

사장교의 최적 초기형상 및 무응력길이 결정을 위한 간략해석법

정명락* · 박세웅** · 민동주*** · 김문영****

Jung, Myung Rak*, Park, Se Woong**, Min, Dong Ju***, Kim, Moon Young****

A Simplified Analysis Method for Determining an Optimized Initial Shape of Cable-Stayed Bridges

ABSTRACT

A simplified analysis method is first proposed in order to determine an optimized initial shape of cable-stayed bridges including all unstrained element lengths without using complicated nonlinear FE analysis. The unstrained-length based FE method is then presented using the unstrained lengths by the simplified analysis. To demonstrate validity and accuracy of the proposed method, Incheon bridge model having the fabrication camber is constructed and initial shaping analysis is performed using the presented method and commercial finite element analysis program, MIDAS. Resultantly it is shown that the initial solutions by the proposed algorithm are well optimized and in good agreement with those by MIDAS except for axial displacements of the main member.

Key words : Simplified analysis method, Cable-stayed bridge, Unstrained length method, Initial shape analysis, Geometrically nonlinear finite element method

초 록

고정하중을 받는 사장교의 최적 초기형상 결정을 위한 간략해석법을 제시한다. 이 방법은 비선형 유한요소 해석을 수행하지 않고 최적의 초기형상을 구현할 수 있으며, 최소의 휨모멘트를 발생시키는 무응력길이를 제공한다. 초기형상 해석 후 여타의 하중조합 또는 시공단계해석을 수행하기 위해 무응력길이를 변화시키지 않고 Newton-Raphson 반복법을 수행하는 무응력길이법을 이용한다. 수치예제는 제작캠버를 포함한 인천대교 2차원 모델이며, 제시된 해석결과 상용 유한요소해석 프로그램 MIDAS의 초기형상 해석결과를 비교·분석한다. 주로 케이블의 장력과 주부재의 휨모멘트 및 변위를 관찰하였으며, 두 해석결과는 축방향 변위를 제외하고 모든 결과 값이 서로 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

검색어 : 간략해석법, 사장교, 무응력길이법, 초기형상해석, 기하비선형 유한요소법

1. 서론

최근 지속적인 건설재료 및 장비의 발달과 증가하는 물류량으로 인해 사장교의 건설이 증가하는 추세에 있다. 그 예로 2014년 5월에는 총 연장 1,114m, 중앙경간장 540m의 국내 최장 강합성 사장교인 부산항대교가 완공되기도 하였다. 이러한 사장교와 같은 케이블 지지구조물에서 케이블부재는 트러스 및 빔 부재와 같이 제작 시 바로 강성을 갖는 구조부재와 달리 초기에 큰 인장력을 도입하여야 부여된 구조적인 성능을 발휘 할 수 있다. 이러한 이유로 케이블 구조물의 초기형상결정 즉, 고정하중을 받아 평형조건을 만족시키는

* 정희원 · 성균관대학교 건설환경시스템공학과 박사과정 (SungKyunKwan University · psjihun@naver.com)

** DM엔지니어링 대리 (DM Engineering · ekstnf@dm-eng.com)

*** 성균관대학교 건설환경시스템공학과 박사 (SungKyunKwan University · marshow@nate.com)

**** 종신회원 · 교신저자 · 성균관대학교 건설환경시스템공학과 교수 (Corresponding Author · SungKyunKwan University · kmye@skku.edu)

Received July 27, 2015/ revised May 19, 2016/ accepted November 7, 2016

완성계의 최적화된 초기형상을 결정하는 것은 설계단계에서 뿐만 아니라 시공단계의 형상관리에서도 매우 중요한 기술적 요소가 된다.

또한 고정하중을 받는 케이블지지 구조물은 초기에 매우 큰 인장력이 케이블부재에 도입되기 때문에 이러한 인장력이 케이블에 연결된 프레임부재에 커다란 압축력으로 작용하게 된다. 이러한 압축력은 초기캠버를 갖는 장경간 구조의 휨부재에 작용하여 $P-\Delta$ 효과로 인한 거대한 휨모멘트를 야기시킬 수 있다. 뿐만 아니라 전체 구조계의 좌굴안전성문제를 발생시켜서, 자정식 케이블 구조의 장대화에 있어서 큰 걸림돌 중 하나이다.

한편 현재까지 개발된 케이블교량의 초기형상 결정법으로 최적화 기법, 초기부재력법, 그리고 *TCUD* (*Target Configuration Under Dead Loads*)법 등을 열거할 수 있다. 최적화 기법은 최적화 기법을 응용하여 사장교의 부재변형 및 부재력을 최소화시키는 케이블장력을 산출한다(Kim and Lee, 2005). 그리고 초기부재력법은 변위를 최소화하기 위하여 기하학적 비선형 형상을 결정하는 비선형 해석을 재차 수행하는 비선형해석법이다(Wang et al., 1993; Kim, 1999). 특히, *TCUD*법은 케이블부재의 무응력길이를 미지수로 가정하고 케이블부재개수만큼 구속조건을 추가하여 Newton반복법으로 초기형상 해를 결정하는 매우 효과적인 방법이다(Kim and Lee, 2001). 하지만 이 방법은 거더와 주탑의 측방향 변위를 제어하지 못하여 다소 목표형상과 차이가 발생한다. 이후 초기부재력법과 *TCUD*법을 효과적으로 결합시켜 케이블교량의 측방향 변위까지 고려할 수 있는 방법이 제시되었다(Kim et al., 2003; Kim et al., 2012). 뿐만 아니라 *TCUD*법을 확장시켜 케이블의 무응력길이 뿐만 아니라 프레임 요소의 무응력길이를 미지수로 추가하여 요소의 개수만큼 절점변위를 구속하여 초기치를 결정하는 방법이 제시되었다(Jung et al., 2013).

