될까를 묻는다. 이처럼 문제 상황에서 학생의 생각은 더욱 유동적이 된다. 학생들은 그들 앞에 적절한 도구가 놓여있기 때문에 실험적 접근에 참여하게 된다”(p. 263)고 밝힌 바 있다.

위에서 조사되었듯이 컴퓨터 환경은 학생들에게 능동적인 학습 환경을 제공하기 때문에 수학 교수·학습 방법을 모색하는데 꾸준한 연구가 이루어져야 한다.

3. van Hiele의 기하사고수준과 기하교수법

기하교육에서 수학적 사고의 수준을 제 0수준부터 제 4수준까지 총 다섯 단계로 분류하고 이는 모든 수학 영역에 본 이론이 적용된다고 주장하며 수, 함수 등의 학습 수준을 거론하였다(van Hiele, 1986: Hoffer, 1983). 이는 시각적 인식의 수준부터 도형의 분석적 수준, 이론적 배열 수준, 연역 추론 수준, 그리고 마지막 수준인 기하학의 엄밀화 수준으로 발달 된다고 보았다(이중권, 2006). 또한 van Hiele(1986)에서 위 5 수준을 제 1수준부터 제 5수준으로 수정한 후 고등학교 학생들의 기하수준이 그리 높지 않음을 파악하고 현장교실에서 적용을 위해 제 1수준부터 제 3수준으로 재조정하였다.

van Hiele는 학생들의 기하 학습은 이러한 기하사고수준에 따라 일정한 발달 단계를 거치며, 그에 따라 각 단계별 기하교육이 이루어져야 한다는 기하교수법[4]을 그의 아내 van Hiele-Geldof의 연구(1984)에 의해 주장하였다(Choi, 1996). 이 이론의 핵심은 학생들의 발달 단계 즉, 수준에 맞는 기하 교육 과정 및 교재의 구성이며 기하교육은 학생들의 각 기하 사고 수준을 고려하여 그 수준에 따른 학습과정을 통해 수준 향상을 이룰 수 있다는 것이다.

---

[4] 반 힐레 기하교수법은 ① 정보, ② 안내된 탐구, ③ 명료화, ④ 자유로운 탐구, ⑤ 통합으로 마무리되는 5 단계로 구성되어 있다(강옥기 외, 2012).

Ⅲ. 연구방법

본 연구는 중학교 3학년 학습부진아 학생들을 대상으로 GeoGebra를 사용하여 연구자와 임상면담을 통해 사각형의 성질 단원의 기하 학습 수준 변화 과정을 질적 사례연구방법을 이용하여 연구하였다. 질적 사례연구는 자료를 수집하고 조직하여 분석하는 것에서 연구 참여자에게 무슨 변화가 일어났는지 과정중심의 사례를 깊이 있게 분석하는 것이다(Merriam, 1998). 이 연구에서 사례에 대한 정보는 학습과정의 녹음, 관찰자의 기록지, 학생들의 메모, 활동자료 등을 통해 수집되었다.

1. 연구 참여자

경기도 성남시 분당구 소재의 중학교 3학년 학생 2명(남학생 1명, 여학생 1명)을 대상으로 수업이 이루어졌다. 이 학생들은 자원하여 참여하였으며 이들의 이름은 가명으로 하였다.

<표 Ⅲ-1 > 연구 참여자

학년	이름	성별	수학 성취율[5]
중학교 3학년	철수	남	D
중학교 3학년	영희	여	C

학생들은 수학학습에 부진을 겪고 있어서 연구자와 3개월 이상 함께 공부해 온 학생들로서 연구자는 학생들의 수준을 잘 인지하고 있었다. 이미 중학교 2학년 사각형의 성질 단원에 대한 학습이 이루어진 상태지만 학습 성적 및 이해도가 높지 않아 복습 단원으로 선정하였다.

철수는 외동으로 장난 끼가 많고 말이 많은 학생이다. 성남시 분당에 위치한 중학교를 다니며, 컴퓨터 다루는 것을 몹시 좋아한다. 중학교 2학년 2학기 중간, 기말 성적은 이해와 수행이 다소 미흡한 수준인 D등급이고, 수학에 대한 두려움이 있으며, 자신감도 많이 결여되어 있었다. 중학교에 올라와서 수학이 어려워져 흥미가 떨어졌다고 말하였다. 하지만 수학이 일상생활에서 많이 쓰이고 있다고 생각하며 살아가는데 필요한 과목이라 말하는 학생이다. 모르는 문제에 대해서는 부끄러움 없이 질문을 적극적으로 잘하며, 친구의 도움도 많이 받는다고 하였다.

영희는 두 자녀 중 차녀로 적극적인 성격이며 예의가 바르다. 문제를 풀 때 질문이 많으며, 평소에 컴퓨터를 거의 사용하지 않는다고 하였다. 같은 중학교 2학년 2학기 중간, 기말 시험 성적에서 이해와 수행이 보통 수준인 C등급이고, 수학을 좋아하고 흥미가 높지만, 수학이 어렵다고 생각하는 학생이다. 수학문제를 풀 때 잘 이해하지 못한 채 풀거나 다양한 사고를 하기 보다는 기존에 교사가 알려준 방식만 고집하여 푸는 편이다. 그리고 쉽게 풀리지 않는 응용문제를 끝까지 도전하지 않고 중도 포기한 경우가 많이 있다. 학교 수업에서 각도기, 컴퍼스, 자 등을 활용하여 수업한 것을 인상 깊게 생각하고 다양한 도구를 활용하고 싶어 하는 학생이다. 수업에서 직접 수학 소프트웨어를 조작하여 수업한 경험은 전혀 없었다고 하였다.

이 두 학생은 지난 학기 수학에 대한 이해와 수행이 보통 이하였다. 두 학생 모두 사각형의 성질 단원의 증명 부분이 특히 어려웠다고 하였다. 즉 그들이 중학교 도형에 관한 기초(반 힐레 제 3수준까지)를 다질 필요가 있음으로 진단되었다. 이들 모두 컴퓨터 프로그램을 이용한 수업에 거부반응이 없었으며 오히려 기대감을 나타

[5] 일정 기준 이상의 점수를 받으면 동일 등급(A-B-C-D-E-F)을 부여하는 내신 산출 방법이다.

내었다. 컴퓨터 프로그램인 GeoGebra를 활용한 탐구 활동 위주의 수업방식은 학생들의 기하 수준을 상승하는데 많은 도움이 될 것으로 사료되었다.

