韓國數學教育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2016.30.1.23
제 30집 제 1호, 2016. 2. 23-46

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 30, No. 1, Feb. 2016. 23-46

GSP를 활용한 중학교 2학년 수학 영재학급의 일반화 수업 분석과 교육적 시사점
- Viviani 정리를 중심으로 -

강 정 기 (김해대곡중학교)

본 연구는 교육 현장의 영재학급에 대한 바람직한 일반화 수업 구현을 돕는 것을 목적으로, GSP를 활용한 일반화 수업을 설계 및 적용해봄으로써 수업의 실제를 파악해 보고자 하였다. 이를 위해 중학교 2학년 영재학급 학생 13명을 대상으로 GSP를 활용한 Viviani 정리의 일반화 수업을 계획하여 적용해 보았다. 그 결과 'GSP에 의한 추측 조정과 패턴 확인', 'GSP 확인이 증명이라는 오개념과 극복', '주제 이탈과 인지적 격차', '미완의 추측에 의한 증명 완성', '일반화와 일반성 이해 사이의 괴리'라는 다섯 가지 주제를 추출할 수 있었다. 추출한 주제를 토대로 영재학급에서의 바람직한 일반화 수업 구현을 위한 교육적 시사점에 대해 논의하였다.

Ⅰ. 서론

수학 교수·학습에서 일반화는 중요한 것으로 받아들여져 왔다. Davydov(1990)는 '학생들에게 일반화를 경험하게 하는 것은 학교 교육의 주요 목적 중 하나'라고 주장하였다. 또한 Mason(1996)은 일반화는 수학의 심장이며, 만약 교사들이 이에 대해 무지하고 학생들이 일반화를 표현하는 작업을 습관화하지 않는다면 수학적 사고는 발생하기 어렵다고 지적하였다. 이처럼 수학에서 일반화의 중심적 역할이 인정되면서 일반화를 학교 수학으로 가져 오려는 많은 노력이 있어 왔다(김성수·박달원, 2013; 유미경·류성림, 2013; Becker & Reivera, 2005).

특히 일반화의 경험은 영재 학생들에게 더욱 중요한 의미로 비춰진다. 왜냐하면 일반화는 수학적 창의성을 구성하는 요소 중 융통성과 직접 닿아 있기 때문이다. 융통성은 고정된 사고를 극복하고 서로 다른 범주의 반응과 아이디어를 낼 수 있는 능력(신승윤·류성림, 2014)으로, 현재의 사고에서 보다 확장된 사고로의 이동을 지향하는 일반화의 속성과 닮아 있다. 따라서 영재 학생을 대상으로 일반화의 경험을 갖게 하는 것은 중요하며, 이와 관련한 몇몇 시도가 있었다(이헌수·이광호, 2012; 최병훈·방정숙, 2012).

한편, 우리의 전통적 기하 교육에서는 학생 중심의 탐구 활동을 통해 기하적 성질을 추론하고 증명해보는 교수·학습 방법보다 유클리드 기하의 교과서를 따르는 교사 중심의 연역적 증명 지도가 주를 이루어왔으며, 이는 학생들이 기하를 어려워하고 흥미 없게 만드는 주요 요인이 되어 왔다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 관찰과 조작 활동을 통해 기하적 성질에 대한 직관적 추론이 가능한 도구로서 탐구형 기하 소프트웨어가 출현하게 되었다. 대표적인 프로그램으로 GSP나 Cabri 3D가 개발되었으며, 이들은 학생 중심의 탐구 활동이 주가 되는 교수·학습 방식의 변화를 야기하였다(손홍찬, 2011). 특히 GSP의 경우 유클리드 평면 기하에서 학생들의 추론에 대한 즉각적인 피드백을 가능하게 함으로써, 새로운 수학적 사실을 학생 스스로 발견할 수 있는 추론의 도구로 활용 가능하다.

* 접수일(2015년 10월 7일), 심사(수정)일(1차: 2015년 11월 17일, 2차: 2015년 12월 30일), 게재확정일(2016년 1월 9일)
* ZDM 분류 : U53
* MSC2000 분류 : 97U50
* 주제어 : 일반화, 영재, 기하소프트웨어 스케치패드, 비비안니 정리

영재 학생들에게 주어진 정리에 대한 증명만을 탐구하게 하는 것은 창의성의 측면에서 적합하지 못하다. 그들에게 스스로 새로운 정리를 추론하고 완성하는 기회가 부여되어야 하며, 이를 통해 수학적 결과는 이미 만들어진 것이 아니라 발견되어 만들어져 가는 과정임을 인식할 수 있도록 도와주어야 한다. 이는 수학영재 교육의 핵심은 기존의 사고 체계를 초월한 새로운 수학을 발명할 수 있는 능력을 최대한 발현할 수 있도록 창의성을 기르는데 있다는 Sheffield(1999)의 주장과 맥을 같이 한다. 이런 측면에서 영재학급 수업에서 탐구형 기하 소프트웨어의 활용은 새로운 정리의 발견까지 학습 가능하게 하는 유용한 도구로 볼 수 있다.

이에 본 연구에서는 증명 학습의 경험을 갖춘 중학교 2학년 영재학급 학생을 대상으로 GSP를 활용한 일반화 수업을 진행해 보고자 한다. 즉, 실제 교육 현장에서 영재학급에 대한 바람직한 일반화 수업 구현을 돕는 것을 목적으로, GSP를 활용하여 새로운 사실에 대한 추론과 발견을 포함한 일반화 수업을 설계하여 적용해 봄으로써 그 실제를 파악해 보고자 한다. 이를 위해 다음을 연구 문제로 설정하였다.

연구문제: GSP를 활용한 중학교 2학년 수학 영재학급의 일반화 수업에서 나타나는 학생 반응은 어떤 특징을 지니는가?

이러한 학생 반응은 네 가지 측면에 초점을 두고 파악하고자 한다. GSP에 의한 추론에서 나타나는 특징, 추측의 증명 과정에서 나타나는 특징, 학생 사이의 의사소통에서 나타나는 특징, 일반화 경험이 일반성 인식에 미치는 영향 측면에서 나타나는 특징이 그것이다. 이러한 연구 문제에 대한 답을 얻음으로써, 영재학급 학생을 대상의 바람직한 일반화 수업 구현을 위한 교육적 시사점을 얻고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 영재 교육에서의 공학의 활용

수학 영재라는 용어 정의는 합의가 용이하지 않다. 따라서 많은 학자들은 영재들이 보유한 여러 행동 특성을 제안함으로써 용어에 대한 규정을 시도해 왔으며, 이를 종합하면 다음과 같다. 수학 영재들은 수학분야에서의 높은 학업 성취도를 뛰어넘는 비범한 재능과 강한 자아개념, 그리고 수학적 과제에 대한 집착력이 있다. 또한 그들은 수학 분야에서 지적으로 새로운 자극과 도전을 갈망하며 높은 수학적 창의성을 바탕으로 평범하고 일반적인 것보다는 창의적이고 혁신적인 것으로 좋아한다(최종현·송상헌, 2005).

영재 학생들의 고유한 특성을 교육에 반영하기 위해서는 효율적인 방법이 강구되어야 하며, Van Tassel-Baska(1986)은 내용 모델(content model), 인식론적 모델(epistemological model). 과정-산물 모델(process-product model)의 세 가지 모델을 제안하였다. 내용 모델은 내용 교수의 급속한 전개나 내용 정보의 복잡성에 초점을 둔 것으로, 매우 개인화되었기에 다양한 학생이 포함된 전통적 교실에 적용하기에는 어려움이 따른다. 인식론적 모델은 메타인지에 초점을 둔 것으로 학습과 앎의 과정을 점검하는 것으로, 인문학 수업이나 영재 프로그램 추출에서 종종 발견된다. 과정-산물 모델은 학생들이 탐구와 문제 해결에 참여하는 탐구 학습에 주로 의존하며, 이 모델에서 공학의 사용은 필연적이다(Van Tassel-Baska, 1986).

