

길이방향으로 주름진 원통셀의 진동 해석

Vibration Analysis of Longitudinally Corrugated Cylindrical Shells

김 영 완[†]
Young-Wann Kim

(Received September 21, 2016 ; Revised November 4, 2016 ; Accepted November 4, 2016)

Key Words : Corrugated Cylindrical Shell(주름 원통셀), Homogenization Model(균질모델), Effective Stiffness(등가 강성계수), Theoretical Analysis(이론 해석)

ABSTRACT

In this paper, the free vibration characteristics of longitudinally corrugated cylindrical shells is investigated by the theoretical analysis. The equivalent homogenization model is adapted to investigate the overall mechanical behavior of these corrugated shells. The corrugated element can be represented as an orthotropic material. Both the effective extensional and flexural stiffness of this equivalent orthotropic material are considered in the analysis. To demonstrate the validity of the proposed theoretical approach, the theoretical results are compared with those from 3D finite element analysis using ANSYS commercial code. Some numerical results are presented to check the effect of the geometric properties.

1. 서 론

두께가 얇은 셀 구조물은 압력용기, 항공기, 잠수함, 미사일 등에 널리 이용되고 있는 구조요소로서 다양한 형태의 하중을 받을 수 있다. 이들 얇은 구조물은 좌굴 및 굽힘 등에 매우 취약하기 때문에 구조물에 주름을 주어 강성을 높일 수 있다. 이들 구조물이 동적 하중을 받게 되면 구조물이 진동하게 되며, 소음 및 공진 등을 유발시킬 수 있다. 따라서 구조물의 동적 거동을 분석하여 구조물 설계에 이용하여야 한다. 주름 원통셀은 주름 파형의 골 또는 봉우리가 어느 방향으로 위치하는가에 따라 원주 방향 또는 길이방향 주름 원통셀로 구분된다. 원주 방향 주름 원통셀의 경우에는 길이방향으로는 낮은 굽힘강성을 갖고 원주방향으로는 큰 굽힘강성이 요구

되는 구조물에 이용될 수 있다. 반면에 길이방향으로의 높은 압축강성 및 굽힘강성이 요구되고, 원주 방향에 대해서는 낮은 강성이 요구되는 경우에는 길이방향 주름 원통셀이 이용될 수 있다.

3차원 기하형상을 갖는 주름 구조의 기계적 거동을 이론적으로 해석하기가 매우 어렵기 때문에 일반적으로 3차원 유한요소 해석을 한다. 그러나 유한요소해석의 경우 모델링이나 해석에 많은 노력과 시간이 요구되기 때문에 주름 구조물의 전반적인 거동에 관심이 있는 경우에는 적당하지 않다. 이와 같은 이유로 주름 구조물의 전반적인 거동을 파악하기 위해 주름구조를 직교 이방성재료로 등가시켜 해석에 이용하고 있다. 이를 위해 많은 연구자들이 주름판에 대해 등가강성을 유도하였으나⁽¹⁻⁴⁾, 주름 원통셀에 대한 연구는 매우 제한적으로 몇몇 연구자들이 시험⁽⁵⁻⁷⁾ 및 이론적 방법⁽⁸⁻¹¹⁾을 이용하고

[†] Corresponding Author; Member, Department of Mechanical Design Engineering, Chonnam National University
E-mail : wannkim@jnu.ac.kr

[‡] Recommended by Editor Hyung Jo Jung

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

있다. Ross 등⁽⁵⁾은 원주방향 주름 복합재료 원통셀의 진동특성을 분석하기 위해 시험 및 유한요소해석을 수행하였다. Ghazijahani 등⁽⁶⁾은 원주 방향으로 부분적 또는 완전히 주름진 원통셀에 대해 좌굴시험을 하였으며, Yang 등⁽⁷⁾은 주름코어를 갖는 복합재료 샌드위치 원통셀에 대해 모달시험 및 유한요소해석을 하였다. Semenyuk와 Babich⁽⁸⁾는 길이 방향 주름 원통셀에 대해 안정성 해석을 수행하기 위해 단위 주름을 곡률이 작은 패널로 가정하였으며, Bargmann⁽⁹⁾은 원주방향 주름 원통셀에 대해 단위 주름을 링으로 간주하였다. Babich 등⁽¹⁰⁾은 원주방향 주름 원통셀에 대한 안정성 해석을 수행하였다. Ahmed⁽¹¹⁾는 길이방향 주름 타원형 셀에 대해 탄성 지지 등이 안정성에 미치는 영향을 분석하였다.