2. 연구절차 및 분석

연구 도구인 학습 자료를 개발한 후 그 효과를 파악하기 위해 부진아이지만 공학에 대한 선호도가 약간 다른 두 명의 학생을 대상으로 연구를 실시하였다. 두 학생의 학습과정을 녹음하였고, 관찰자의 기록지, 학생들의 메모, 활동 자료 등 데이터가 수집되었다. 특히 수업 녹음 자료는 코딩체계의 범주화를 거쳐서 정리되었다. 코딩체계의 범주화는 기하영역은 Choi(1996), 담론부분은 강현희(2009)의 연구를 참고하였으며 다음 <표 III-2>와 같다. 특히 Choi(1996) 연구는 삼각형의 성질에 대한 반 힐레 교수·학습 모델을 제시한 것이므로 이를 참고하여 평행사변형에 대해 교수·학습 자료를 개발하였고, 수학교육전공 교수 2인의 전문가에게 피드백을 받아 수정하였다.

van Hiele 기하학습 수준 이론(van Hiele, 1986)에 따라 수준 1부터 수준 3까지의 기하내용을 구성하였다. 수준 1에서는 기하학적인 용어(삼각형, 다각형 등)나 도형을 인식할 수 있는 단계이므로 도형의 이름(Name)을 구분 및 구별(Discriminate)하는 특징으로 구성하였다. 수준 2에서는 관찰과 실험을 통하여 도형의 구성요소나 성질을 분석할 수 있는 수준이므로 성질(Properties)로 구분하였다. 수준 3에서는 한 도형 또는 다른 도형 사이에서 존재하는 성질들의 논리적인 관계를 파악 할 수 있으며 도형의 포함관계가 이해되는 단계이므로 도형간의 관계(Relations)와 포함관계(Inclusion) 및 함의(Implication)를 넣어 구분하였다.

<표 III-2> 코딩 체계의 범주화

기하사고수준	수준의 특징	담론
수준 1 (직관적 이해)	이름(Name): 1N	질문하기: Q, 대답하기: A, 설명하기: E.
	구별(Discriminate): 1D	
수준 2 (분석을 통한 성질 파악)	성질(Properties): 2P	
수준 3 (비형식적 연역을 통한 관계 파악)	관계(Relations): 3R	
	포함관계(Inclusion): 3I	
	함의(Implication): 3M	

학습 자료의 1~2차시는 기하사고 수준 1에서 수준 2로, 3~4차시는 수준 2에서 수준 3으로 학생의 수준이 발달할 수 있게 개발하였다. 수업을 모두 마친 후에 전사 자료를 코딩체계로 분석하였는데 각 차시별 수업에 따라 1~4의 숫자로 표현하였다. 교사는 T, 학습자는 Y, K로 코딩하였고 담론의 순서에 따라 001,002,003...을 사용하였다. 설명(Explain)에는 E, 질문(Question)에는 Q, 대답(Answer)에는 A를 부여했다. 예를 들어 2Y2PQ001은 2차시에 영희가 수준 2의 성질 단계를 질문하는 첫 번째 발언을 뜻하는 코드인 것이다. 아래 [그림 Ⅲ-1]는 본문에 있는 프로토콜 3으로서 각 대화가 코드명으로 코딩된 예시를 나타낸 것이다.

<프로토콜 3> 2차시 2단계의 담론일부
2YA008 : 선생님, 점을 정확하게 찍는 게 어려워요.
2KA009 : 격자 이용하면 쉬워.
2TA010 : 오, 철수 아주 좋은 의견이에요. 영희에게 어떻게 하는지 철수가 설명해 볼까요?
2KE011 : '이동' 누르고 두 번째 아이콘을 선택하면 격자가 나와.
2YA012 : [헤매면서] 잘 모르겠어.

[그림 III-1] 코딩된 프로토콜의 예시

3. 연구 도구

연구 수행의 첫 과정은 학습 자료를 개발하고, 개발된 자료의 효과를 학습과정에서 파악하기 위해 질적 연구 중 사례연구방법을 택하였다. 연구자는 자료개발을 위해 우선 중학교 교육과정과 교과서 상에서 진행되는 기하 수준발달의 변화를 파악하고 GeoGebra를 활용하였을 때의 효과 및 주의점을 숙지하였다. 또한 이를 실제 수업하였을 때 고려해야 하는 기하교수법의 특징과 GeoGebra 활용 범위에 대해 수학교육 전공자 2분의 자문을 바탕으로 지도안을 구성하였고 미리 수업에 대한 시뮬레이션을 수차례 실시하여 이를 여러 번 수정 보완하였다. 구체적으로는 학습 자료의 수학내용으로 중학교 2학년 사각형의 성질 단원을 선정하였고, 이에 대해 기하사고 1수준에서 3수준으로 발달을 돕고자 van Hiele의 5단계 기하교수법을 반영하였다. 연구 내용 구성[6]은 <표 Ⅲ-3>과 같다.

<표 III-3> 수업 전개 내용

차 시	날 짜	수업 내용	기하사고수준	교수 · 학습 단계
0차시	2/22	GeoGebra 설명 및 안내	·	·
1차시	3/1	평행사변형의 성질	1수준⇒2수준	1~5단계[7]
2차시	3/6	여러 가지 사각형의 성질	1수준⇒2수준	1~5단계
3차시	3/13	평행사변형이 될 조건	2수준⇒3수준	1~5단계
4차시	3/20	여러 가지 사각형이 될 조건	2수준⇒3수준	1~5단계

앞서 언급되었듯이 도구발생은 활용스킴을 구성되게 되는데 이는 사용스킴(US)과 활동 그 자체를 다루는 도구화된 행동스킴(IAS)이라는 두 가지 차원으로 진행된다(Trouche, 2004 재인용). 이들은 긴밀히 연결되어 있어서 구분하는 것은 의미가 없을 수 있으나 도구가 연장자체로는 의미가 없으므로 행동을 가능하게 하는 주체가 어느 쪽이냐에 따라 구분해볼 수 있다. 제 1차시의 내용의 도구발생 요소는 <표 Ⅲ-4>와 같다.

---

[6] 공간상 제약으로 인해 지도안은 임현정(2015)에서 구할 수 있다.
[7] 반 힐레 기하교수법은 ① 정보, ② 안내된 탐구, ③ 명료화, ④ 자유로운 탐구, ⑤ 통합으로 마무리되는 5 단계로 구성되어 있다(강옥기 외, 2012).

<표 III-4> 1차시의 도구발생 관련요소

목록	1차시의 도구발생 관련요소	도구화된 행동스킴(IAS)	사용스킴(US)
1	• 메뉴에서 – [보기] 설정하기 (대수창, 기하창)		○
2	• 평행사변형을 그리기 위해 도구상자를 사용하기 (점, 직선, 평행선, 다각형)	○	○(단축키)
3	• 평행사변형의 성질을 찾기 위해 도구상자를 사용하기 (변의 길이, 끼인 각의 크기, 대각선의 교점)	○	○(아이콘 및 단축기)

Ⅳ. 연구결과

1. GeoGebra를 활용할 때 도구화 특징

본 연구는 현대 사회의 수학교육에서 다양하게 시도된 방법 중 공학도구, 즉 GeoGebra를 활용한 기하교수법에서 도구화를 조사한 것이다. 그 과정에서 학생들의 도구화 과정을 통한 성취 및 특징을 관찰할 수 있었으며, 도구화가 진행되는 과정은 다음과 같이 요약되었다.