이와 같이 국내의 연구자에 의하여 개발된 기존의 초기형상 결정법들은 목표형상에 근접함에 따라 복잡한 비선형 유한요소해석을 수행하게 된다.

본 논문에서는 먼저 복잡한 비선형 유한요소해석법을 적용하지 않고 목표형상과 매우 근접한 사장교의 최적 초기치 해를 결정할 수 있는 무응력길이 기반 간략해석법(SAM, *Simplified Analysis Method*)을 제안한다. 또한 여타의 하중조합 및 시공단계해석 등의 기하비선형 유한요소해석을 효율적으로 수행하기 위하여, 간략해석법의 무응력길이에 기초한 무응력길이법(ULM, *Unstrained Length Method*)을 적용한다. 이 두 가지 해석법들의 타당성 및 정확성을 보이기 위하여, 초기캠버를 갖는 인천대교모형을 구축하고 간략해석법과 무응력길이법을 이용한 초기형상해석을 수행하고, 그 결과 얻어진 초기해를 상용 유한요소해석 프로그램, MIDAS의 결과와 비교, 분석한다.

2. 케이블요소와 프레임요소

본 장에서는 기하비선형 유한요소해석인 무응력길이법에 적용되는 유한요소를 간략히 설명한다.

2.1 탄성현수선 케이블요소

탄성현수선요소는 Irvine의 엄밀한 탄성현수선 케이블 이론(1981)에 근거하여 Jayaraman and Knudson (1981)이 케이블 유한요소로 처음 정식화하였다. 자중 w 가 작용할 때 Fig. 1을 참조하면 2차원 케이블요소의 적합방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$L_x = -\frac{F_1 L_o}{EA} + \frac{F_1}{w} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{F_2 - wL_o}{F_1} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{F_2}{F_1} \right) \right\} \quad (1)$$

$$L_y = -\frac{F_2 L_o}{EA} + \frac{wL_o^2}{EA} + \frac{1}{w} \left(\sqrt{F_1^2 + F_2^2} - \sqrt{F_1^2 + (F_2 - wL_o)^2} \right)$$

이 요소는 케이블의 정적 비선형거동을 정확히 묘사할 수 있기 때문에 케이블구조의 비선형해석에 널리 사용되고 있다. 무응력길이법과 관련하여 케이블 무응력길이가 변화하지 않는다고 가정할 때 Eq. (1)로부터 Eq. (2)와 같은 증분평형방정식을 유도할 수 있다.

$$\Delta F_c = K_c \Delta U_c \quad (2)$$

여기서, K_c 는 접선강도행렬이다. 절점변위가 주어지면 두 절점의 상대적인 위치가 결정되므로, 절점력에 대한 방정식 Eq. (1)을 반복법으로 풀어서 부재력을 산정한다.

한편, 케이블교량의 완성계에서는 큰 인장력이 도입되므로 새그가 상대적으로 매우 작아서 탄성현수선 요소 대신에 탄성포물선 이론을 적용할 수 있다. 이 경우 현방향의 공칭장력 T_0 와 케이블 직선길이 L 사이의 비선형관계식이 Eq. (3)과 같이 유도될 수 있다.

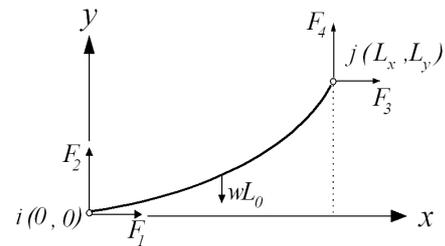


Fig. 1. Nodal Force Vector of an Elastic Catenary Cable Element Under the Self-Weight

$$T_{\theta}^3 + \frac{EA_o}{L_o}(L_o - L)T_{\theta}^2 - \frac{EA_o(wL_o \cos\theta)^2}{24} = 0 \quad (3)$$

여기서, L_o 는 무응력길이다. Eq. (3)은 간략해석법에 의하여 공칭 장력이 결정된 후, 무응력길이를 산정하기 위하여 사용된다.