이상에서 제시한 원통셀에 대한 이론적 연구는 주름의 수가 몇 개 되지 않거나 주름 형상이 함수적으로 표현 가능한 것으로 한정되어 있다. 이 연구에서는 주름의 수가 비교적 많고 주름 높이가 원통셀의 길이 및 반경 등에 비해 매우 작은 길이방향 주름 원통셀에 대해 진동해석을 수행하였다. 이를 위해 주름 원통셀에 대한 등가모델을 개발하였다. 이론해석과정에서 주름에 대한 등가강성계수는 이전의 연구에서 유도한 결과를 변형하여 적용하였다⁽⁴⁾. 이론해석의 타당성을 검증하기 위해 ANSYS를 이용한 3차원 유한요소 해석을 수행하여 그 결과를 이론해와 비교/검토하였다.

2. 수 식 화

이 연구에서 고려한 길이방향 주름 원통셀, 단위

주름의 형상 및 등가 원통셀을 Fig. 1에 제시하였다. 원통셀의 길이는 L , 중앙면에서의 반지름은 R , 두께는 t_c 로 나타냈다. 축방향, 원주방향 및 수직방향에 대한 중앙면에서의 변위성분을 u, v 및 w 로 표시하였다. 사다리꼴형상의 단위 주름에 대한 축방향 길이를 c , 이에 대한 주름 길이를 l , 주름높이를 $h(=2f)$, 주름각을 α 로 하였다.

고려된 원통셀을 평면 응력상태라 가정하면 Love의 셀 이론으로부터 변형률 $\epsilon_i (i = x, \theta, x\theta)$ 를 다음과 같이 중립면에 대한 내평면 변형률(ϵ_{i0})과 곡률(κ_i)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_{x0} + z\kappa_x = u_{,x} - z w_{,xx} \\ \epsilon_\theta &= \epsilon_{\theta0} + z\kappa_\theta = \frac{v_{,\theta} + w}{R} - z \frac{w_{,\theta\theta} - v_{,\theta}}{R^2} \\ \epsilon_{x\theta} &= \epsilon_{x\theta0} + z\kappa_{x\theta} = \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} - z \frac{2w_{,x\theta} - v_{,x}}{R} \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 (,)는 뒤에 명시된 아래첨자에 대한 미분을 나타낸다.

등가 직교이방성 원통셀에 대한 변형에너지를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int (\overline{A}_{11}\epsilon_{x0}^2 + 2\overline{A}_{12}\epsilon_{x0}\epsilon_{\phi0} + \overline{A}_{22}\epsilon_{\phi0}^2 + \overline{A}_{66}\epsilon_{x\phi0}^2 + \overline{D}_{11}\kappa_x^2 + 2\overline{D}_{12}\kappa_x\kappa_\phi + \overline{D}_{22}\kappa_\phi^2 + \overline{D}_{66}\kappa_{x\phi}^2) dA \tag{2}$$

식에서 계수 $\overline{A}_{ij}, \overline{D}_{ij} (i = 1, 2, 6)$ 는 각각 등가신장 및 굽힘 강성계수이다. 이들 등가강성계수는 단위 주름 요소에 대해 각각 신장 및 굽힘을 받는 상태에서 유도를 하여 해석에 적용하여야 한다. 주름 요소에 대한 등가강성계수는 이전의 연구결과⁽⁴⁾를