수학 영재학급 수업에서 주로 활용 가능한 모델은 과정-산물 모델로 학생들의 탐구가 핵심이 되는 교육이다. Pyryt(2003)는 영재 학생에게 현실 맥락적인 통합 교육과정 또는 도전적이고 고차원적이며 공학에 기반을 둔 교육과정의 필요성을 주장하였으며, 이는 탐구 중심의 수업을 겨냥한 과정-산물 모델에 해당된다.

수학 영재 교육에서 구성주의 이론은 고차원의 사고 발달을 위한 공학의 활용을 논의하기에 적합한 도구이

다. Jonassen(2000)은 지식 구성을 위한 컴퓨터나 다른 공학 도구의 사용을 정신도구(mindtool)라는 용어로서 묘사한다. 정신도구는 인지적 도구와 같은 의미의 용어로, 사고 과정을 확장하고 지지하는 정신적이며 동시에 컴퓨터를 사용하는 일종의 장치를 의미한다(Liu & Bera, 2005).

Sheffield(2007)는 공학이 영재 학생들의 내적 구성물이어야 하는 이유를 세 가지로 제시하고 있다. 첫째, 공학은 10대들의 삶의 연속적 일부이므로 영재들은 일상의 삶 속에 공학을 균일하게 통합할 수 있다. 따라서 공학의 존재와 공학에 대한 학생의 관심을 무시하는 것은 과실에 해당한다. 둘째, 교육자들은 미래 공학의 세계에 대해 학생들을 준비시켜야 할 필요가 있다. 미래에 도래할 혁신에 대비하여 교육자들은 학생들이 더 높은 수준의 사고와 협력을 발달시키는 방법으로 공학을 사용할 수 있게 해야 하며, 이는 21세기를 살아가는데 필요한 핵심 능력이자 영재교육의 목표이기도 하다. 셋째, 추상적 사고와 급속한 처리를 요하는 오늘날의 공학을 사용할 때, 영재 학생들은 전형적으로 특별하고 효율적인 기술을 보유하게 된다.

그 동안 영재 학생들의 창의적 잠재성을 촉진하기 위한 많은 교육 프로그램들이 개발되었다(Cho et al., 2004, Mohamed, 2003). 크게 두 가지로 나뉘는데, 하나는 주제와 상관없이 창의성에 관한 기술적 부분을 가르치는 특별한 프로그램을 이용해서 직접적으로 창의성이 학습되고 개발될 수 있다는 것이다. 반면, 다른 하나는 창의성 교수는 주제와 밀접하게 관련되기 때문에 교사들은 대응하는 수업 계획을 철저하게 준비해야 한다는 것이다(Jerwan, 2002). 이러한 두 가지 접근에 대한 학계의 의견은 분분하지만, 영재 교육 프로그램 개발에서 내용적 측면과 창의적으로 접근하는 기술적 부분 두 가지가 주요 초점이 되어야 함을 알 수 있다.

이외에도 El-Demerdash & Kortenkamp(2009)는 비록 기하교육에 국한된 것이긴 하지만, 구체적인 영재 심화 프로그램 개발의 원칙을 다음과 같이 제안하였다.

(1) 활동은 창조적인 방법으로 DGS를 사용해서 몇몇 수학적 아이디어를 탐구할 기회를 학생들에게 제공해야 한다.
(2) 활동은 탐색과 초기 아이디어의 정교화를 통해 수학적 아이디어를 재개발할 기회를 학생들에게 제공해야 한다.
(3) 교수 활동을 가르치는 것은 van Hiele의 기하 개념 학습 단계를 따라야한다: 정보(Information), 안내된 배향(guided orientation), 설명(explication), 자유 배향(free orientation), 통합(Integration)
(4) 활동은 동기를 유지할 목적으로 성공을 경험해야 하므로 학생들의 기술과 부합하는 것이어야 한다.
(5) 영재 심화 활동은 학생들의 사고를 시험하고, 학생들의 성취를 강화하고, 학생들의 기하적 창의성을 개발할 수 있는 것이어야 한다.
(6) 교수 활동은 학생들의 기하적 창의성과 반응의 측면에서 학생들의 기하적 창의성을 드러내고 학생 사이의 차이를 보여주는데 효과적으로 설계되어야 한다.

El-Demerdash & Kortenkamp(2009)가 제시한 영재 프로그램 개발의 주요 원칙을 고려하여, 본 연구에서 사용할 영재 프로그램은 학교 수학에서 다루지 않은 소재의 활용, 탐구 기회 제공, 아이디어 발표의 세 방향으로 개발하고자 한다. 학교 수학에서 다루지 않는 소재의 활용은 기하적 창의성 발휘를 위한 것으로 원칙 5와 관련된다. 탐구 기회 제공은 원칙 1과 관련된다. 아이디어 발표는 자신의 아이디어를 반성하고 정교화하여 개선하는 기회를 제공한다는 측면에서 원칙 2와 관련된다.

2. 일반화에 관한 선행 연구

학교 수학에서 일반화의 성공적인 정착을 위한 많은 노력들이 있어 왔다(Bills, Ainley & Wilson, 2006; Lee, 1996; Stacey & McGregor, 2001). '학생들에게 성공적인 일반화를 안내하기 위해서는 어떻게 해야 하는가?'라는 물음을 필두로 수학교육 연구자들은 문제를 보다 세분화하여 접근할 필요성을 느꼈으며, 다음의 세 가지 방향에 초점을 둔 연구가 진행되어 왔다.

첫째, 일반화의 유형을 분류하기 위한 연구이다. 이것은 여러 종류의 일반화가 있다는 자각에서 비롯된 것이며, 일반화 연구의 이론적 기초를 다지기 위한 것이다. 둘째, 학생들의 오류에 대한 분석을 포함하여, 학생들의 일반화에 대한 다양한 접근을 연구하는 것이다. 이것은 일반화에 대한 교수학적 논의의 기초를 다지기 위한 것이다. 셋째, 일반화를 위한 교육 방법을 제시하고, 이 방법의 효율성을 탐구하는 것이다(강정기, 2013).

일반화의 유형 분류에 관한 연구는 경험적, 구조적 일반화로 분류한 Bills & Rowland(1999)의 연구와 경험적 이론적 일반화로 분류한 Davydov(1990)의 연구가 대표적이다. 이외에도 Radford(2003)는 사실적, 맥락적, 상징적 일반화로, Harel & Tall(1989)은 확장적, 재구성적, 분리적 일반화로 구분하기도 하였다.

학생들의 일반화에 대한 다양한 접근을 연구한 것으로는 Starcey(1989), Orton & Orton(1999), 최병훈·방정숙(2012), 유미경·류성림(2013)의 연구를 들 수 있다. Starcey(1989)는 9세에서 13세까지의 대다수 학생들이 정비례가 아닌 선형패턴을 일반화할 때, 잘못된 정비례 방법을 사용하고 있음을 보고하였다. Orton & Orton(1999)은 10세에서 13세까지의 학생들이 함수적 방법보다 재귀적 방법을 선호하며, 이 접근에 초점을 맞추어 문제를 해결하는 경향이 있음을 보고한바 있다. 최병훈·방정숙(2012)은 초등학교 4, 5, 6학년 영재학급 학생의 패턴 일반화에 대한 해결 전략을 비교 분석한 결과, 일반화를 시작하는 단계에서 학생들은 패턴의 앞 뒤 수를 이용하여 문제를 해결하는 순환적인 관계인식 전략 사용이 많았으며, 일반화를 형성하는 단계에서 학생들은 학년이 높아질수록 주어진 정보로 규칙이나 식을 만들어 해결하려는 상황적 인식 전략 사용이 증가함을 보고하였다. 또한 유미경·류성림(2013)은 초등수학영재와 일반학생 사이의 대수 패턴 일반화 방법을 비교하였으며, 두 집단 모두에서 대수적 조작과 관련된 규칙을 식으로 정확하게 나타내는 기술적 부분에서의 오류가 가장 많이 나타났음을 보고한 바 있다.