2.2 비선형 프레임 요소

비선형 유한요소해석 시 주탑 및 주거더는 Jung et al. (2013)의 연구성과를 참조하여 비선형 프레임요소를 사용하였다. Fig. 2는 초기상태에서의 Co-rotational 좌표계에 근거한 프레임요소의 변위성분 및 변형성분을 나타낸 것이다. 여기서 절점변위벡터와 절점력벡터는 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{U}_f^T = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6) \quad (4a)$$

$$\mathbf{F}_f^T = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6) \quad (4b)$$

이때 절점변위는 강제변위성분과 축방향 변형 및 양단 회전각으로 구성되는 3개의 순수변형성분으로 분리시킬 수 있다.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L - L_o \\ U_3 - \alpha \\ U_6 - \alpha \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서, L ; 변형된 상태에서 요소의 두절점간 거리, α ; 요소의 강제회전각, L_o ; 초기상태에서 요소의 무응력길이를 나타낸다. L 과 α 사이의 관계는 Eq. (6)와 같다.

$$L = \sqrt{(x_j - x_i + U_4 - U_1)^2 + (y_j - y_i + U_5 - U_2)^2} \quad (6)$$

$$\tan\alpha = \frac{y_j - y_i + U_5 - U_2}{x_j - x_i + U_4 - U_1}$$

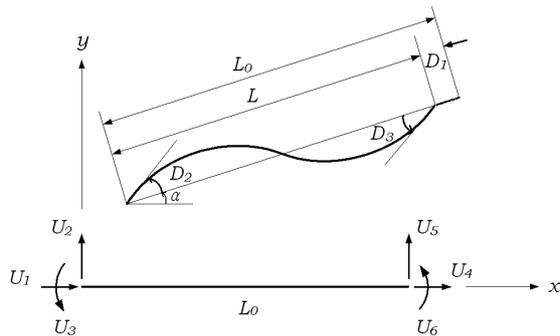


Fig. 2. Nodal Displacements and Pure Deformations of a Frame Element at the Deformed Configuration

여기서, $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ 는 각각 전체 좌표계에서 요소양단의 좌표를 나타낸다.

한편, Bowing effect와 $P-\Delta$ 효과를 고려하여, 휨강성 EI 를 갖는 보-기둥 부재의 부재력-순수변형 관계를 Eq. (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_1 = EA \left(\frac{D_1}{L_o} + \frac{2D_2^2 - D_2D_3 + 2D_3^2}{30} \right) \quad (7a)$$

$$P_2 = \left(\frac{4EI}{L_o} + \frac{2P_1L}{15} \right) D_2 + \left(\frac{2EI}{L_o} - \frac{P_1L}{30} \right) D_3 \quad (7b)$$

$$P_3 = \left(\frac{2EI}{L_o} - \frac{P_1L}{30} \right) D_2 + \left(\frac{4EI}{L_o} + \frac{2P_1L}{15} \right) D_3 \quad (7c)$$

이때 α 만큼 경사진 프레임요소의 절점력과 부재력 사이의 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{T}^T \mathbf{P} \quad (8)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -c & -s & o & c & s & o \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & o \\ -s/L & c/L & o & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix}$$

$c = \cos\alpha, s = \sin\alpha$

이제 프레임요소의 증분평형방정식은 전체 좌표계에서 Eq. (9)와 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F}_f = (\mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} + \mathbf{K}_G) \Delta \mathbf{U}_f \quad (9)$$

여기서, $\mathbf{k} = \partial \mathbf{P} / \partial \mathbf{F}_f$; $\mathbf{K}_G = (\partial \mathbf{T}^T / \partial \mathbf{U}_f) \mathbf{P}$.

3. 간략해석법(Simplified Analysis Method)

비선형 유한요소 해석을 하지 않고 자중하의 사장교의 최적 초기형상을 결정하기 위한 간략해석법을 제시한다. 간략해석법은 몇 가지 기본 가정이 필요하다. 3.1절에서 기본가정을 제시하였으며 3.2절에서 요소의 무응력길이를 구하는 간략해석법 과정을 설명한다.

3.1 해석적 방법의 기본가정

기본가정의 첫 번째로 제작 캠버를 제외한 주 거더에 수직변위가 발생하지 않도록 스테이 케이블의 정착부를 가상지점으로 치환한다. 이로 인해 주거더에는 글로벌(global)모멘트를 제외한 국부(local)모멘트만 발생시켜 거더의 휨 모멘트를 최소화할 수 있다.

두 번째로 사장교의 주탑에 발생하는 모멘트를 최소화하기 위해 중앙경간과 측경간 자중의 무게를 같게 한다.

세 번째로 각 케이블 요소는 Fig. 1에서 보느냐와 같이 자중 하에서 포물선 형상이며 절점하중은 T_θ 와 수직반력성분 $wL_0/2$ 로 분해 할 수 있다. 또한, 경사진 케이블의 무응력길이 L_0 는 Eq. (3)의 3차 방정식을 풀어서 구할 수 있다. 여기서 공칭장력 T_θ 와 현의길이는 각 스테이 케이블의 정착부사이의 거리를 적용하였다.

마지막으로 백 스테이 케이블 부근의 긴 케이블의 경우 정해와 편차가 크기 때문에 내개의 포물선 케이블요소를 사용한다. 하지만 그 이외의 스테이 케이블의 경우 한 개의 포물선 요소로 모델링한다.

3.2 간략해석법의 해석 절차

최적의 초기형상은 거더에 글로벌 휨 모멘트를 제외한 국부적 휨 모멘트만 발생하도록 하는 것이다. 하지만 교량 전체 모델에 비선형 해석을 수행할 경우, 주거더의 제작캠버와 스테이 케이블의 수평장력성분으로 인한 $P-\Delta$ 효과 때문에 필연적으로 주거더에 매우 큰 글로벌 휨 모멘트가 발생할 수 있다. 이러한 문제는 연속보 해석을 통해 해결 할 수 있다. 우선 Fig. 3(a)와 같이 자중하에서 케이블의 정착부를 가상지점으로 치환한 연속보 모델의 선형탄성

해석을 통해 가상지점반력 R_i 를 구한다.