(1) 준비기

<표 Ⅳ-1> 학생들의 도구화 진행 과정

수업 / 대상	0차시	1차시	2차시	3차시	4차시
영희	준비기	적응기			응용기
철수	준비기	적응기			

준비기는 학생들의 적극적인 수업 태도를 이끌어 내기 위한 과정으로, 우선적으로 학습 내용과 도구 활용에 흥미를 유발하기 위해 수업 방식을 설명하여 인식시키는 단계이다. 이 때 교사는 공학도구의 장점인 시각화를 활용하여 준비과정이 흥미롭고 가치있음을 학생들로 하여금 경험할 수 있게 도와야 한다.

0차시 수업에서는 각 버튼의 기능과 명령어에 대한 의미를 이해하는 시간으로 기본 도형의 작도를 통해 공학도구와 익숙해지는 시간을 가졌다. 이것은 도구의 특성을 파악하는 과정으로써 도구기제를 이루어가는 과정이었다. 시간이 지남에 따라 학생들에게 임의의 도형들을 자유롭게 조작해 볼 수 있게 하였으며 철수의 경우, 직접 활동을 해봄으로써 점차 도구의 활용성을 깨닫고 여러 가지 도형들을 빠르게 그릴 수 있게 되었다.

이런 수업 이후에 1차시부터 수업을 들어가서 도구의 위치 및 활용에 설명을 하였더니 본 연구자가 처음 조작했을 때보다 더 잘 따라와 주었다. 1차시 수업에서는 GeoGebra를 사용한 평행사변형 작도를 진행하였고 이를 토대로 평행사변형의 성질에 대해 학습하였다. 두 학생의 경우에는 수학교육의 도구 활용이 각각의 성향으로 나누어졌는데, 철수의 경우 평소 흥미를 가지지 못하였던 수학 교과임에도 도구를 활용한 수업방식으로 인해 긍정적이고 적극적인 태도로 변화한 것을 알 수 있었다. 철수는 <프로토콜 1>과 같이 영희에게 자신이 아는 부분도 정확하게 설명해주는 모습을 보였다. 반면, 영희는 도구를 다루는 것을 어려워하여 도구를 활용하는 수업 방식에 다소 어색해하였다.

(2) 적응기

준비기에서는 기하학습에서 도구의 기본 개념을 숙지하고 도구와 익숙해지는 단계였다면, 적응기 과정에서는 도구의 특징을 활용하여 학습내용을 자신의 도구를 통해 학습하는 단계이다. 즉, 도구화된 행동스킴(IAS)이 이루어지는 과정이다. 적응기에서는 교사의 역할이 서서히 감소하고 학생들의 주도하에 학습을 이끌어 나갈 수 있게 된다. 하지만 기본적인 도구의 사용법에 문제가 생기면 교사는 학생을 안내하고 도와주어야 한다. 이 때 비로소 사용자는 도구에 대해 능동적인 주체자가 되고, 수학적 성질에 따라 도형을 스스로 작도할 수 있는 능력을 함양해간다.

<프로토콜 1> 1차시 2단계의 담론일부

교사 : 이번 시간에는 평행사변형의 성질을 알아 볼 거예요. 우리 GeoGebra를 이용해서 알아볼게요. 먼저, 평행사변형을 작도해볼 거예요. 선생님 컴퓨터를 먼저 보고 그 다음 각자 컴퓨터로 작도해보도록 할게요. [GeoGebra를 이용하여 점을 찍고, 선분을 그린다.]

영희 : 선생님, 천천히 해주세요. 헷갈려요.

교사 : 아, 그럼 선생님이 다시 천천히 해볼게요. [다시 천천히 작도하는 모습을 보여준다.] 여러분, 어떤 걸 클릭해야 점을 찍을 수 있고, 선분을 그릴 수 있는지 외우지 말고 각 도구상자에 마우스만 갖다 대 보세요. 그러면 아래쪽으로 설명이 나와 있어요. 서두르지 말고 천천히 읽어보면서 그리면 어렵지 않아요.

영희 : 아, 그러네요. [그림을 그리면서] 설명을 차근차근 읽으면서 하니까 헷갈리지 않네요.

교사 : [자리로 다가가면서] 철수는 다 그렸나요?

철수 : [여유있게] 네. 지난 시간에 이것저것 눌러봤었던 기억이 나요.

교사 : 아, 철수는 그럼 지난 오티 시간에 자유 시간 줬을 때 스스로 터득한게 있었군요.

철수 : 음 그냥 생각이 났어요. [자신의 것을 영희에게 설명해준다.]

교사 : 네, 여러분 GeoGebra라는 프로그램을 통해서 작도해보니까 어때요? 자와 연필로 선을 그어서 그리던 것과는 다르게 정확하게 작도가 가능하죠?

철수 : 마우스 클릭 몇 번으로 제가 원하는 도형이 만들어지는 것이 신기해요. 마치 컴퓨터 프로그래머가 된 기분이에요.

교사 : 맞아요. 자로 긋는 것보다 더 정확하게 작도가 되니 이해하기도 쉬울거예요. 철수는 좋아하는 컴퓨터로 수업하니깐 기분이 좋아 보이네요.

철수 : 네! 당연하죠.

특히 위 프로토콜에서 철수가 이것저것을 눌러보는 것은 두 가지 경우이다. 연구초반에 작도에 필요한 명령버튼을 익혀서 도구의 가능성과 제한성을 파악하는 경우와 자신이 작도한 도형의 성질을 시각적으로 파악하고자 하는 경우이다. 후자의 경우, 마우스로 이것저것을 눌러봐도 작도한 도형은 평행사변형을 유지하고 있을 뿐만 아니라 도형의 크기나 모양을 바꾸어도 평행사변형의 성질이 보존된다는 사실을 통해 평행사변형의 성질을 재인지 하게 된다. 이처럼 시각화에 의한 시행착오적 접근은 공학도구가 학생들에게 탐구적 환경을 제공하는 가장 큰 장점이다.

2차시 수업에서 GeoGebra를 활용하여 도구에 익숙해 질 수 있도록 반복적으로 실행하였다. 철수는 교사가 설명해주지 않은 GeoGebra의 도구 기능을 이미 적용하여 작도하고 있었음을 <프로토콜 2와 3>을 통해 알 수 있다. GeoGebra의 사용을 다소 낯설어하는 영희를 도와준 철수 덕분에 두 학생들은 비교적 쉽게 GeoGebra를 사용하여 여러 사각형을 작도할 수 있게 되었고 그에 따라 각 사각형의 성질 표현에 능숙해질 수 있었다. 1, 2차시 수업을 통해 GeoGebra의 특성을 이해하고 조작할 수 있도록 교육한 결과, 학생들이 1수준에서 2수준으로 도약한 것을 알 수 있었다.