일반화를 돕기 위한 교육 방법에 대한 연구로 Ainley, Bills & Wilson(2005)과 Zazkis, Liljedahl & Cheronoff(2007), 이헌수·이광호(2012)의 연구를 들 수 있다. Ainley, Bills & Wilson(2005)은 일반화를 발달시키고 그것을 수학적 용어로 표현하기 위해 Spreadsheet를 이용할 것을 제안하였다. Zazkis, Liljedahl & Cheronoff(2007)는 패턴을 인식해야 하는 일반화 문제의 성공을 돕기 위해서 큰 수를 활용할 것을 제안하였다. 이헌수·이광호(2012)는 GSP가 기하학적 원리와 개념을 직관적으로 이해하고 다양한 사례를 검증함으로써 내분 삼각형 넓이의 일반화에 도움이 될 수 있다고 주장하였다.

이상에서 일반화와 관련한 연구를 살펴보았는데, 크게 세 방향에 초점을 둔 연구가 진행되어 왔다. 본 연구에서는 이들 중 이헌수·이광호(2012)의 연구 결과에 주목하여 중학교 학생을 대상으로 대수적 패턴이 아닌 기하 소재에 대한 일반화의 교육 방법을 다루어보고자 한다.

3. 국내 수학영재교육의 현황

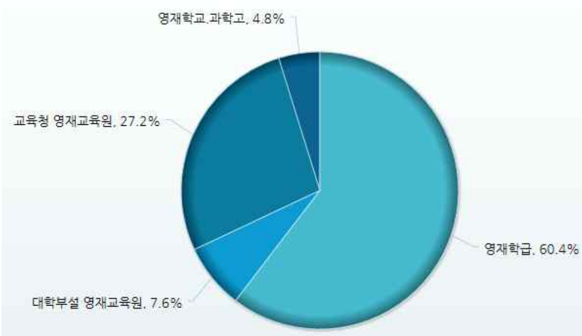
국내 영재교육기관은 크게 3가지로 구분된다. 교육감 관할의 영재학급, 교육청·대학에서 운영하는 영재교육원, 고교생 이상에게 영재교육을 실시하는 기관으로 정부에서 운영하는 영재학교가 있다.

영재학급은 초·중·고 각 급 학교에서 운영되는 영재반을 말하며 지리적으로 영재교육원에 갈 수 없는 중소도시 및 농어촌 지역의 학생들에게 영재교육의 기회를 제공하고, 영재를 발굴하는데 중점을 두고 있다. 보통 1주일에 2-4시간 정도로 운영하고, 학급당 학생 수는 20명 이내로 선발한다. 영재교육원은 대학, 시도 및 지역교육청, 정부출연 연구기관, 공익법인 등에서 설치, 운영이 가능하다. 영재교육원은 학교 수업시간 중에도 학교장의 허가를 얻어 교육을 받을 수 있도록 하며, '시간제(pull-out)'형태로도 운영이 가능하도록 되어 있다. 연간 수업시간은

교육청별로 다양하며 70-150시간이다. 영재학교는 전문분야 영재를 대상으로 전일제로 운영하는 학교를 말한다. 가장 뛰어난 잠재능력을 가진 영재를 대상으로 하며 고등학교 급에서 운영되고 있다. 가장 대표적인 영재학교는 한국 과학영재학교로 2003년부터 운영되고 있다(장한나라, 2013).

시도별 영재교육기관수 통계를 보면 2010년에 총 1,840개, 2011년에 총 2,586개, 2012년에 2,868개, 2013년에 3,011개, 2014년 2,920개가 운영되고 있다(영재교육종합데이터베이스, 2015). 영재교육기관수는 지속적으로 증가하는 추세에 있다가 2014년부터 주춤한 추세다.

2014년의 영재교육기관 유형별 현황을 살펴보면, 영재학급이 2,545개로 가장 많이 운영되었으며, 교육청 영재교육원이 278개, 대학부설 영재교육원이 71개, 영재학교는 26개였다. 따라서 영재교육 대상자에서도 영재학급 학생들이 60.4%로 가장 높은 비율을 차지하고 있다(영재교육종합데이터베이스, 2015).



[그림 II-1] 영재교육 기관 유형별 영재교육 대상자 비율

그런데 수학 분야를 대상으로 한 국내저널[1]의 영재에 관한 연구를 초·중·고 학교급 별, 영재교육 기관 유형별로 구분한 결과는 <표 Ⅱ-1>과 같다. 영재학급을 대상으로 한 연구는 고작 9.7%에 불과하다. 대다수의 연구는 교육청 영재교육원과 대학부설 영재교육원의 학생들에게 집중되어 있었다. 이는 엄격한 선발의 과정을 거친 교육청 영재교육원과 대학부설 영재교육원의 학생들이 ‘영재’라고 보는 시각 때문인 것으로 분석된다. 그러나 국내 영재교육 기관 중 영재학급이 차지하는 비율이 월등이 높은 것이 현실이다. 이러한 현실을 감안할 때, 영재교육의 활성화를 위해서는 영재학급을 대상으로 한 다양한 연구가 진행될 필요가 있다. 더욱이 소수의 영재학급 연구 역시 초등학교에 국한되어 있으며, 중학교나 고등학교에서의 연구는 드물다. 이에 본 연구에서는 중학교 영재학급을 대상으로 한 연구를 시도하며, 본 연구에서의 ‘영재’는 곧 각 학교에서 운영되는 영재학급의 학생으로 제한하여 다루고자 한다.

1) 여기서 조사된 국내저널은 「영재교육진흥법」이 시행된 2002년부터 발간된 수학교육, 수학교육논문집, 영재교육연구, 수학교육학연구, East Asian, mathematical journal, 초등수학교육, 한국초등수학교육학회지, 학교수학, 한국학교수학회논문집, 한국수학사학회지, 한국콘텐츠학회논문지, 한국산업정보학회논문지의 논문을 말한다.

<표 II-1> 국내 수학영재에 관한 연구 동향[2)]

	초등학교		중학교		고등학교	
	도수	비율(%)	도수	비율(%)	도수	비율(%)
영재학급	16	9.1	1	0.6	0	0
교육청 영재교육원	45	25.7	18	10.3	2	1.1
대학부설 영재교육원	63	36	18	10.3	0	0
영재학교	0	0	0	0	12	6.9

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

연구 대상은 창원시에 소재하는 N중학교 2학년 수학 영재학급 학생 13명(남 5명, 여 8명)이다. 영재학급은 선발 자체가 학교 범위 내에서 이루어졌으므로, 대학 부설 영재원 및 교육지원청 영재원 학생들보다 수학 학업 성취도가 낮은 편이다. 그렇지만 이들은 1단계 서류전형, 2단계 경남교육청에서 개발한 영재성 검사와 면접을 거쳐 선발된 대상이다. 이들의 2014년 2학기 수학 성적의 평균은 91.35점으로 학년 평균 64.3점에 비해 높은 편이다.[3)] 학교 성적이 우수한 만큼 수학에 대한 높은 관심과 자신감을 지니고 있었다. 더욱이 N중학교 영재 선발 과정에서 면담을 거쳐 수학적 의사소통 능력을 검정했던 만큼 자신의 의사를 적극적으로 표현하는 능력을 갖춘 학생들이다. 다시 말해, 이들은 본 연구에서 의도하는 단위 학교에서의 엄격한 심사를 거쳐 선발된 영재학급의 일원인 것이다.