가상지점 반력을 통해 스테이 케이블의 공칭장력 및 무응력 길이를 구한다. 그 후 Fig. 3(b)와 같이 스테이 케이블의 공칭장력의 수평성분이 다시 주거더에 압축력으로 작용하는 연속보 모델을 통해 수정된 가상지점 반력 R'_i 을 구하게 된다. 반복해석을 통해 R'_i 을 갱신 후 목표형상을 만족하는 케이블장력을 구할 수 있다. 해석적 방법의 구체적인 해석절차는 다음과 같다.

단계 1) Fig. 3과 같이 케이블 정착부를 가상의 이동지점으로 치환하여 소위 연속보 해석을 수행한다.

단계 2) 자중과 단계4)이후 갱신된 i 번 케이블장력의 수평성분 H_i 가 압축력으로 작용하는 연속보 해석을 통해 가상지점반력 R'_i 을 계산한다(Fig. 3(b)).

단계 3) 다음 두 경우로부터 i 번 케이블장력의 수평성분 H_i 와 무응력길이를 구한다.

I) 스테이 케이블이 상대적으로 짧은 경우: 스테이 케이블의 정착부 평형조건으로부터 케이블의 공칭장력 $T_{i,s}$ 와 주거더 및 주탑의 축력 $P_{i,g}$, $P_{i,p}$ 를 구한다(Fig. 4).

$$T_{i,s} \sin \theta_i = R'_i + W_{i,s}/2 \tag{10a}$$

$$T_{i,s} \cos \theta_i = H_i \tag{10b}$$

$$H_i = P_{i+1,g} - P_{i,g} \tag{10c}$$

$$T_{i,s} \sin \theta_i = P_{i+1,p} - P_{i,p} - W_{i,s}/2 \tag{10d}$$

여기서, θ_i ; 경사각, H_i ; 갱신된 케이블 장력의 수평성분, $W_{i,s}$; i 번 케이블의 자중을 나타낸다.

II) 스테이 케이블이 상대적으로 긴 경우: Fig. 5와 같이 케이블 요소를 m 개의 요소로 나눈 후 케이블 내부 절점에서의 Eq. (11)과 같은 수직평형조건을 쓴다. 스테이 케이블의 초기 수직형상은 포물선이며 각 반복단계에서 갱신한 분할된 케이블요소의 자중 $W_{i,k}$ 가 적용된다.

$$H_i \frac{y_0 - y_1}{x_1 - x_0} = R'_i + W_{i,1}/2 \tag{11a}$$

$$H_i \frac{y_{k-1} - y_k}{x_k - x_{k-1}} - H_i \frac{y_k - y_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} = \frac{1}{2} (W_{i,k} + W_{i,k+1}) \tag{11b}$$

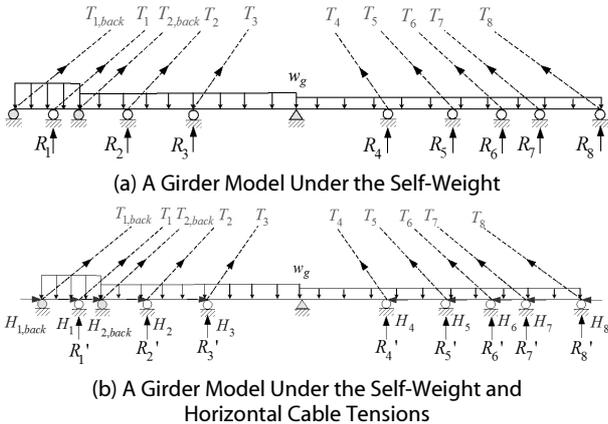


Fig. 3. Continuous Girder Models Having the Fabrication Camber

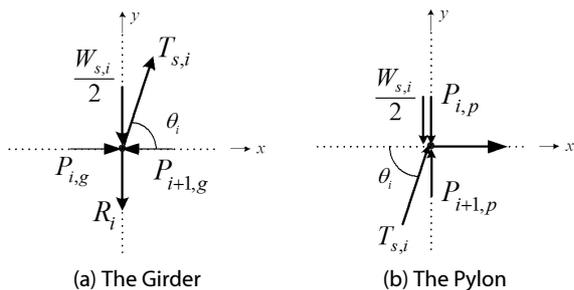


Fig. 4. Free Body Diagrams Due to the Cable Tension at the Anchor Points

$$H_i \frac{y_{m-1} - y_m}{x_m - x_{m-1}} = P_{i+1,p} - P_{i,p} - W_{i,m}/2 \quad (11c)$$

for $k = 1, 2, \dots, m-1$

여기서, $W_{i,k}$ 는 k 번 분할된 요소의 자중을 나타낸다.

단계 4) 백 스테이 케이블장력의 수평성분 $H_{i,back}$ 을 구한다. 실제 지점 때문에 Eq. (3)으로부터 바로 공칭장력을 구할 수 없으며 팬형 또는 하프형 사장교의 경우 백 스테이 케이블의 공칭장력을 바로 구할 수 없는 것은 잘 알려진 사실이다. 케이블장력의 수평성분은 Fig. 6와같이 단계 2)에서 구해진 케이블장력의 수평성분이 작용하고 백 스테이 케이블의 정착부를 이동지점으로 모델링한 주탑을 해석함으로써 구할 수 있다.