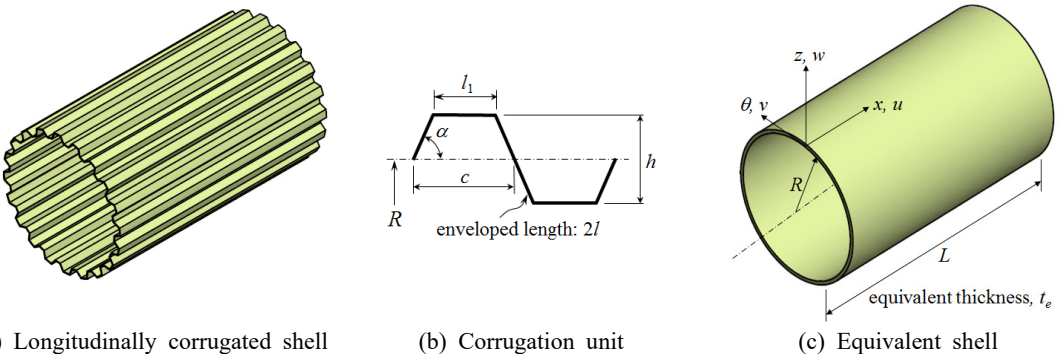


Fig. 1 Longitudinally corrugated cylindrical shell, its corrugation unit, and equivalent cylindrical shell

적용하여 길이방향 주름 등방성 원통셀에 대해 적용할 수 있도록 식을 수정하여 Table 1에 제시하였다. 식에서 A_c, D_c 는 주름이 없는 셀에 대한 신장 및 굽힘 강성계수이다.

또한 등가판의 두께 t_e 를 주름높이 h 와 같다고 가정하면 판의 질량에는 변화가 없어야 하므로 밀도를 $\rho_e = \rho st_c / (hl)$ 로 등가시킨다. 따라서 등가 직교이방성 원통셀에 대한 운동 에너지는 다음과 같이 된다.

$$T = \frac{1}{2} \rho_e t_e \int_A (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) dA \quad (3)$$

여기서 첨자 i 는 시간을 나타낸다.

따라서 원통셀에 저장되는 총 에너지는 다음과 같이 된다.

$$\Pi = U - T \quad (4)$$

임의의 경계조건을 갖는 원통셀에 대한 변위식을 식 (5)와 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \begin{Bmatrix} U_{mn} \phi_m(x) \cos n\theta \\ V_{mn} \psi_m(x) \sin n\theta \\ W_{mn} \psi_m(x) \cos n\theta \end{Bmatrix} \cos \omega_{mn} t \quad (5)$$

여기서 m, n 은 진동모드를 나타내는 길이방향 및 원주방향 반파수이며, U_{mn}, V_{mn} 과 W_{mn} 은 진폭을 나타낸다. ω_{mn} 은 진동모드 (m, n)에서의 각진동수이다. 축방향 모드를 표현하기 위해 사용된 $\psi_m(x)$ 는 보함수로서 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\begin{aligned} \psi_m &= \cosh \lambda_m x - \cos \lambda_m x \\ &\quad - \sigma_m (\sinh \lambda_m x - \sin \lambda_m x) \\ \phi_m &= \psi_m(x)_{,x} / \lambda_m \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 λ_m, σ_m 은 경계조건으로부터 결정될 값이다.

한편 셀의 양단이 모두 고정된 경계조건이 고려되었으며, 다음과 같은 조건을 갖는다.

$$u = v = w = w_{,x} = 0 \rightarrow \psi = \psi_{,x} = 0 \quad (7)$$

고려된 주름 원통셀에 대한 진동특성을 얻기 위해 가정된 변위식을 에너지식에 대입한 후 Rayleigh-Ritz 정리에 적용하면 다음과 같은 고유값을 구하는 방정식을 얻을 수 있다.

$$\{[K] - \omega^2 [M]\} \{d\} = 0 \quad (8)$$

여기서 $[K], [M]$ 은 구조물의 강성 및 질량행렬로써 3×3 의 부분행렬로 구성되며, 각각의 부분행렬은 변위식 (5)에서의 급수항에 따라 $[M \times (N + 1)] \times [M \times (N + 1)]$ 의 크기를 갖는다. 그리고 $\{d\}$ 는 계수행렬로 진동형상을 결정한다.