<프로토콜 2 > 1차시 2단계의 담론일부

교사 : 잘 찾았어요. 그럼 이번엔 탐구활동 2번을 풀어볼까요? 각도는 상단에 도구상자에서 ‘각’을 클릭한 후 세 점 또는 두 직선을 선택해서 알아볼게요.

영희, 철수: 네!

영희 : 이상해요.. 각도가 자꾸 반대 각으로 표시가 돼요.

철수 : [영희를 쳐다보면서] 아, 그거 점 3개를 시계방향으로 각각 클릭하면 나와. [손으로 설명해준다.]

영희 : 응? 무슨 말이야? 어떻게?

철수 : [영희 컴퓨터에서 직접 알려준다.]

영희 : 아 그러네. 신기하네.

<프로토콜 3> 2차시 2단계의 담론일부

영희 : 선생님, 점을 정확하게 찍는 게 어려워요.

철수 : 격자를 이용하면 쉬워.

교사 : 오, 철수 아주 좋은 의견이에요. 영희에게 어떻게 하는지 철수가 설명해 볼까요?

철수 : ‘이동’ 누르고 두 번째 아이콘을 선택하면 격자가 나와.

영희 : [헤매면서] 잘 모르겠어.

철수 : [영희 자리로 가서 설명해준다.]

교사 : 철수는 어떻게 격자를 이용할 생각을 했죠? 정말 좋은 아이디어였어요.

철수 : 이것저것 눌러보다가 발견했어요.

철수 : 정말 격자를 이용해서 점을 찍으니까 훨씬 손쉽게 정확하게 찍을 수 있어요.

<프로토콜 4> 2차시 3단계의 담론일부

교사 : 그렇군요. 그럼 우리 탐구활동 2번을 토대로 직사각형, 마름모, 대각선의 성질을 서술해볼까요?

철수 : 음.. 직사각형의 성질은 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분합니다. 마름모의 성질은 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분 합니다. 정사각형의 성질은 두 대각선의 길이가 같고 서로 다른 것을 수직이등분 합니다.

3차시 수업에서는 지난 1차시와 같은 도형인 평행사변형을 작도하였다. 하지만 이번 차시에서는 학생들이 <프로토콜 5>와 같이 무리 없이 스스로 작도를 잘해주었다.

전개 (제한된 탐구)	※ Geogebra를 통해 그린 평행사변형ABCD을 관찰하고 다음 물음에 답해본다. <탐구활동1> ① $\overline{AB}$의 길이=3.16cm $\overline{DC}$의 길이=3.16 cm ② $\overline{BC}$의 길이=2.24cm $\overline{AD}$의 길이= 2.24cm ③ 평행사변형의 모양을 변형하면서 ①.②의 관계를 적어본다. ① $\overline{AB} = \overline{DC}$. ② $\overline{BC} = \overline{AD}$ <탐구활동2> ① ∠A의 크기= 81.87° ∠C의 크기= 81.87° ② ∠B의 크기= 98.13° ∠D의 크기= 98.13° ③평행사변형의 모양을 변형하면서 ①.②의 관계를 적어본다. ① ∠A = ∠C . ② ∠B = ∠D <탐구활동3> ① $\overline{AO}$의 길이= 2.06 cm $\overline{CO}$의 길이= 2.06 cm ② $\overline{BO}$의 길이= 1.8cm $\overline{DO}$의 길이= 1.8cm ③평행사변형의 모양을 변형하면서 ①.②의 관계를 적어본다. ① $\overline{AO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{DO}$

[그림 VI-1] 2차시 2단계 수업 지도안

<프로토콜 5> 3차시 2단계의 담론일부

교사 : 잘했어요. 오늘 이 시간에는 영희가 잘 말해준 평행사변형의 성질의 역도 참인지 거짓인지를 판단해보겠습니다. 선생님이 오늘도 GeoGebra를 이용해서 평행사변형을 직접 작도하도록 할게요.

영희 : 지난 첫 시간에 그렸었어요. 이번엔 스스로 해볼게요.

교사 : 그래요, 그럼 5분 동안 평행사변형을 그려보세요. [철수와 영희 모두 평행사변형을 무리 없이 그려나가는 것을 확인하였다.]

(3) 응용기

응용기의 학생들은 적응기를 거치며 익힌 도구 사용 방법을 구체화하고, 간단한 응용을 통해 수정, 변환하여 학습할 수 있는 능력을 습득한다. 이 과정에서 학생들은 교사가 제안하지 않아도 스스로 문제를 해결하거나 자신의 아이디어를 표현하고 그것을 증명하고자 하는 성향을 가지게 된다. 또한 새로운 내용을 적용하여 창의적인 방법으로 자신의 것을 정당화하고자 하는 노력이 관찰되었다.

4차시 수업에서는 두 학생 모두 능숙하게 GeoGebra를 사용하여 작도하는 모습을 관찰할 수 있었다. 특히 영희의 경우, 철수의 도움으로 GeoGebra 사용이 능숙해졌으며 자유로운 탐구단계에서 마름모와 정사각형의 포함관계를 정확히 인지하여 응용하는 모습까지 보였다. 반면, 철수는 GeoGebra의 도구 활용도는 높았지만 개념의 이해능력이 아직은 부족하여 영희가 보여주는 수준의 '도구화의 응용기'에는 도달하지 못하였다. 수학적 지식 및 이해가 조금 더 뒷받침된다면 도구를 통해 응용하는 것도 충분히 가능할 것이라 기대되었다.

<프로토콜 6> 4차시 3단계의 담론일부

영희 : [GeoGebra를 작도하면서] 선생님, 만약에 이 문제에서 선분AC, 선분BD가 같다는 조건이 있으면 정사각형이 되는 거죠?

교사 : 영희가 정확히 이해하고 있군요. 맞아요. 탐구활동에서 보면 마름모 조건에서 두 대각선의 선분의 길이가 같으면 정사각형의 조건이 되는 것을 알 수 있겠죠? 그럼 이제 오늘 배운 여러 가지 사각형의 성질들을 복습해볼게요. 영희가 정의와 성질을 각각 말해볼까요?