단계 5) 스테이 케이블장력의 수렴여부를 판단한다. 만약 수렴하지 않으면 단계 2)로 가서 단계 2)부터 단계 5)까지의 계산을

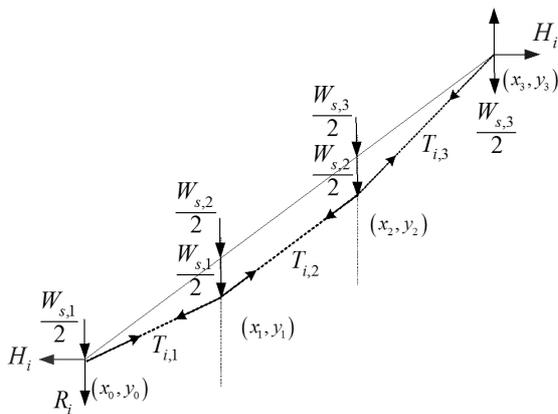


Fig. 5. A Free Body Diagram of the Stay-Cable Member with Internal Nodes ($m = 3$)

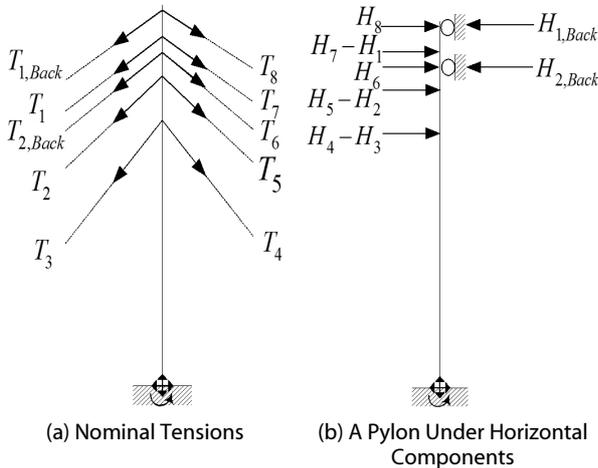


Fig. 6. A Pylon Under Nominal Cable Tensions

반복한다. 수렴 한다면 단계 6)으로 간다.

단계 6) 마지막으로 모든 스테이 케이블의 무응력길이와 장력을 구한다. 만약 백 스테이 케이블이 상대적으로 길다면 다음과 같이 단계 3)의 II)와 유사한 방법으로 구한다. 스테이 케이블부재를 m 개의 요소로 분할하고 수직 평형 방정식 Eq. (12)를 구성한다. 단계 5)에서 백 스테이 케이블 장력의 수평성분 $H_{i,back}$ 가 수렴했기 때문에 (12)을 통해 미지수 y_k 를 구할 수 있다.

$$H_{i,back} \left(\frac{y_{k-1} - y_k}{x_k - x_{k-1}} - \frac{y_k - y_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \right) = \frac{1}{2} (W_{i,k} + W_{i,k+1}) \quad (12)$$

for $k = 1, 2, \dots, m-1$

단계 7) 프레임 부재의 무응력 길이와 축력을 구한다. 모든 프레임부재의 축력은 Eq. (10c), (10d)의 정적평형방정식으로부터 구할 수 있다. 그리고 훅의 법칙을 사용하여 무응력 길이 L_o 를 구할 수 있다. Fig. 7은 모든 케이블요소와 프레임요소의 무응력길이를 구하기 위한 해석적 방법의 알고리즘을 나타낸 것이다.

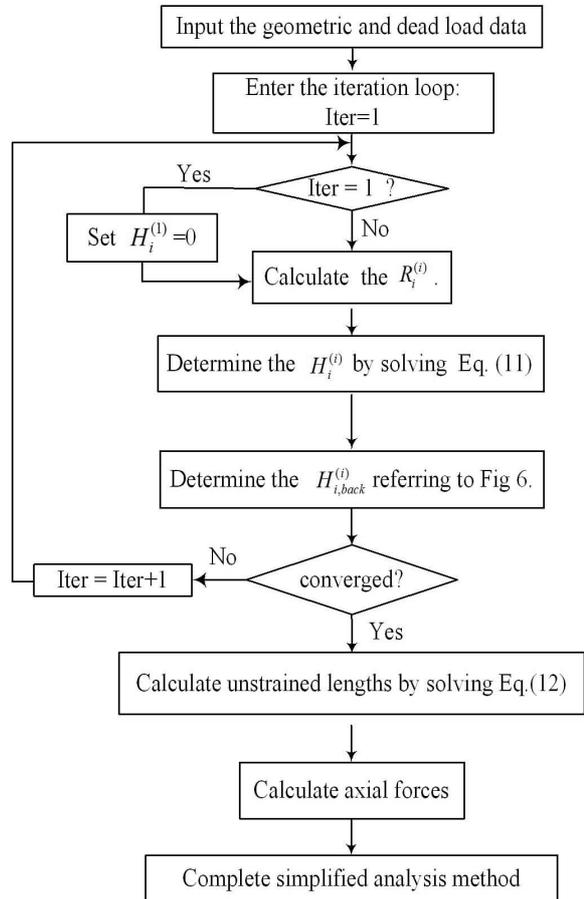


Fig. 7. A Flow Chart of Simplified Analysis Method

4. 무응력 길이법(Unstrained Length Method)