3. 수치결과

이 연구에서 제시한 이론해석 방법의 타당성을 검증하기 위해 3차원 유한요소 해석을 수행하였다. 3차원 유한요소해석은 상용 유한요소 프로그램인 ANSYS가 이용되었다. 해석에서 사용된 요소는 SHELL281로 8절점으로 구성된 쉘요소이며, 절점당 6자유도를 갖는다.

해석에 사용된 재료물성은 $E = 206 \text{ GPa}, \nu = 0.3$ 및 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ 이며, 기하형상은 $L = 500 \text{ mm}, R = 0.3 L, t_c = 1 \text{ mm}$ 를 고려하였다. 주름요소에 대해

Table 1 Effective stiffness properties for a trapezoidal corrugation

\bar{A}_{ij}	\bar{D}_{ij}
$\bar{A}_{22} = \frac{2c}{I_0/A_c + I_2/D_c}$	$\bar{D}_{22} = \frac{c}{l} D_c$
$\bar{A}_{12} = \nu \bar{A}_{22}$	$\bar{D}_{12} = \nu \bar{D}_{22}$
$\bar{A}_{11} = \frac{l}{c} E t_c + \nu \bar{A}_{12}$	$\bar{D}_{11} = \frac{l}{2c} (I_2 A_c + I_0 D_c)$
$\bar{A}_{66} = \frac{c}{l} G t_c$	$\bar{D}_{66} = \frac{l}{c} \frac{G t_c^3}{12}$

where, $I_0 = 4f \cot \alpha (\cos \alpha - 1) + 2c$
 $I_2 = 2cf^2 + 4f^3 (\csc \alpha - 3 \cot \alpha) / 3$
 $A_c = E t_c / (1 - \nu^2), D_c = E t_c^3 / 12 (1 - \nu^2)$

Table 2 Frequency comparison of corrugated cylindrical shell

Mode No.	Frequency (Hz)		r.e.*
	Theory, f_1	3D ANSYS, f_2	
1	435.87 (1,4)	428.05 (1,3)	1.83
2	440.60 (1,3)	431.53 (1,4)	2.10
3	447.15 (1,5)	435.48 (1,2)	2.68
4	448.99 (1,2)	443.37 (1,1)	1.27
5	454.77 (1,1)	446.44 (1,0)	1.87
6	456.68 (1,0)	458.02 (1,5)	-0.29

* Relative error = $\frac{f_1 - f_2}{f_2} \times 100(\%)$

서는 $f = 5t$, $N_c = 25$, $\alpha = 45^\circ$ 를 기본으로 하였다. 이론해석 및 유한요소 해석 결과로부터 얻은 최저 6개의 고유진동수를 Table 2에 제시하였다. 표에 나타난 것처럼 같은 진동모드에 대해 두 결과가 잘 일치하고 있다. 그러나 동일한 차수에서의 진동모드가 약간 다른 것을 볼 수 있으나 각 차수간의 진동수 차이가 그다지 크지 않으며, 같은 진동모드에 대한 상대오차를 검토하여도 최대오차는 (1, 2)모드에서 3%로 매우 작다. 또한 두 해석 방법에서 얻은 진동형상을 Fig. 2에 나타냈다. 그림에서처럼 등가모델 및 3차원 유한요소 해석으로부터 얻은 진동형상이 매우 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 3은 주름진 또는 주름이 없는 원통셀의 축방향 모드 $m = 1, 2$ 에 대해 원주방향 반파수 n 에 따른 진동수 변화를 보여준다. 그림에서 실선은 주름

원통셀, 점선은 주름이 없는 원통셀을 나타낸다. 주름이 없는 원통셀의 경우 반파수 n 의 증가와 함께 진동수가 급격히 최소값까지 감소하다가 다시 증가하는 거동을 한다. 이와 같은 거동은 원통셀의 전형적인 거동으로 주름진 원통셀의 경우 이와 같은 거동이 뚜렷하지 않다. 원통셀에 주름을 줌으로써 작은 원주방향 반파수에서의 진동수가 크게 감소한 것을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 주름을 줌으로써 원주방향의 강성이 크게 감소하였기 때문이다.