이들은 GSP 사용 경험은 있지만, 일반화 경험은 부족한 학생들이다. 학생들은 영재학급 개설 이후 100시간 이상의 영재 수업을 받았으며, 특히 GSP 작도에 관한 교육 프로그램을 이수하여 GSP의 사용 경험을 갖춘 대상이었다. 하지만 일반화 수업은 정규 교육과정에서 접하기 어려우며, 영재학급 프로그램에 포함되어 있지 않았다. 다시 말해, 연구 대상자는 일반화의 경험이 부족한 학생들에 해당한다.

하나의 수학 영재학급을 대상으로 한다는 점에서 전국의 수학 영재학급으로 일반화하는 데 제한점이 있다. 그럼에도 수학 영재학급 수업 운영에 있어 구체적 사례를 제시하고, 그 교육적 시사점을 제공한다는 점에서 향후 이와 관련한 연구를 위한 발판이 될 수 있을 것으로 본다.

2. 영재학급 수업 프로그램 개발 및 수업 절차

본 연구에서는 GSP의 이점을 극대화하기 위하여, 두 가지 과제 선정의 원칙을 설정하였다. 첫째, 역동적 기

2) 학교급 별 또는 영재교육 기관 유형별 구분이 어려운 연구는 제외하였다. 예컨대, 수학 영재 교육의 현실화 방안에 대한 연구(김종수·오후진, 2002)는 학교급 별 구분 뿐 아니라, 영재교육 기관 유형별 구분이 어려운 관계로, 스키마와 스키마 사이의 간격이 초등학교 3학년 영재아의 수학의 관계적 이해에 미치는 영향(이상덕·김화수, 2003)은 학교급은 초등으로 분류되지만, 사립 기관의 영재아를 대상으로 하였기에 공식적 영재교육 기관의 유형으로 분류하기 어려워 조사에서 제외하였다. 또한 유형이 2가지 이상으로 분류되는 경우에는 복수로 처리하였다. 예컨대, 초등학교 수학 및 과학 영재와 일반아동의 학습양식과 성격유형의 차이 연구(김판수·강승희, 2003)는 교육청 영재교육원과 대학부설 영재교육원이 중복되어 초등-교육청 영재교육원, 초등-대학부설 영재교육원 두 가지에 표시하였다.

3) N중학교 2014학년도 2학기 수학 점수의 표준편차는 23.8점이며, 성취도별 분포비율은 A:18.3, B:11.3, C:16.7, D:13.4, E:40.3이었다.

하환경에서 불변성 인식이 가능한 과제이어야 한다. 둘째, 추측을 촉진하기에 적합한 과제이어야 한다. 영재학급 수업에서 GSP를 활용하는 만큼, 그 이점을 적극 활용할 필요가 있다. 문혜령·고상숙(2010)은 GSP의 특징으로 빠르고 정확한 그림, 칠판에 나타낸 특정한 경우를 넘어선 표현, 설정한 가설에 대한 확인, 복잡한 도형을 쉽게 그림, 동적인 칠판으로 사용 등을 제안하였다. 여기서 '빠르고 정확한 그림', '복잡한 도형을 쉽게 그림'과 같은 특징은 GSP를 활용하면 어떤 과제에서든 보편적으로 쉽게 얻을 수 있다는 점에 착안하여, 나머지 특징을 부각하는데 집중하였다. 그 중 특정한 경우를 넘어선 표현과 동적인 칠판으로 사용은 역동적 기하환경에서 불변성이 나타나는 상황으로 해석하였다. 그리고 설정한 가설에 대한 확인은 추측 촉진에 적합한 경우로 해석하였다. 따라서 '불변성이 나타나고 추측 촉진이 용이한 프로그램'이라는 과제 선정의 원칙으로 설정하였다.

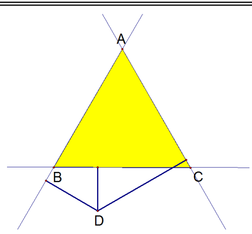
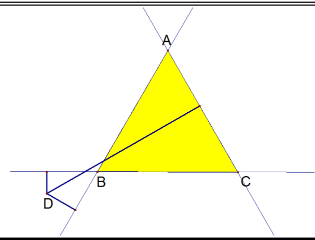
이러한 두 가지 과제 선정의 원칙에 따라 기하 정리를 검토하였으며, 최종적으로 'Viviani 정리'를 선정하였다. Viviani 정리는 이탈리아의 수학자 Vincenzo Viviani가 처음으로 제출한 기하학적 정리로 정삼각형 내 부의 한 점에서 각 변에 그은 세 수선의 길이의 합은 일정하다는 정리이다. 따라서 이 정리는 GSP에서 내 부의 한 점을 옮겨 다니는 역동성 속에서 세 수선의 길이의 합이 불변성을 유지하는 수학적 정리이므로 첫 번째 선정 원칙에 적합하다. 또한 정삼각형과 내부의 한 점이라는 조건은 과도하거나 부족한 조건도 아니기에 추측을 촉진하기에 적절한 문항으로 판단되었다.[4)]

본 연구는 내부의 한 점을 일반화의 대상으로 삼았다. Viviani 정리는 여러 가지 방향으로의 일반화가 가능하다. 이를테면, 나머지 요소는 고정한 체 정삼각형을 정다각형으로 일반화가 가능하다. 또한 정삼각형을 고정하고 내부의 한 점을 경계 및 내부로 확장 가능하다. 이 모든 일반화를 4차의 수업에서 성취하기란 쉽지 않기에 본 연구에서는 내부의 한 점만을 일반화의 대상으로 삼았다. 그리하여 다음의 세 가지로 구분된 탐구 대상을 개발할 수 있었다.

- 내부에서의 Viviani 정리
- 경계에서의 Viviani 정리
- 외부에서의 Viviani 정리

그런데 연구자는 각 경우에 대한 결과를 직접 구해보는 과정에서 '외부에서의 Viviani 정리'는 두 가지로 분류될 수 있음을 확인할 수 있었으며, 이는 <표 Ⅲ-1>와 같다.

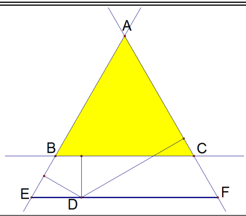
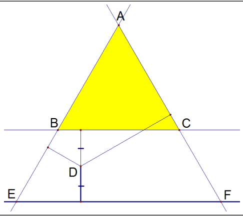
<표 Ⅲ-1> 외부에서의 Viviani 정리의 두 유형

<table>
<tr><th>유형 1</th><th>유형 2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

4) 추측을 촉진하기에 적절한 문항은 제시된 조건이 과도하지도 부족하지도 않아야 한다. 손홍찬(2011)은 과도한 조건이 제시된 상황의 경우 다양한 추측이 제기되기 어려운 난점을 지니며, 너무 조건이 주어지지 않은 소박한 상황의 경우 학생들의 사고 활동이 미약함을 지적한바 있다.