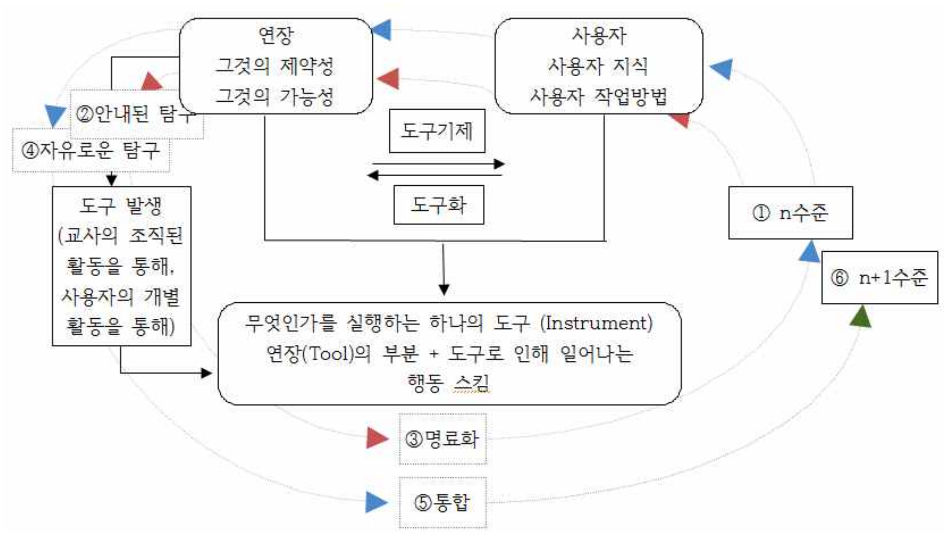
영희의 경우 GeoGebra를 처음 접했을 때의 도구 활용도가 연구자의 기대에 미치지 못하였으나 도구 사용이 익숙해짐에 따라 학생들의 도구 활용 능력이 증대된 것을 알 수 있었다. 또한, 영희의 경우 4차시에 교수하지 않은 내용도 도구를 응용하여 검증하는 모습을 관찰할 수 있었다. 그에 반면, 철수는 연구자의 기대 이상으로 초기에 도구 습득력 및 이해도가 높았지만 수학적 이해능력이 다소 부족하여 스스로 제안하거나 확장해보는 도구화의 응용기로 도달하는 모습은 연구기간 중에는 보이지 않았다. 차후 이러한 부분은 교사의 안내나 동료의 도움으로 GeoGebra를 활용함으로써 자기의 가설을 검증해보는 과정을 통해 쉽게 극복될 수 있을 것이다.

이처럼 본 연구자는 GeoGebra라는 도구를 사용하여 학생들의 이해를 돕고 나아가 새로운 주제를 입증할 수 있도록 도와주는 역할을 하였다. 수업의 차시를 진행하면서 교수자에게는 도구발생측면에서 전체적인 구조를 파악할 수 있는 고찰이 요구되었는데, 교육의 주체가 되는 학생들의 지식형성과 확장을 위해 기존 교육 방식과 비교하고 도구의 특성을 파악하여 효과적인 도구 활용이 될 수 있도록 지도안을 구성하여야 한다. 특히 시각화가 불필요한 단계, 즉 연역적 추론 및 기하학의 엄밀성이 요구되는 수준에서는 도구화를 통한 교수학습이 효과가 크지 않았다. 다만 알고 있는 것을 바탕으로 새로운 문제로 나아가고자 할 때 도구는 자신의 생각을 정당화하는 과정에서 짧은 시간에 다수의 추측과 검증(conjecture-and-check)를 통한 학습의 기회가 가능하므로 자기주도적 학습으로 나아가도록 도왔다.

2. 반 힐레 기하교수법과 도구화

앞 단원에서 보았듯이 연구 참여자인 학생들이 서로 다르게 도구화가 진행된 것을 알 수 있었다. 일반적으로 컴퓨터 게임 등에서 남학생이 공학도구 활용에 적극적이며 잘할 것으로 예측되지만 본 연구에서 철수는 영희의 발달과정과는 차이를 보였다. 이는 수학학습에서 결국 수학적 사고능력[8]이 도구화를 이끌어간다는 것을 보여주는 것으로 사료되었다.

[그림 Ⅳ-2]에 잘 나타난 것같이 반 힐레 기하교수법과 GeoGebra에 의한 도구화는 다음과 같이 요약되었다. 반 힐레 기하교수법의 안내된 탐구와 자유로운 탐구를 통해 도구발생이 실제화되고, 반 힐레 기하교수법의 명료화와 통합과정에서 학습자는 수학 성질에 대한 도구화된 행동스킴을 명료화해나갔다. 이 때 도구를 주도적으로 다루게 되는 학습 환경에서 학습자는 명료화를 통해 교수자가 제공한 수학과제의 의미를 인지하게 되고 다시 자유로운 탐구과정의 개방형적 접근을 통해 그 의미를 통합하게 되는데 주로 반성적 사고에 의해 재인지하는 기회를 가지게 되고 이로써 기하적 사고는 다음 수준으로 향상하게 되는 것을(① → ⑥) 알 수 있었다.



[그림 Ⅳ-2] 도구화와 반 힐레 기하교수법의 관계

기하교수법에 도구를 접목시켰을 경우 나타나는 이상과 같은 효과에 반해 공학 도구를 사용하여 지도하고자 할 경우, 다음과 같은 점이 관찰되었다.

첫째, 기하교수법에 있어서 도구화와 도구기제에서 ‘도구의 제약성’을 분명히 인식하여야 한다. GeoGebra는 기하, 측정, 해석기하, 미적분 등 고학년에 매우 적합하다. 기호화된 수식을 이해한 학생들만이 사용이 자유롭다. 아직 변수의 개념이 부족하거나 함수식을 이해하지 못하는 학생은 학생의 도구화된 행동스킴(IAS)에 어려움이 따른다. 이처럼 그 적용이 아직 미숙한 학생에게나 또는 GeoGebra를 통계영역에 활용하는 것과 같은 연결성이 부족한 특정의 수학영역에 공학적 도구를 무리하게 활용하려는 시도 등에서 교사가 학생들의 수준과 도구의 가능성과 제약성을 잘 숙지하고 접근해야할 것이다. Drijvers(1999)는 도구기제 과정에서 우연히 만나게 되는 도구의 제약성이 또 다른 수학주제에 대한 학습 기회를 제공한다(한세호 외, 2009, 재인용)고 하였는데 이는 자신의 수준보다 약간 상위의 수학내용에 부딪혔을 때 자신이 기대하지 않은 뜻밖에 답에 대한 재도전이 이루어진다면

[8] 수학적 사고력이 행동스킴을 주도하고 다시 이 재인지된 스킴에 의해 도구화가 탄력을 얻게 된다.

또 다른 학습의 기회가 될 것이다. 반면 이런 후속적인 학습으로 이어지지 않는다면 학습의 효과는 반감될 것이므로 도구의 제약성과 가능성에 대해서는 교수자가 잘 숙지하고 수업을 설계하여야 한다.