Fig. 4에서는 주름높이가 같을 경우 주름각이 고유 진동수에 미치는 영향을 보여 주고 있다. 주름각이 증가함에 따라 주름 형상은 삼각형에서 사다리꼴을 거쳐 사각형으로 변한다. 그림에 나타난 것처럼 원주방향 반파수 $n \leq 4$ 에 대해서는 주름각이 커짐에 따라 진동수가 감소하는 거동을 하지만 그 이상인 경우에는 진동수가 증가하다가 최대값을 형성한 후 감소하는 거동을 한다. 작은 반파수에서 진동수가 감소하는 현상은 주름에 의해 원주방향 강성이 감소하기 때문이다. 한편 주름각의 증가와 함께 기본진동수(가장 작은 진동수, 항상 $m = 1$ 에서 발생)는 최댓값까지 증가하다 감소를 한다. 이는 기본 진동수 증가를 설계변수로 할 경우 주름 높이가 같은 길이방향 주름 원통셀에 대해 주름을 삼각형에 가깝도록 제작하는 것이 효과적임을 의미한다. 한편 주름각에 따른 등가강성의 변화를 보기 위해 주름이

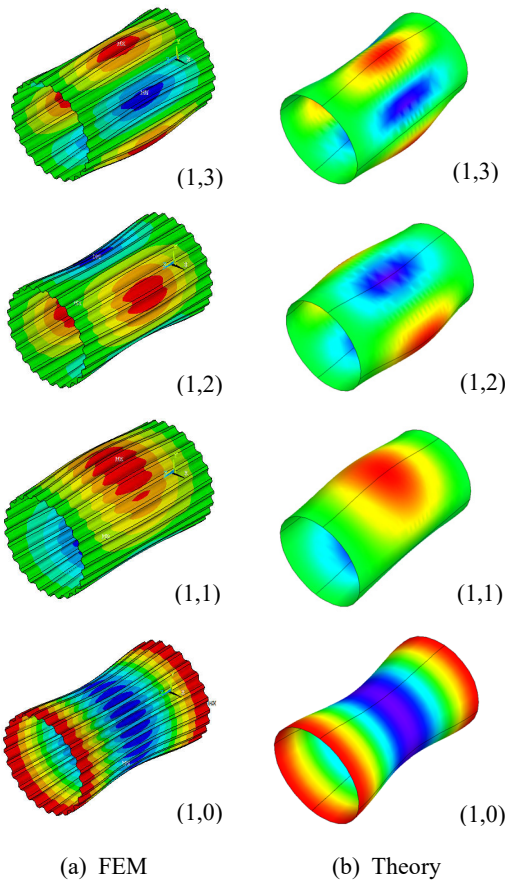


Fig. 2 Mode shapes obtained from FEM and theoretical method

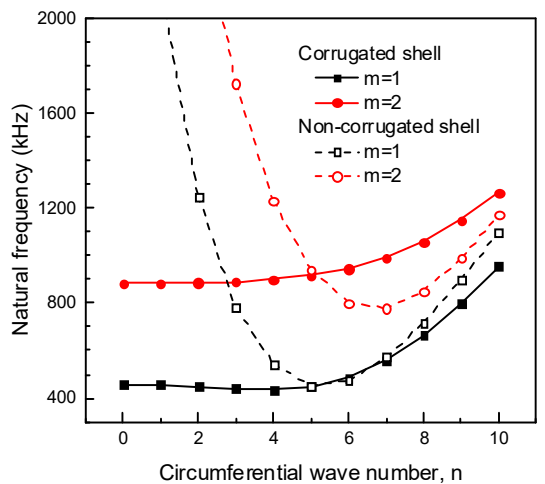


Fig. 3 Natural frequencies of corrugated cylindrical shells with circumferential wave numbers

없는 셀에 대한 강성계수로 나눈 강성계수 비 (\bar{A}_{ij}/A_c , \bar{D}_{ij}/D_c)를 제시하였다. 그림에서처럼 주름 형상이 삼각형에서 사다리꼴을 거쳐 사각형으로 전환됨에 따라 축방향 신장 및 굽힘 강성계수(\bar{A}_{11} , \bar{D}_{11})가 증가하지만, 원주방향 강성계수(\bar{A}_{22} , \bar{D}_{22})는 반대로 감소한다. 특히 축방향 굽힘 및 원주방향 신장 강성계수의 변화가 가장 크다. 전반적으로 축방향 강성증가보다는 원주방향 강성감소가 원통셀의 저차 진동수를 지배하는 원주방향 진동모드에 더 큰