초기치 문제가 아닌 여타의 하중조합 및 시공단계해석을 위해서 무응력길이법을 적용하였다. 무응력길이법은 두 단계로 구성된다. 첫 번째 단계는 TCUD법 또는 해석적 방법 등과 같은 여타의 해석법으로 최적 무응력길이를 결정한다. 이후 두 번째 단계에서는 수렴할 때까지 모든 요소의 무응력길이를 변화시키지 않고 통상적인 Newton 유한요소반복법을 수행하는 것이다. 고정하중 하에서 이 반복계산과정을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$K_L^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = W - F^{(i-1)} \quad (13a)$$

$$U^{(i)} = U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots \quad (13b)$$

$$L_o^{(i)} = L_o^{(i)} = L_o^{(i-1)} \quad (13c)$$

특정 부재가 상대적으로 온도의 변화를 일으키는 경우 단순히 Eq. (13)의 마지막 식에서 온도변화에 대응하는 길이변화를 보정하고 반복계산을 수행하면 온도변화를 고려할 수 있다. 또한 크리프 등에 의한 부재 길이 변화도 유사한 방법으로 적용할 수 있다. 활하중 등의 다양한 하중조합을 고려한 해석은 Eq. (13)을 Eq. (14)와 같이 확장시킴으로서 가능하다.

$$K_L^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = W_L + W - F^{(i-1)} \quad (14a)$$

$$U^{(i)} = U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots \quad (14b)$$

$$L_o^{(i)} = L_o^{(i)} = L_o^{(i-1)} \quad (14c)$$

여기서, W_L 는 고정하중 이외의 추가 하중벡터를 나타낸다. 특정한 시공단계해석, 케이블 파단해석은 동일한 무응력길이를 고려하여 적절한 구조모델을 새로이 구축하여 직접적으로 해석가능하다. 이러한 방식은 기존의 순방향 해석 또는 역방향 해석을 거치지 않고 바로 원하는 형상을 찾아 갈 수 있음을 의미한다.

5. 수치예제

수치예제 해석 시 간략해석법 이용한 초기형상해석 그리고 해석 후 구한 무응력길이를 적용한 ULM 결과와 비교하였다. 또한 상용 유한요소 해석프로그램 MIDAS를 이용한 초기형상해석결과 또한 함께 제시하였다.

MIDAS를 이용한 초기형상 해석시 최적화 기법을 이용한 탄성

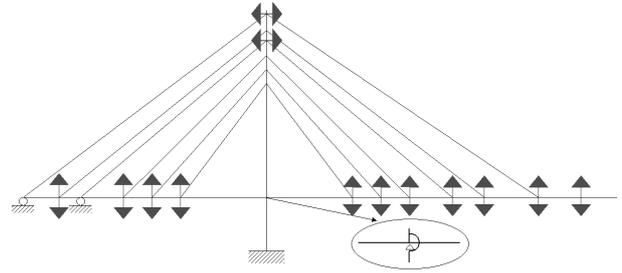


Fig. 8. Additional Geometric Constraints in Initial Shape Analysis Using Midas

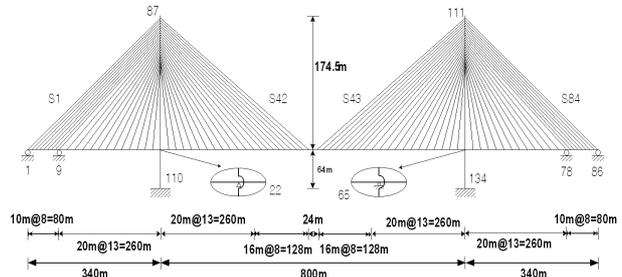


Fig. 9. A 2-D Model of the Incheon Bridge

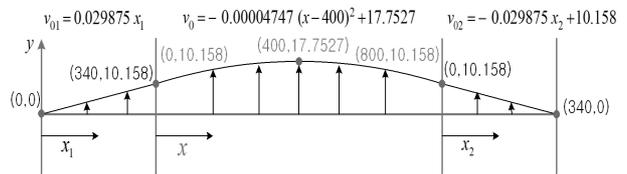


Fig. 10. Elevation of the Fabrication Camber

해석을 수행하며 구속조건은 Fig. 8과 같이 거더 모멘트를 최소화 하기위해 좌상표 방향의 변위를 구속하였다.