학생의 학습과정에서 도구기제와 도구화 과정을 분리해서 관찰하기는 불가능하다. 다만 학습자가 도구를 사용하는 과정과 결과물을 보고 이들을 파악할 수 있다. 따라서 도구발생과정에서 도구기제에서의 도구의 제약성과 가능성[9]에 대해서도 세심한 관찰을 할 필요가 있겠다. 특히 이 때 수학의 사고수준이 발달함에 따라 도구화에 의존하는 정도가 달라짐을 알 수 있었다. 본 연구자는 GeoGebra라는 공학적 도구를 통해 1, 2차시에서의 도구화 활동은 기대한 효과보다 더 큰 효과를 보았다고 볼 수 있지만 3, 4차시에서의 도구화 활동은 학습자에 따라 도구발생으로 다소 차이가 나타났다. 이 때 요구되는 도구발생은 수학적 개념들 간의 관계를 더욱 명료화하는 과정이다.

최초 학습 지도안을 구성하였을 때의 기대되는 효과는 학생들이 다양한 사각형을 작도해봄으로써 반례를 찾는 것이다. 연구가 진행되면서 3, 4차시에서는 개념을 습득하고 습득한 개념에 근거하여 관계성에 대한 반례를 발견하고 정당화를 꾀해야 하는데 학생들은 오히려 작도에 초점을 두었기에 과제 해결에 생각할 시간이 충분하지 않았던 것으로 판단되었다. 즉 학습과정이 더욱 활성화되었을 때 앞에서 Drijvers가 주장했던 대로 도구의 제약성이 학습의 기회로 활용되는 사례는 발견되지 않았다. 세부적으로 도구의 제약성은 화면의 크기 또는 픽셀의 비율 등 물리적인 측면도 있지만 제조사의 설계자가 수학의 특성 상 하위개념에서 상위개념으로 위계적 전개가 가능하도록 한 의도적인 제약성도 포함된다. 여기 후자의 경우가 학습자에게 또 다른 도전으로써 자기만의 가설을 세우고 나아가게 돕는 기회를 제공하게 되는 것이다.

둘째, 수학 교수ㆍ학습에 있어서 어느 단계에서 어떠한 기능으로 사용할 것인가에 대해 구체적인 계획을 사전에 구성하여야 한다. 컴퓨터 환경에서 구현하는 특징만으로 학생의 학습이 일어난다고 보장 할 수는 없다. 본 수업을 하면서 아쉬웠던 점은 GeoGebra 이용 시간을 구체적으로 생각하지 않았던 것이다. 첫 수업에서 작도를 하면서 너무 오랜 시간을 빼앗겨서 뒤로 갈수록 제한된 시간에 준비한 연구내용을 수행해야 해서 마음이 조급해졌던 적이 있었다. 일정 시간 작도하는 시간을 충분히 갖고 다음 진도에 맞춰서 진행하는 것이 바람직하다. 앞으로 자유학기제 운영처럼 진로탐색과 관련하여 체험 및 탐구활동을 할 수 있는 여유가 있다면 공학도구의 활용은 더욱 활발해질 것으로 보인다.

셋째, 학생들 개개인의 도구화 능력에 따라 학습 방향을 설정해야 한다. 학습 이해능력과 학습도구 활용능력은 동일하지 않았다. 또한 모든 학생은 같은 속도로 각 수준을 통과하는 것이 아니기 때문에 각 학생의 능력별 학습 지도가 따라야 한다. 현실적으로 도구를 활용하여 수업할 경우 모든 학생들의 도구화 능력을 반영한 수업 진행을 위해서는 담론의 활성화 방안을 모색하여야 한다. 따라서 교육자는 각 학생의 능력을 파악하고 도구화 정도를 반영하여 적절한 속도에 반복학습의 기회를 제공하는 교수법으로 진행해야 하는데 이 때 조별활동 또는 동료교수법에 의한 학생들 간에 의사소통을 통한 수업의 형태가 바람직하다.

V. 결론

본 연구의 철수와 영희는 서로 다른 경향 및 성격을 지니고 있었으며 이는 교수ㆍ학습 방법의 도구화에 대한 향후 연구 방법에 방향을 제시할 수 있다. 예를 들어, 철수의 성향은 교수ㆍ학습 전부터 이미 컴퓨터를 좋아하여 잘 다루는 학생이었으며 영희는 컴퓨터를 자주 사용하지 않는 학생이었기 때문에 본 연구자는 철수가 GeoGebra를 이용하였을 때 빨리 익숙해 질 것이라 예상할 수 있었고 이는 곧 그러한 결과로 이어졌다. 반면 영희는 평소에도 컴퓨터를 다루는 것을 자주 하지 않아서 그런지 GeoGebra 프로그램에 익숙해지는 시간까지도 비교적 오래

[9] 도구의 가능성은 무엇보다 수학개념들의 시각화 과정에서 발현된다.

걸렸다. 특히 GeoGebra 프로그램 자체가 컴퓨터 프로그래밍으로 진행되는 교수 방법이라 평소의 컴퓨터 활용 능력이 직접적으로 영향을 미친다고 볼 수 있다.

종합적으로 일단 GeoGebra에 어느 정도(적응기) 도구화가 이루어진 다음부터 수학적 사고능력 수준이 도구화를 주도하거나 앞서는 것으로 나타났다. 프로그래밍이 바로 수학적 내용으로 순서화되어 입력이 되기 때문인데 선수학습이 잘되어 있는 영희가 응용기로 쉽게 나아갈 수 있는 이유이다. 또한 최종적으로 본 연구기간에서 철수는 응용기에 도달하지 못했지만 충분한 학습 이해과정이 더 제공되어서 선수학습의 보충과 함께 다시 적용해 본다면 더 높은 차원의 응용기로 나아갈 수 있을 것으로 예상된다.

반 힐레 기하교수법과 도구화의 관계는 연구 참여자들과 연구를 진행하면서 반 힐레 기하교수법이 기하적 사고수준을 이끌어주는 역할을 하기 때문에 이 때 공학 도구에 의한 학습자의 도구화를 관찰할 수 있었다. 반 힐레 기하교수법의 안내된 탐구와 자유로운 탐구를 통해 도구발생이 실제화 되고, 반 힐레 기하교수법의 명료화와 통합과정에서 학습자는 수학 성질에 대한 도구화된 행동스킴을 명료화해나가는 것으로 파악되었다. n 수준에서 n+1 수준의 발달에서는 적어도 두 차례 이상의 순환적인 진행이 이루어졌다(그림 Ⅳ-2 참고). 도구를 주도적으로 다루게 되는 학습 환경에서 학습자는 명료화를 통해 교수자가 제공한 수학과제의 의미를 인지하게 되고(일차순환: ①→③), 다시 도구기제에 의해 좀 더 개방형적 접근을 요구하는 자유로운 탐구과제(④)를 거치면서 그 의미를 통합하게 되는데(이차순환: ④→⑥), 주로 반성적 사고에 의한 결정(decision making)에 따라 다음 위계적인 기하적 사고인 n+1 수준으로 나아가게 된다.