두 경우 모두 학생들에게 쉽지 않은 인지적 과제라는 판단 하에 두 유형을 모두 다루기보다, 유형 1만을 다루기로 결정하였다. 유형 1은 점 D를 지나고 선분 BC와 평행한 직선을 그으면, 경계에서의 Viviani 정리를 활용한 해결이 가능하다. 또한 점 D에서 선분 BC에 내린 수선을 <표 Ⅲ-2>와 같이 대칭시키면, 내부에서의 Viviani 정리를 활용한 해결이 가능하다. 다시 말해, 외부에서의 Viviani 정리는 앞선 두 경우로 환원하여 해결이 가능하다. 이외에도 삼각형의 넓이 공식을 활용한 해결 등 다양한 접근이 가능하다. 이처럼 외부에서의 Viviani 정리는 유추에 의한 해결 뿐 만 아니라 학생들의 다양한 접근이 예상되는바, 일반화를 위한 탐구 소재로 적합하다고 생각된다.

<표 Ⅲ-2> 유형 1에 대한 두 가지 접근

접근	해법
 경계에서의 Viviani 정리 활용	점 D에서 선분 BC에 내린 수선을 제외한 나머지 두 수선의 길이의 합은 경계에서의 Viviani 정리에 의하여 △AEF의 높이와 같다. 그런데 (△AEF의 높이)=(△ABC의 높이)+(점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 길이)이다. 따라서 세 수선의 길이의 합은 (△ABC의 높이)+2×(점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 길이)이다.
 내부에서의 Viviani 정리 활용	내부에서의 Viviani 정리에 의하여 세 수선의 길이의 합은 △AEF의 높이와 같다. 그런데 (△AEF의 높이)=(△ABC의 높이)+2×(점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 길이)이다. 따라서 세 수선의 길이의 합은 (△ABC의 높이)+2×(점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 길이)이다.

이러한 탐구 과정으로부터 설계된 수업의 절차는 <표 Ⅲ-3>과 같다. 먼저, 1차시에서는 내부에서의 Viviani 정리의 결과를 추측하게하고 이를 GSP에서 작도하여 확인하는 과정을 거친다. 다음 이 정리를 증명하는 과정을 거친다. 2차시에서는 경계에서의 Viviani 정리의 결과를 탐구하게 하고 그것을 GSP에서 확인하는 과정을 거친다. 또한 추측이 제기되면 그것에 대한 증명 기회를 제공한다. 이후 외부에서의 Viviani 정리로 나아간다. 이 경우 역시 결과를 추측하는 기회를 제공한다. 3차시에서는 외부에서의 Viviani 정리에 대한 추측을 증명하고, 4차시에서는 내부, 경계, 외부에서 얻은 결과에 대한 음미의 기회를 제공한다. 각 차시는 45분씩 진행되었으며, 각 차시에 해당하는 과제를 반드시 수행하는 것을 원칙으로 하기보다 학생들의 어려움으로 인해 과제 수행이 늦어질 경우 다음 차시로 넘겨 학생들의 충분한 사고 기회를 제공하는 것을 원칙으로 하였다.

<표 Ⅲ-3> 차시별 주요 과제

차시	주요 과제
1	내부에서의 Viviani 정리의 결과 추측과 그 증명
2	경계에서의 Viviani 정리의 결과 추측과 그 증명, 외부에서의 Viviani 정리의 결과 추측
3	외부에서의 Viviani 정리의 결과 추측에 대한 증명
4	내부, 경계, 외부에서 Viviani 정리의 일반성 음미

수업은 대형 전자 칠판이 부착된 N중학교 수학 교과실에서 진행되었으며, 수업은 탐구 및 발표식으로 진행되었다. 학생들에 의해 제기된 추측의 간단한 확인에서만 연구자가 GSP를 주도하고, 그 이외의 활동에서는 학생들에게 GSP 사용 기회를 제공함으로써, 학생 중심 수업을 구현하고자 하였다. 즉, 학습의 주체는 곧 학생이라는 관점에서 GSP 프로그램의 사용 역시 학생들에게 일임하고자 하였다(김진호, 2012; 정찬식·노은환, 2014).

3. 자료 분석 및 방법

본 연구는 한 대의 비디오 카메라를 이용하여 전체적인 녹화 방식으로 수업 자료를 녹취하였다. 또한 각 과정에 대한 주요 사항은 필드 노트에 기록하는 방식을 취하여 비디오 녹화 외의 수집을 병행하였다. 이러한 두 가지 자료 수집을 통해 수집된 자료는 질적 방법으로 분석되었다.

수집된 자료는 과제별, 특질별로 수업 장면을 구분하는 작업과 각 사례별 핵심 주제 추출이라는 분석이 이루어졌다. 수업은 하나의 연속적 과정이지만 연속적 시각에서 볼 때 수업을 분석하기는 쉽지 않다. 따라서 전체적 수업을 수행한 과제별로 구분하고, 또 각 과제를 수행하면서 빚어지는 특징별로 나누는 구분 작업을 거쳤다. 이러한 두 가지 구분을 통해 각 사례별 핵심 주제를 도출하였다. 그리고 도출한 핵심 주제별로 근거를 확보하는 과정이 이루어졌으며, 이 과정에서 근거가 부족한 주제는 탈락시키는 방식을 통해 핵심 주제 도출의 타당성을 확보하고자 하였다.

학생 반응에 대한 분석의 주요 초점은 네 가지이며, 구체적인 분석 틀은 <표 Ⅲ-4>와 같다. GSP는 학생들의 추론에 대한 즉각적인 피드백을 제공하여 새로운 수학적 사실의 발견을 돕는 추론의 도구이다. 여기서 제기된 추론은 수학적 증명을 통해서 정당화될 수 있다. 이처럼 추론 제기와 증명은 GSP를 활용한 수업의 주요 활동이므로, 이 두 활동에서 나타나는 학생 반응을 주의 깊게 관찰할 필요가 있다. 또한 수업에서 학생들 간 양방향 의사소통의 중요성이 날로 강조되는바(장혜원, 2015), 문제 해결자와 미해결자 사이의 의사소통, 추측 제기자와 미제기자 사이의 의사소통에서 나타나는 특징을 파악하고자 한다. 마지막으로 일반화가 주제인 만큼 일반화 수업 경험이 일반성 인식에 미치는 영향을 조사해 보고자 한다.

<표 Ⅲ-4> 학생 반응 분석 틀

분석 초점	구체적 내용
GSP에 의한 추론에서 나타나는 특징	• GSP에 의한 추측의 변화 과정 • 추측의 변화에 대한 패턴 존재 여부 • 제시된 과제와 관련한 추측의 일관성
추측의 증명 과정에서 나타나는 특징	• 증명이 완성되어 가는 과정 • GSP가 증명에 미치는 긍정적 작용과 부작용
학생 사이의 의사소통에서 나타나는 특징	• 문제 해결자와 미해결자 사이의 의사소통의 특징 • 제기된 추측이 타 학생에게 미치는 의사소통의 특징
일반화 경험이 일반성 인식에 미치는 영향의 측면에서 나타나는 특징	• 일반화 경험이 일반성 인식으로 전이되는지의 여부

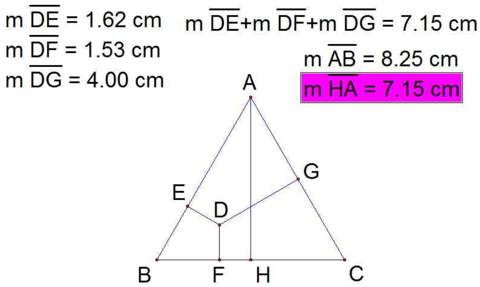
Ⅵ. 연구 결과

학생 반응은 GSP에 의한 추론, 추측의 증명 과정, 학생 간 의사소통, 일반화 경험이 일반성 인식에 미치는 영향의 네 측면에서 나타난 특징을 핵심 항목으로 정리하였다. 구체적으로 추론의 측면에서 ‘GSP에 의한 추측

조정과 패턴 확인', '주제 이탈', 증명의 측면에서 'GSP 확인이 증명이라는 오개념과 극복', '미완의 추측에 의한 증명 완성', 의사소통 측면에서 '인지적 격차', 일반화 경험이 일반성 이해에 미치는 영향 측면에서 '일반화와 일반성 이해 사이의 괴리'라는 핵심 항목을 추출하였다.