해석모델은 Fig. 9와 같이 인천대교를 간략화 시킨 2차원 모델이다. 인천대교는 현재 한국에서 가장 큰 사장교이며 총 경간은 5개로 이루어져 있으며 각각 80m, 260m, 800m, 260m, 80m이다. 주탑은 역 Y자 형태를 가지고 있으며 높이는 238.5m이다. 총 84개의 사장재가 거더를 지지하고 있다. 사장재는 간략해석법에서는 탄성 포물선 요소들, ULM해석시 탄성현수선 요소를 적용하였다. 주거더는 케이블과 케이블 사이에 4개의 프레임요소로 모델링하였다. 또한 시작지간과 끝 지간인 80m구간에 187.5kN/m의 Counterweight를 주어 측경간과 중앙경간의 무게 균형을 맞추었다. 또한 주거더는 Fig. 10과 같이 측경간은 2.9%경사와 중앙경간은 완회곡선으로 17.75m의 최대종거를 가지는 초기캠버를 구현하였다. Table 1은 해석모델의 제원을 나타낸다. 주탑의 0~182m, 182~234.5m에 각각 물성치 Tower 1, Tower 2를 부여하였으며 케이블 1~4, 8~14, 29~56, 71~77, 81~84에 케이블 물성치 Cable 1을 5~7, 15~28, 57~70, 78~80에 케이블 물성치 Cable 2를 부여하였다.

Table 1. Material and Geometric Properties

Member	E (GPa)	A (m ²)	I (m ⁴)	W (KN/m)
Girder	200	2.12	3.16	250
Tower 1	37.50	43.00	240.27	1065.60
Tower 2	37.50	24.13	141.71	689.10
Cable 1	195.00	0.02	-	1.86
Cable 2	195.00	0.01	-	0.93

Table 2. Unstrained Cable Lengths by Simplified Analysis Method

Cable No.	Unstrained Length (m)	Remarks
1	380.5374	back stay
3	361.302	stay cable
5	340.8021	stay cable
7	321.1997	stay cable
9	302.6536	back stay
11	265.9562	stay cable
13	230.8508	stay cable
15	197.3629	stay cable
17	167.3898	stay cable
19	142.4909	stay cable
21	125.7505	stay cable
23	130.386	stay cable
25	149.8214	stay cable
27	176.3974	stay cable
29	207.715	stay cable
31	241.4963	stay cable
33	276.9854	stay cable
35	310.2988	stay cable
37	340.458	stay cable
39	370.9955	stay cable
41	401.9189	stay cable
42	416.9025	stay cable

Table 2는 간략해석법의 무응력길이를 나타낸 것이다. 이 무응력 길이를 이용하여 ULM해석을 통해 여타의 하중조합해석, 시공단계 해석 등이 가능하다.

Table 3은 해석적 방법, 마이다스, ULM해석시 결과를 나타낸 것이다. 해석적 방법을 이용한 초기형상결과와 최적화 기법을 이용한 MIDAS 초기형상의 결과값이 다음과 같이 매우 유사한 결과를 나타내고 있다. 거더 및 주탑의 최대모멘트, 케이블 최대 장력은 0.1%미만의 오차를 나타내었다. 해석적 방법을 이용한 초기형상 해석 후 구해진 무응력길이를 적용한 ULM 해석과 MIDAS 해석 결과 중 변위를 비교해보면 거더의 수축량은 약 238mm 탑정부의

Table 3. Max. Internal Forces and Displacements of the Main Cable, the Girder and Towers

		SAM	MIDAS	ULM
Girder	Max. Vertical Displacement (mm)	-	0.6	0.8
	Max. Axial Shortening (mm)	-	261.	23.3
	Max. Moment (KN-m)	7,858.5 -10,141.3	7,856.9 -10,144.8	7,244.8 -10,746.5
Pylon	Max. Vertical Displacement (mm)	-	49.4	1.4
	Max. Horizontal Displacement (mm)	-	1.0	7.2
	Max. Moment (KN-m)	48,40.6 -16,681.4	4,844.8 -16,667.8	5,175.4 -15,563.4
Max. Tension (kN)		17,056.4	17,060.7	17,295.7

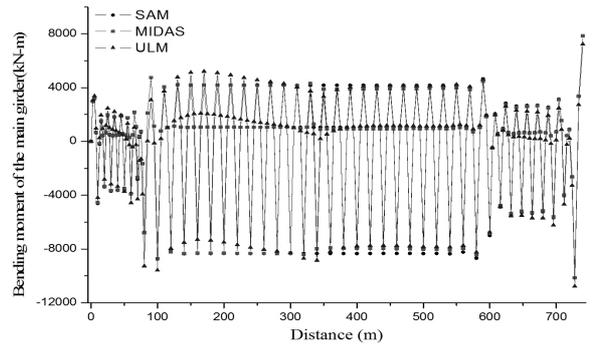


Fig. 11. Bending Moment Diagram of the Main Girder

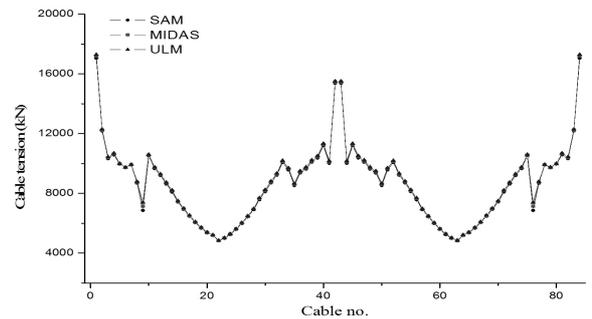


Fig. 12. Distribution of Stay-Cable Tensions

수직변위는 약 48mm 덜 발생하였으며, 거더의 처짐은 0.2mm 더 발생하였고 주탑 탑정부의 수평변위는 6.2mm 더 발생하였다. MIDAS의 해석결과와 단순히 비교해볼 때 부재의 길이방향 변위 제어의 경우 MIDAS 해석결과보다 훨씬 변위를 잘 제어하지만 부재 길이방향에 수직변위는 MIDAS 해석결과의 변위가 더 작게 나타났다. 또한 거더 및 주탑에 발생한 휨 모멘트결과의 경우 절대 최대값으로 비교해볼 때 거더의 경우 MIDAS 해석결과가 주탑의 경우

ULM해석 결과가 더 좋은 결과를 보여주지만 이 정도의 결과값 차이는 활하중이나 기타 하중 작용 시 발생하는 부재력의 크기에 비한다면 아주 작은 값으로 구조계 전체에 큰 영향을 미치지 않을 것이라 판단된다.