GeoGebra를 활용한 기하교수법인 본 연구 결과를 토대로 교수 방법에서의 도구화[10]의 장점은 다음과 같이 추론할 수 있다. 첫째, 도구화를 수업에 접목시킴으로써 학생들의 적극적인 참여는 기하적 사고수준의 향상을 가져왔다. 본 연구에서는 1수준과 2수준에 해당되는 학생에게는 시각적인 자료를 이용한 수업이 매우 효과적이었으며, 도구를 활용하여 정확한 도형과 선을 작도하여 학생들이 어려워하는 도형의 성질을 직접 눈으로 확인시켜 줄 수 있다는 점에서 수업에 대한 이해가 용이하여 적극적인 참여를 유도할 수 있었다.

둘째, 간단한 사용법을 통한 도구의 활용은 학생들이 쉽게 조작할 수 있고 이에 따라 학생들의 흥미 유발에 촉매제가 되었다. 본 연구 도구인 GeoGebra의 경우, 도구상자 등의 사용법이 매우 간단하며 학교 수학에서의 수식을 그대로 입력하기만 하면 그래프 등을 쉽게 얻을 수 있기 때문에 학생들의 흥미유발에 효과적이다. 또한, 도구를 선택하면 도구상자 오른편에 나타나는 '도구 도움말'을 통해서 도구의 사용법을 알 수 있으며, 명령어를 입력창에 입력한 후 F1키를 누르면 그에 대한 사용법의 도움말을 얻을 수 있다. 다음 담론은 1차시 수업이 끝난 후 학생들의 반응이다. 두 학생 모두 스스로 작도한 도형으로 수업을 잘 따라와 주었으며 이러한 과정이 흥미로 위하였다.

<표 Ⅴ-1> 1차시 5단계의 담론일부

교사 : 잘했어요. 모두. 오늘 GeoGebra를 이용해서 평행사변형의 성질에 대해서 배웠는데, 어땠나요?
영희 : 흥미로웠어요. 도형을 그린 다음에 성질을 직접 찾아보니까 이해도 더 잘 되요.
철수 : 저도요. 직접 각도크기나 길이를 재어서 적으면서 성질을 찾으니까 재미있었어요.

셋째, 작도를 통한 시행착오적 반복이 용이하기 때문에 도구화의 경험은 자신의 문제해결을 재인지할 수 있는

10) 학습자와 면담 그리고 그가 제시한 결과물에 의해 관찰자는 판단하게 되므로 도구발생에서 어려움이 없이 지식의 통합을 이루어졌을 때 도구화가 잘 진행되었다고 가정한다.

반성적 사고의 기회가 되었다. 학생들은 교사의 정답을 기다리는 대신 자기주도적 학습의 효과로 자신감을 얻을 수 있게 된다. 본 연구에서 철수는 자신의 작도의 결과를 영희에게 설명해주는 과정에서 이러한 모습이 관찰되었다. 기존의 교실에서 철수의 이런 적극적인 태도는 관찰할 수 없었던 것이다. 시간이 진행되면서 예와 반례를 활용하게 되는 정당화 과정에서는 응용기의 영희의 자기주도적 학습이 더욱 활성화될 것으로 보인다.

본 연구결과를 바탕으로 교수·학습 면에서 교사는 앞에서 언급된 장점을 활용할 뿐만 아니라 학생들 개개인의 도구화 수준이 다르기 때문에 이 수준에 따라 학습 방향을 설정해야 하는데 이 때 기존 생성된 여러 자료를 활용하여 교수·학습 자료로 사용할 수 있다. GeoGebra의 경우, 웹사이트에 다양한 교육 자료 및 동영상 안내가 자세히 설명되어 있다. 교사에게 교수·학습 자료를 새롭게 개발하기는 시간적 부담이 따른다. 이 때 개발된 웹사이트 자료를 참고하여 자신의 것으로 보완하여 사용한다면 많은 도움이 될 것이다. 따라서 수학의 여러 영역에서 다양한 자료가 인터넷 상에서 제공될 필요가 있다. 반 힐레 기하교수법에 의한 본 연구의 교수·학습 자료도 잘 활용되길 기대한다.

결론적으로 본 연구는 기하학습에서 도구화의 역할 그리고 도구화와 반 힐레 기하교수법의 관계를 파악해보았다. 도구화(Instrumentalization)와 도구기제(Instrumentation)의 상호작용을 바탕으로 수학과제에서 요구하는 도구발생을 하게 되는데, 세부적으로는 사용스킴(US)과 도구화된 행동스킴(IAS)에 의해 재인지가 일어나는 활발한 상호작용으로 인해 전체적으로 학생의 도구발생이 강화되어가는 실제를 본 연구를 통해 확인할 수 있었다. 앞으로 이러한 연구가 수학의 다양한 영역에서 이루어져서 공학도구를 활용하는 수학교실의 환경에 교수자와 학습자가 적절하게 대응할 수 있도록 안내하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

강옥기 · 강윤수 · 고상숙 · 고호경 · 권나영 · 김구연, 외 13인 (2012). 수학교육학 신서. 서울 : 교우사.

Kang, O. K., Koh, S. S., Kang, Y, S., Koh, H. K., Kwon, N. Y., Kim, G. Y. et al. (2012). *The New Perspectives on Mathematics Education*. Seoul: Kyungmoonsa.

강현희 (2009). 담론을 통한 수학적 개념발달에 관한 사례연구. 단국대학교 박사학위논문.

Kang, H. H. (2009). *A Case Study on Students' Development of Mathematical Concepts in the Classroom Discourse*. Doctoral Dissertation, Dankook University.

고상숙 · 고호경 · 박만구 · 한혜숙 · 홍예윤 (2012). 수학교육평가론. 서울: 경문사.

Koh, S. S., Koh, H. K., Park, M. G., Han, H. S., & Hong, Y. Y. (2012). *The Assessment of Mathematics Education*. Seoul: Kyungmoonsa.

고상숙 · 고호경 · 구나영 · 김남희 · 김리나 · 김향숙, 외 17인 (2015). 대한수학교육학회 연보: 수학교육에서 공학적 도구. 서울: 경문사.

Koh, S. S, Koh, H. K., Gu, N. Y., Kim, N. H., Kim. R. N., Kim, H. S. et al. (2015). *The 2015 Yearbook of The Korean Society of Educational Studies in Mathematics: Technology in Mathematics Education*. Seoul: Kyungmoonsa.

교육부 (2015). 제2차 수학교육 종합 계획 발표.
http://www.moe.go.kr/web/100026/ko/board/view.do?bbsId=294&pageSize=10&currentPage=0&encodeYn=N&boardSeq=58701&mode=view.