1. GSP에 의한 추측 조정과 패턴 확인

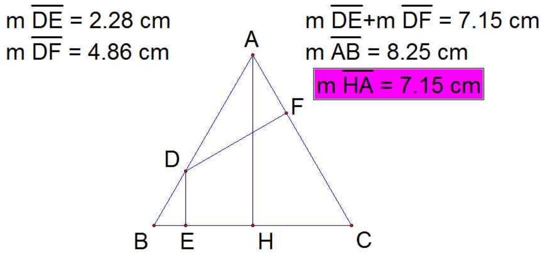
학생들은 GSP를 이용하여 추측을 조정하였다. 첫 번째 추측은 '세 수선의 길이의 합은 한 변의 길이와 같다'는 것이었다. GSP에서의 확인을 통해 그것은 '세 수선의 길이의 합은 정삼각형의 높이와 같다'는 것으로 수정되었다.



[그림 Ⅳ-1] 내부의 점에서 그은 세 수선의 길이 합에 대한 추측의 조정

경계에서도 학생들은 GSP를 이용하여 추측을 조정하였는데, 그 패턴은 이전과 동일하였다. '두 수선의 길이의 합은 변의 길이와 같다'는 첫 번째 추측은 GSP에서의 확인을 통해 '두 수선의 길이의 합은 정삼각형의 높이와 같다'는 것으로 수정되었다.

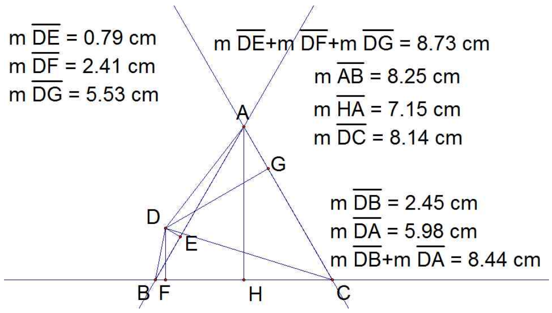
주목할 점은 내부와 경계 각각의 추측과 조정 과정이 동일하다는 것이며, 이는 학생들의 추측에 일종의 패턴이 존재함을 보여준다. 학생들의 초점은 도형 표현에서 외적으로 드러난 '삼각형의 변'에서, 긋지 않으면 나타나지 않는 '삼각형의 높이'로 옮겨갔다. 다시 말해, 학생들의 추측은 외적으로 드러난 특징에서 숨겨진 특징으로 옮겨가는 패턴을 지니고 있었다.



[그림 Ⅳ-2] 경계에서 그은 두 수선의 길이 합에 대한 추측의 조정

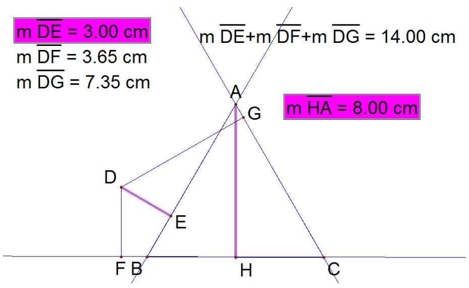
외부에서 그은 세 수선의 길이의 합에 대한 추측 역시도 GSP 확인에 의한 조정이 이루어졌다. 첫 번째 추측

은 한 변의 길이로, 두 번째 추측은 높이로, 세 번째 추측은 $\overline{CD}$의 길이로, 네 번째 추측은 $\overline{DA}+\overline{DB}$로 조정되었다. 외부에서도 초반의 두 추측은 내부 및 경계에서와 동일한 패턴을 지니고 있었다.



[그림 Ⅳ-3] 경계에서 세 수선의 길이 합에 대한 추측의 조정

적합한 추측이 쉽지 않자 연구자는 외부에서 그은 세 수선의 길이 합은 변화하는 것임을 인식시켜 주었다. 그러자 학생들은 변화하는 것과 동일한 값을 가지는 대상이 있을 수 있는지를 의심하였다. 다시 말해, 세 수선의 길이의 합이 위치에 따라 변한다면 같은 값을 가지는 대상이 존재할 수 없다고 생각하였다. 존재성에 대한 의구심은 학생들의 추측 개선을 저해하였기에, 연구자는 학생들에게 $\overline{DE}$와 $\overline{AH}$를 자연수인 수치로 변화시켜주면서 이 부분에 초점을 맞출 것을 권고하였다. 이러한 권고는 학생들의 활발한 추측을 유도하였으며, $\overline{DE}$의 값을 변화시키는 실험 과정에서 패턴을 발견하고 적합한 추측을 제기하는데 성공할 수 있었다.



[그림 Ⅳ-4] $\overline{DE}$와 $\overline{AH}$를 자연수인 수치로의 변화

학생A: 이번에도 높이랑 같은 것 아닐까?
학생B: $\overline{HA}$가 8이라고 나와 있잖아!
학생C: 혹시 둘레의 반?
연구자: (GSP에서 둘레의 반을 측정해 봄)
학생F: 저기를 1로 해 보면 어떻게 되지? 선생님 저기 $\overline{DE}$를 1로 만들어 주세요.
연구자: (GSP에서 $\overline{DE}$를 1로 만듦)
학생들: 어! 2차이 나네!
학생A: 선생님! 학생F가 맞췄어요.
연구자: 학생F! 이야기 해 줄 수 있겠니?

학생F: 선생님! 저기 $\overline{DE}$를 2로 맞춰 주세요.
연구자: (GSP에서 $\overline{DE}$를 2로 만듦)
학생A: 학생F! 대단해요.
학생F: 저 잔 머리인데요. $\overline{DE}$가 1이었을 때, 수선의 길이의 합이 10이고, $\overline{DE}$가 2였을 때는 수선의 길이의 합이 14니까
학생들: 아! 나 뭔지 알 것 같다.
학생F: 세 수선의 길이 합은 '$\overline{DE}\times 2+$높이'가 될 것 같아요.

이상에서 살펴본 바와 같이 학생들은 추측의 정교화를 돕는 도구로 GSP를 활용하였다. Gipson이 제시한 어포던스(affordance)의 개념에서 그 의의를 살펴볼 수 있다. 어포던스는 '좋은 것이든 나쁜 것이든 간에 환경이 동물에게 공급해 주는 것'이다(방정숙, 2002 재인용). 이 개념에 입각해서 볼 때, GSP는 이전에 가능하지 않았던 기하 추측의 확인을 가능하게 함으로써, 추측을 신속하게 기각하고 개선할 수 있도록 돕는다. 다시 말해, GSP는 기하학을 실험이 가능한 과학으로 변화하게 한다.

또 한 가지 주목해야 할 것은 내부, 경계, 외부에서의 추측 패턴의 동일성이다. 이전의 추측은 다음 추측에서 쉽게 발현되는 특징을 지녔다. 이런 점을 고려할 때, 변화하는 것과 동일한 값을 가지는 대상이 존재하지 않는다는 인식은 변화하는 값에 대한 추측의 경험 부재로 해석해 볼 수 있다. 따라서 학생들에게 참인 명제의 증명만을 요구할 것이 아니라, 추측을 시도하게 하는 교육이 제공될 필요가 있다. 왜냐하면 기존에 시도한 추측의 경험은 보다 다양한 추측으로 나아갈 수 있는 기반이 되기 때문이다.