영향을 주기 때문에 진동수는 감소한다. 반대로 축방향 강성 증가는 축방향 진동모드에 영향을 줘 Fig. 3에 나타난 것처럼 $m=2$ 모드에 대해 진동수가 주름이 없는 셀보다 크게 증가하는 것을 볼 수 있다. 한편 주름각에 따른 원통셀의 기본진동수의 거동은 주름판의 거동과는 달리 증가하다 감소를 한다(주름판의 경우 진동수가 증가함⁽³⁾). 이와 같은 현상은 기본진동수가 나타나는 반파수가 주름각에 따라 달라지기 때문이다.

여러 가지 형상의 주름에 대해 주름 높이가 기본진동수에 미치는 영향을 Fig. 5에 제시하였다. 여기서 주름수는 동일하며, 사다리꼴 주름의 경우 $l_1 = c/2$ 를 갖는다. 그림에서 데이터 점 옆의 숫자는 기본진동수가 나타나는 원주방향 반파수로써 주름높이가 클수록 반파수가 작아지는 거동을 한다. 이와 같이 반파수가 변하는 이유는 원주방향의 강성이 주름높이가 커짐에 따라 감소하기 때문이다. 주름높이에 따라 주름 사각판은 기본진동수가 증가⁽³⁾를 하지만 원통셀의 경우에는 초기에는 감소하다 다시 증가하는 거동을 한다. 이와 같은 현상이 나타나는 이유는 기본진동수가 나타나는 원주방향 반파수가 주름높이에 따라 변하기 때문이다. 특히 반파수 변화가 주름높이에 대해 민감하게 작용할 경우 그 현상은 더욱 뚜렷하게 나타난다. 주름높이의 영향은 사각형 주름인 경우가 가장 크며, 삼각형 주름인 경우 가장 작다. 이와 같은 현상은 강성변화에서 확인할 수 있다. 즉, 사각형 주름인 경우 강성변화가 가장 크게 나타나며 반대로 삼각형 주름인 경우 강성변화가 가장 작게 나타나기 때문에 이와 같은 현상이 나타나는 것으로 판단된다.

4. 결론

길이방향으로 주름진 원통셀의 진동특성을 알아보기 위해 일정 두께를 갖는 직교이방성 원통셀로 등가시켜 이론해석을 수행하였다. 또한 제안된 이론 해석방법을 적용하여 고유진동수 및 진동형상을 적절히 예측할 수 있음을 3차원 유한요소 해석을 추가로 수행하여 확인하였다. 주름진 원통셀에 대해 원주방향 반파수에 따른 진동수 거동이 전형적인 원통셀에서 나타나는 거동과 다르다는 것을 알았다. 또한 주름높이가 같은 경우 주름의 형상을 사다리꼴

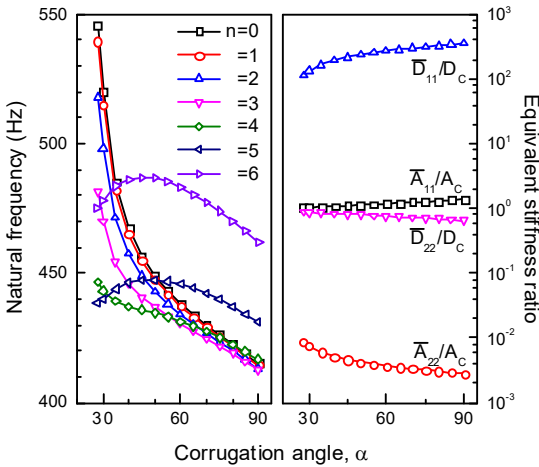


Fig. 4 Effect of corrugation angle for corrugated shells with the same corrugation amplitude