Fig. 11은 주거터 1/2모델의 휨 모멘트를 나타낸 것이다. 가상 이상적인 초기형상의 거더모멘트 분포는 케이블 정착부를 지점으로 한 연속보의 거더모멘트 분포를 나타내는 것이다. 본 간략해석법과 구해진 무응력 길이를 적용한 ULM해석 시에도 이상적인 거더모멘트분포를 확인 할 수 있었다. Fig. 12는 케이블 장력을 나타낸 것이다. 케이블 장력의 경우 해석적 방법과 ULM의 차이는 약 평균 1%차이를 보였으나 9, 76번 케이블에서 약8% 비교적 큰 차이를 보였다. 또한 MIDAS와 비교 시 약 0.5%의 차이를 보였으며 ULM과 비교 시와 마찬가지로 9, 76번 케이블에서 약 4%의 차이를 보였다.

6. 결론

이 논문에서는 사장교의 최적 초기형상과 무응력길이를 산출하기 위하여 선형탄성해석에 기초한 간략해석법을 제안하였다. MIDAS를 이용한 초기형상해석과 무응력길이 기반의 비선형 유한요소해석을 인천대교모델에 적용하여 해석결과를 비교, 분석하였다. 이것으로부터 다음의 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 간략해석법을 이용한 초기형상해석이 $P-\Delta$ 효과를 크게 감소시켜서 주거터에 큰 휨모멘트를 발생시키지 않았다. 이것은 케이블정착부에서 거더 수직처짐이 발생하지 않도록 구속한 거더모델에 반복계산에 의한 정확한 거더압축력을 고려한 것에 기인한다고 판단된다.
- (2) 결과적으로 제안된 간략해석방법은 복잡한 기하비선형 유한요소해석을 수행하지 않고 사장교의 최적 초기형상과 이에 대응하는 무응력길이를 산정할 수 있다.
- (3) 또한, 간략해석법으로 얻은 무응력길이를 ULM법에 적용한 결과값과 MIDAS 해석값을 비교하여, 두 해석의 부재력들은 서로 잘 일치하는 최적의 초기치를 제공하였다. 그러나 주거터와 주탑의 축방향 신축량에 대한 MIDAS 결과는 다소 큰

값을 보였는데, 이것은 MIDAS를 이용한 최적화과정에서 신축과 관련된 구속조건을 도입할 수 없었기 때문이다.

- (4) 무응력길이를 이용한 비선형 유한요소해석법(무응력길이법)을 확대 적용하면, 순방향 또는 역방향해석을 거치지 않고 직접적으로 원하는 시공단계형상을 무응력길이법을 이용하여 매우 효과적으로 구할 수 있다(Park et al., 2016).

References

- Irvine, H. M. (1981). Cable structures.
- Jayaraman, H. B. and Knudson, W. C. (1981). "A curved element for the analysis of cable structures." *Comput Struct*, Vol. 14, pp. 325-333.
- Jung, M. R., Min, D. J. and Kim, M. Y. (2013). "Nonlinear analysis methods based on the unstrained element length for determining initial shaping of suspension bridges under dead loads." *Comput Struct*, Vol. 128, pp. 272-285.
- Kim, C. H. and Lee, H. S. (2005). "Analyses of initial equilibrium states of cable-stayed bridges by optimization." *Journal of the Korean Society of Civil Engineers*, Vol. 25, No. 6, pp. 1071-1084 (in Korean).
- Kim, D. Y., Jo, K. S. and Kim, M. Y. (2012). "Comparison study of an improved initial force and TCUD method for initial shape analysis of cable-stayed bridges." *Journal of the Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 25, No. 1, pp. 101-108 (in Korean).
- Kim, J. C. (1999). Determination of initial equilibrium state and construction geometry, Ph.D. Seoul National University (in Korean).
- Kim, K. S. and Lee, H. S. (2001). "Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges." *Comput Struct*, Vol. 79, pp. 2681-2692.
- Kim, M. Y., Kyung, Y. S. and Lee, J. S. (2003). "An improved method for initial shape analysis of cable-stayed bridges." *Journal of Korean Society of Steel Construction*, Vol. 15, No. 2, pp. 175-185.
- Park, S. W., Jung, M. R. and Kim, M. Y. (2016). "Construction stage analysis of cable-stayed bridges using the unstrained element length method." *Journal of the Korean Society of Civil Engineers*, Vol. 36, No. 6, pp. 991-998 (in Korean).
- Wang, P. H., Tseng, T. C. and Yang, C. G. (1993). "Initial shape of cable-stayed bridges." *Comput Struct*, Vol. 47, pp. 111-123.