2. GSP 확인이 증명이라는 오개념과 극복

GSP는 추측의 조정이라는 이점도 있지만 문제점도 지니고 있었다. 연구자는 '외부에서 그은 세 수선의 길이의 합'에 대한 추측의 증명을 요구하였는데, 학생들은 GSP에 의한 확인이 곧 증명이라는 인식을 보였다. 그들은 증명의 필요성을 받아들이는데 거부감을 보였다.

연구자는 GSP 확인과 증명 사이의 차이점을 인식시킬 목적으로 GSP 확인은 $\overline{DE}$가 1, 2, 3, 4인 특수 경우에 대한 것이지 일반적이지 못하다는 한계를 지적하였다. 그러나 학생들은 $\overline{DE}$가 5인 경우 역시 같은 결과가 나타날 것이므로 증명이 필요하지 않다고 보았다. GSP 확인 기능을 다른 경우까지 적용하면 일반성의 한계가 극복 가능하다고 믿는 것이다.

일반성에 대한 지적이 증명의 필요성을 인식시키는데 도움이 되지 못한 것은 GSP를 연속적인 변화가 가능한 프로그램으로 보는데 기인한다. 사실 GSP는 디지털 프로그램이므로 연속적 변화를 구현하지 못한다. 변의 길이가 1에서 2로 변할 때 그 사이의 모든 값을 취하는 것은 불가능하다. 단지 1.01, 1.02, 1.03 … 등의 작은 값을 취하면서 변하므로 연속적으로 보일 뿐이다. 학생들은 GSP의 드래깅으로 인한 작은 값에서의 이산적 변화를 연속적 변화로 인식하며, 결국 일반성이 극복 가능하다고 본 것이다.

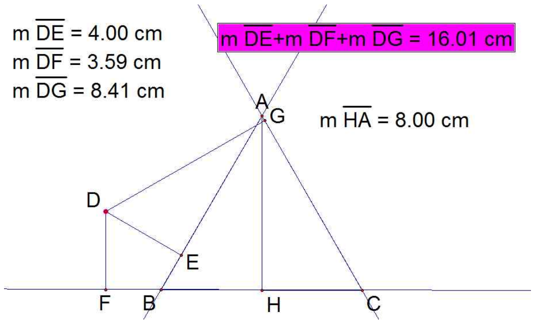
이런 경우 GSP가 가진 도구의 제약은 증명의 필요성을 인식하는데 도움이 되었다. 다양한 경우에 대한 GSP 확인 과정에서 드러난 GSP의 결함은 도구의 한계를 인정하게 하였다.

학생I: 선생님. 이번에는 $\overline{DE}$를 4로 해 보면 안 돼요?
연구자: 그래 한 번 해 볼까? 누가 나와서 조정해 보겠니?
학생D: 재미있을 것 같은데 제가 한 번 해 볼 게요. (이들이 움직여 보다가 $\overline{DE}$가 3으로 맞추었지만 세 수선의 길이의 합이 16.01이 나타남)
학생A: 와! 저 기계 바보네. 계산을 못하네.

(중략)

연구자: (학생들이 증명의 필요성을 받아들이지 못하자) 그렇지만 앞에서 $\overline{DE}$가 4인 경우에는 계산이 안 맞았잖아. 그건 이 프로그램이 문제가 있다는 말이잖아! 그러니 기계가 내 놓은 결과에 대해 맞는지 틀리는지 아직 모르는 상태지 않니? 그러니 증명이 필요하지 않을까?

학생D: (생각해 보더니) 와! 그걸 또 그렇게 연결시키네요.



[그림 Ⅳ-5] GSP가 가진 도구적 결함

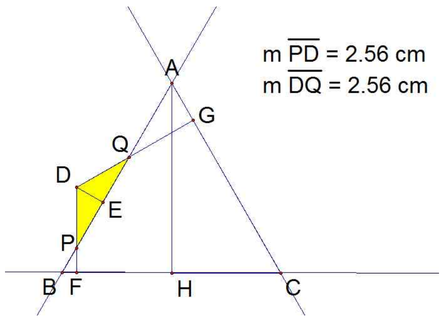
Guin & Trouche(1999)는 도구에 대한 이해 과정에서 도구가 갖는 제약을 내부적 제약(internal constraints), 명령어상의 제약(command constraints), 구조적 제약(organization constraints)의 세 종류로 구분한다. 도구가 ‘본질적으로 무엇을 할 수 있는가?’는 내부적 제약, ‘사용 가능한 명령어로 무엇이 있는가?’는 명령어상의 제약, ‘사용 가능한 명령어는 어떻게 배치되어 있는가?’는 구조적 제약과 관련된다. [그림 Ⅳ-5]의 결함은 ‘내부적 제약’에 해당한다.

GSP가 가진 내부적 제약은 도구를 의심하게 하며, 증명의 필요성을 인정하는 계기가 되었다. 도구는 결함이 발견되지 않을 경우에 신뢰할 수 있는 수단이 된다. 만약 계산기의 계산 결과가 때때로 오류를 나타낸다면, 그 계산기는 믿을 수 없게 된다. GSP 역시 결함이 드러난다면 의심스러운 대상으로 변모할 수 있다. 따라서 GSP가 가진 내부적 제약은 도구에 대한 신뢰를 깨뜨려 증명을 허용하는 기회가 된 것이다.

3. 주제 이탈과 인지적 격차

영재학급 학생들은 탐구과정에서 제시된 과제와 무관한 새로운 사실을 발견하는 주제 이탈의 모습을 보였다. 그들이 발견한 것은 [그림 Ⅳ-6]의 외부의 한 점 D에서 그은 두 수선이 $\overleftrightarrow{AB}$[5]와 만나는 교점을 각각 Q, P라고 할 때, $\triangle DPQ$가 이등변삼각형이라는 사실이다. 학생들은 GSP에서 $\overline{DP}$, $\overline{DQ}$의 길이를 측정하여 자신들의 추측을 확인해 보았다. 이 추측은 주어진 과제와 직접적 관련성이 적은 주제였다. 그렇지만 연구자는 이러한 추측 역시 새로운 탐구의 대상이 될 수 있다고 판단하여, 추측에 대한 증명을 요구하였다.

5) 최초의 추측에서는 ‘선분 AB’였으나, D의 위치에 따라 교점이 사라지는 경우가 발생하자 ‘직선 AB’로 추측을 개선하였다.



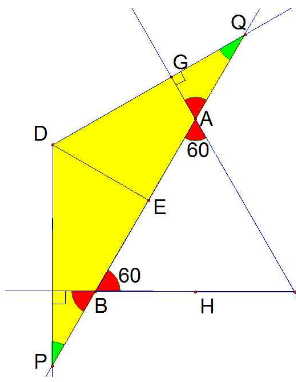
[그림 Ⅳ-6] 두 학생의 새로운 추측 제기와 확인

증명은 점 P, Q가 선분 AB위에 있는 경우부터 선분 AB의 연장선 위에 있는 경우로 확대되어 가면서 완성되었다.

학생G: (점 P, Q가 선분 AB위에 있는 경우에 대해) 저는 안에 있는 것으로 증명을 했어요. 여기 $\angle A$랑 $\angle B$랑 60° 잖아요. 이게(삼각형 ABC) 정삼각형이니까요. 그리고 여기 $\angle BFP = 90^\circ$ 이고 $\angle AGQ = 90^\circ$ 이잖아요. 그러니까 $\triangle AGQ$랑 $\triangle BFP$가 닮음이 되잖아요. AA 닮음. 그러니까 나머지 한 각 $\angle BPF$랑 $\angle AQG$도 같게 되요. 그리고 여기 보면 $\angle DPE$랑 $\angle DQE$는 맞꼭지각이니까 같게 되요. 그러니까 이등변삼각형이 되요. 각이 두 개가 같으면 이등변삼각형이 되잖아요.