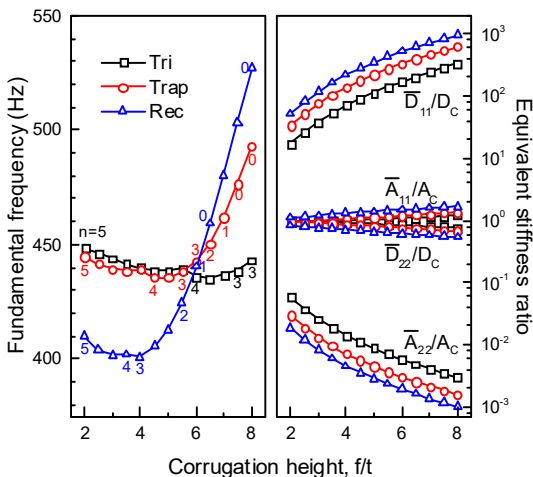


Fig. 5 Effect of corrugation height on fundamental frequencies for corrugated shells

이나 사각형으로 하는 것보다는 삼각형에 가깝게 할 경우 보다 큰 진동수를 얻을 수 있었다. 주름 형상에 따른 주름 원통셀의 기본진동수 거동은 주름 사각판에서의 거동과 매우 다르다는 것을 알았다.

후 기

이 논문은 2016년도 전남대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

References

- (1) Xia, Y., Friswell, M. I. and Flores, E. S., 2012, Equivalent Models of Corrugated Panels, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, No. 13, pp. 1453~1462.
- (2) Ghabezi, P. and Golzar, M., 2013, Mechanical Analysis of Trapezoidal Corrugated Composite Skins, *Applied Composite Materials*, Vol. 20, No. 4, pp. 341~353.
- (3) Kim, Y.-W., 2013, Vibration Analysis of Trapezoidal Corrugated Plates, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 23, No. 10, pp. 928~934.
- (4) Park, K.-J., Jung, K. and Kim, Y.-W., 2016, Evaluation of Homogenized Effective Properties for Corrugated Composite Panels, *Composite Structures*, Vol. 140, pp. 644~654.
- (5) Ross, C. T. F., Little, A. P. F., Köster, P. and Tewkesbury, G., 2006, Vibration of a Thin-walled Carbon Fibre Corrugated Circular Cylinder under External Water Pressure, *Thin-walled Structures*, Vol. 44, No. 5, pp. 542~553.
- (6) Ghazijahani, T. G., Dizaji, H. S., Nozohor, J. and

Zirakian, T., 2015, Experiments on Corrugated Thin Cylindrical Shells Under Uniform External Pressure, *Ocean Engineering*, Vol. 106, pp. 68~76.

(7) Yang, J.-S., Xiong, J., Ma, L., Feng, L.-N., Wang, S.-Y. and Wu, L.-Z., 2015, Modal Response of All-composite Corrugated Sandwich Cylindrical Shells, *Composites Science and Technology*, Vol. 115, pp. 9~20.

(8) Semenyuk, N. P. and Babich, Y. U., 2007, Stability of Longitudinally Corrugated Cylindrical Shells under Uniform Surface Pressure, *International Applied Mechanics*, Vol. 43, No. 11, pp. 1236~1247.

(9) Bargmann, H. W., 2008, On the Stability of Thin-walled, Corrugated, Circular Cylindrical Shells Under External Pressures, *Acta Mechanica*, Vol. 195, No. 1, pp. 117~128.

(10) Babich, I. Y., Zhukova, N. B., Semenyuk, N. P. and Trach, V. M., 2011, Stability of Circumferentially Corrugated Cylindrical Shells under External Pressure, *International Applied Mechanics*, Vol. 46, No. 8, pp. 919~928.

(11) Ahmed, M. K., 2016, Buckling Behavior of a Radially Loaded Corrugated Orthotropic Thin-elliptic Cylindrical Shell on an Elastic Foundation, *Thin-walled Structures*, Vol. 107, pp. 90~100.



Young-Wann Kim received his Ph.D. degree from Chungnam National University in 1997. He is a professor of department of mechanical design engineering, Chonnam National University. His research interest includes the structural dynamics & vibration, FSI problems.