The Ministry of Education(2015). The Second Statement of the Comprehensive Plan for Mathematics Education.
http://www.moe.go.kr/web/100026/ko/board/view.do?bbsId=294&pageSize=10&currentPage=0&encodeYn=N&boardSeq=58701&mode=view.

김종화 (2013). GeoGebra를 활용한 유리함수와 무리함수에서 학생들의 수학화 과정에 관한 연구. 단국대학교

교육대학원 석사학위논문.

Kim, J. H. (2013). *A Stury on Students' Mathematization in Rational and Irrational Functions Using GeoGebra*. Master Thesis, Dankook University.

김진환 · 조정수 (2010). CAS의 도구발생과 수학적 지식의 발견 관점에서 고찰한 일차함수 합성성질 탐구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 24(3), 611-626.

Kim, J. H., & Cho, C. S. (2010). Exploration of the Composite Properties of Linear Functions from Instrumental Genesis of CAS and Mathematical Knowledge Discovery. *Communications of mathematical education*, 24(3), 611-626.

류희찬 · 손홍찬 (2007). 수학적 모델링에서 스프레드시트 환경이 수학적 모델의 정교화 과정에 미치는 역할. 학교수학, 9(4), 467-486.

Lew, H. C., & Son, H. C. (2007). The Role of Spreadsheet in Model Refinement in Mathematical Modeling Activity. *School Mathematics*, 9(4), 467-486.

류희찬 · 신동선 (1998). 수학교육과 컴퓨터. 서울: 경문사.

Lew, H. C. & Shin, D. S. (1998). *Mathematics Education and Computer*. Seoul: Kyungmoonsa.

양성현 · 강옥기 (2011). GeoGebra를 활용한 역동적인 시각적 표상에 기반한 이차곡선 지도 방안. 학교수학, 13(3), 447-468.

Yang, S. H., & Kang, O. K. (2011). Instruction method for Quadratic Curve Based on Dynamic Visual Representation by applying GeoGebra, *School Mathematics*, 13(3), 447-468.

이상구 · 장지은 · 김경원 · 박경은 (2014). GeoGebra와 미분적분학 개념의 시각화. 수학교육논문집, 28(4), 457-474.

Lee, S., Jang, J. E., Kim, K. W., & Park, K. E. (2014). Visualization of Calculus Concepts with GeoGebra. *Communications of Mathematical Education*, 28(4), 457-474.

이중권 (2006). van Hiele의 기하 인지발달이론에 따른 중학교 기하교육과정 및 우리나라 중학생들의 기하수준에 관한 연구, 교육문제연구, 17(1), 55-86.

Lee, J. (2006). A Study of Korea Middle School Students' Cognitive Level of Geometry and Geometry Curriculum Based on van Hiele Theory. *The Journal of Educational Theory and Practice*, 17(1), 55-86.

임현정 (2015). Geogebra를 활용한 교수 학습 환경에서 Van Hiele 기하적 사고에 관한 사례 연구: 중학교 사각형의 성질을 중심으로. 단국대학교 석사학위논문.

Lim, H. J. (2015). *A Case Study on the Students' Geometric Thinking in Quadrilaterals within Teaching and Learning Environment Using GeoGebra: Focused on the Quadrilaterals of the 8th Grade*. Master Thesis, Dankook University.

최경식 (2012). 따라하면서 배우는 GeoGebra, 단국대학교 수학 1정교사 연수교재. 단국대학교 교원연수원.

Choi, K. S. (2012). *GeoGebra we learn by copying others*. The Materials of the In-service Program for the First Degree of the Teacher Certificate. Dankook University.

한세호 (2010). 최적화 문제해결 활동에서 "CAS의 도구화"가 교육과정 내용제시 순서에 미치는 영향. 수학교육학연구, 20(2), 185-202.

Han, S. H. (2010). The Influence of Instrumentalization of Computer Algebra System(CAS) on the Sequence of Mathematics Curriculum in the Optimization Problem Solving Activities of CAS. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 20(2), 185-202.

한세호 · 장경윤 (2009). 고등학교 수학 문제해결에서 CAS의 도구발생. 학교수학, 11(3), 527-546.

Han, S. H., & Chang, K. Y.(2009). Instrumental genesis of computer algebra system in problem solving among high school students. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 527-546.

Choi, S. S. (1996). *Students' Learning of Geometry Using a Computer*. Unpublished Doctoral Dissertation.

Athens, GA: University of Georgia.

Dreyfus, T. (1992). Aspects computerized learning environments which support problem solving. In J. P. Ponte, J. F. Matos, & D. Fernandes(Eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in Context of Practice* (pp. 255-266). Berlin : Springer Verlag.

Drijvers, P. H. (1999). Students encountering obstacles using CAS. *International Journal of Computer Algebraic Mathematics Education*, 46-47.

Hoffer, A. (1983). van Hiele-based research. In R. Lesh & M. Landau(Eds.), *Aquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press.

Merriam, S. (2005). 정성연구방법론과 사례연구(강윤수 외 8인 공역). 서울: 교우사. (원저 1998년 출판, Qualitative Research and Case Study Applications in Education.).

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains,* Armand Colin.

Skemp, R. (2000). 수학학습심리학(황우형 역). 서울: 사이언스북스. (원저 1987년 출판, The Psychology of Learning Mathematics. Lawrence Erlbraum Associates, Inc.)

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interaction in a computerized learning environments : Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9, 281-307.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press.

van Hiele-Geldof, D. (1984). The Didactics of geometry in the lowest class of secondary school. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English Translation of Selected Writing of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele*(pp. 1-214). Brooklyn: Brooklyn College. (Original document in Dutch. De Didaktiek van de Meetkunde in de Eerste Kals van het V. H. M. O., Unpublished doctoral dissertation, University of Utrecht, 1957).

A Study on Instrumentalization in van Hiele's Geometric Teaching Using GeoGebra

Lim, Hyun Jung
The Graduate School of Education in Dankook University
E-mail : neno1031@naver.com

Choi-Koh, S. S†
Dankook University,
E-mail : sangch@dankook.ac.kr

This study was designed to explore students' instrumentalization in relation to the van Hiele's teaching method within a technology environment using GeoGebra. To carry out the study, a total of 4 lesson units was developed based on van Hiele teaching method for two slow learners in Gyeonggi province, Korea. The results of study were as follows. Instrumentalization of students was actualized from preparation, to adaptation, and to application stages. In preparation, and adaptation stages, depending on visualization, students used a trial-and-error method a lot, however in application stage the role of GeoGebra was just to check the solution of what they conjectured. Therefore, a teacher should prepare geometric tasks according to the processes of instrumentalization based on geometric teaching method. During instrumentalization and instrumentation of users, usage scheme(US) and instrumented action scheme(IAS) should be concrete.

* This was excerpted from Lim(2015).

ZDM Classification : C73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C70
* Key words : Geometry, Technology, Instrumentalization, van Hiele's Teaching Method

† corresponding author