연구자: 점 D가 움직여 교점이 밖으로 간 것은 어떻게 되지?

학생H: 그것도 똑 같이 하면 되잖아요.



[그림 Ⅳ-7] 점 P, Q가 선분 AB의 연장선 위에 있는 경우에 대한 학생H의 증명[6]

이후 질의응답 시간을 가졌는데 증명을 발견한 학생H와 몇몇 학생 간의 인지적 격차를 확인할 수 있었다. 증명을 발견한 학생H는 자신의 설명을 당연시하였으므로 매우 빠른 속도로 설명을 진행하였고, 듣고 있던 몇몇 학생들은 학생H의 설명을 이해하지 못하였다. 이는 증명을 발견한 사람과 주어진 증명을 이해하는데 급급한 사

6) 정삼각형이므로 빨간색 각이 60°로 같고, 또 한 각은 90°이므로 나머지 연두색 각은 30°로 같음. 따라서 삼각형 DPQ는 이등변삼각형이 된다는 논리를 그림으로 나타낸 것임.

람 사이에 존재하는 인지적 격차를 보여준다.

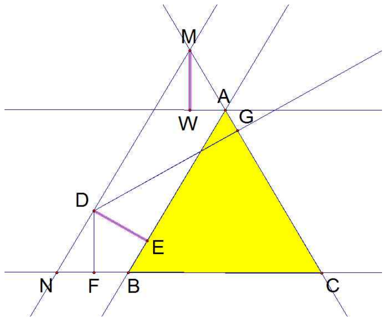
[그림 Ⅳ-8] 질의에 대한 학생H의 설명과 학생들의 토의

연구자: 자! 질문할 사람?
학생H: 이게 질문 할 게 뭐있어요.
(이때 학생K가 옆의 짝인 학생J에게 '이게 왜 수선이야?'라고 물어봄)
연구자: 자! 봐라. 너는 너무 쉽다고 말하지만 듣는 학생K는 이해가 안 된다고 하잖아. 이게 바로 설명하는 너와 듣고 이해해야 하는 사람 사이에 나타날 수 있는 차이야. 좀 더 친절하게 설명해 줄 수는 없을까? 도대체 왜 수선이지? 좀 더 천천히 설명해 줄 수는 없을까?
학생H: (천천히 말하며) 그러니까 이 점(점 D)에 대해 수선 3개를 내리니까 이 선(선분 BC의 연장선)에 대해 내린 거니까 수선이지.

청자는 문제 해결자의 설명을 이해하지 못한 부끄러움을 지니고 있었으며, 문제 해결자는 청자의 인식을 자신과 동일시하는 경향을 지니고 있었다. 위 대화에서 학생K는 옆의 짝에게 궁금한 점을 물어보았다. 이는 청자가 갖는 부끄러움에서 비롯된 것이다. 제시된 문제를 해결하지 못했을 뿐만 아니라 문제 해결자의 설명도 이해하지 못한 부끄러움이 직접적인 질문을 삼가게 한 것이다. 반면, 문제 해결자인 학생H는 빠른 속도로 설명을 이어갔을 뿐만 아니라, 자신의 설명에 대해 질문할 것이 없다고 말하였다. 이는 다른 학생들 역시 자신처럼 생각할 것이라고 믿었기 때문이었다. 다시 말해, 문제 해결자는 미해결자의 인식을 자신과 동일시하는 경향을 지니고 있는 것이다. 이처럼 문제 해결자와 청자 사이의 인지적 격차가 존재하는 만큼, 그것을 완화할 수 있는 조치가 필요하다.

4. 미완의 추측에 의한 증명 완성

비록 완성된 형태는 아니지만 학생F의 추측은 증명을 완성하는 결정적 단서를 제공하였다. 이는 미완의 추측은 다음 단계로 나아가기 위한 사고 발판을 마련해준다는 점에서 증명 완성의 토대가 될 수 있음을 시사한다. 실제로 새로운 추측은 증명 완성의 토대로서 작용해 왔음을 수학의 역사는 보여준다. 이를테면, 페르마의 마지막 정리에 대한 증명에서 '유리수 체 위의 모든 타원 곡선은 모듈러 곡선이다'라고 주장한 '시무라-타니야마의 추측'은 증명 해결의 새로운 열쇠가 되었다(허민, 1999). 학생F가 제안한 추측은 [그림 Ⅳ-9]와 같다.



점A를 지나면서 선분 BC에 평행한 선을 긋고, 점 M에서 그 선 위에 수선을 내려 수선의 발을 W라고 하면, $\overline{MW}=\overline{DE}$이다.

[그림 Ⅳ-9] 학생F의 추측

학생F: 그래서 $\overline{MW}$가 $\overline{DE}$랑 같게 되면, $\overline{DG}+\overline{DF}=$(정삼각형ABC의 높이)$+\overline{MW}$니까.....아! 잠깐만요.

학생H는 칠판에 나와서 설명하는 과정에서 점 M에서 선분 NC에 내린 수선이 점 E를 통과해야 한다고 생각했는데, GSP 화면을 보면서 자신의 증명이 잘못된 것임을 이해하였다. 여기서 주목할 한 점은 기하 증명에 사용된 보조선을 DGE에서 정확히 구현할 수 있으므로 추론의 잘못된 점을 쉽게 인지할 수 있다는 것이다. 지필환경에서 M에서 선분 NC에 내린 수선은 점 E를 통과한다고 믿었는데, DGE에서 정확한 구현은 자신들의 추론을 쉽게 기각하게 만든 것이다. 이는 기하 증명에서 GSP가 갖는 역할을 보여준다. 다시 말해, GSP는 추론 자체의 주요 아이디어 생성을 돕는 것은 아니지만, 추론에 사용된 보조선의 특성을 쉽게 확인할 수 있게 함으로써 추론이 갖는 오류를 파악하게 하는 기능을 지니고 있다.

학생들은 학생F가 제안한 추측을 GSP에서 측정의 기능을 활용하여 확인해 볼 것을 요구하였으며, 확인 후 놀라움을 표시하였다. 이후 학생들은 자연스럽게 증명에 몰입하기 시작했으며, 마침내 학생L이 이미 제안된 두 가지 사실을 연결하여 증명을 완성 짓기 시작하였다.

학생L: 제가 한 번 해 볼게요. $\overline{MW}$랑 $\overline{DE}$랑 같잖아요. $\overline{DG}+\overline{DF}=$(정삼각형ABC의 높이)$+\overline{MW}$잖아요. (그리고는 뒷말을 얼버무림)

학생D: 마무리를 지어봐!

학생L: (생각하다가) 자! 보세요. 증명하는 것은 $\overline{DG}+\overline{DF}+\overline{DE}=$(정삼각형ABC의 높이)$+2\overline{MW}$인데, 이거는 $\overline{DG}+\overline{DF}=$(정삼각형ABC의 높이)$+\overline{MW}$이랑 같잖아요. 그러니까 $\overline{DG}+\overline{DF}=$(정삼각형ABC의 높이)$+\overline{MW}$을 증명하면 증명이 되는 거잖아요. 그런데 앞에서 경계에서 그은 수선 두 개의 길이도 높이랑 같다고 했으니까 삼각형 MNC의 높이는 (정삼각형ABC의 높이)$+\overline{MW}$니까 증명 되었잖아요.

이후 연구자는 다시 학생F의 추측을 증명할 것을 요구하였으며, 학생L은 정삼각형의 높이가 같다는 사실을 이용하여 이를 증명하였다. 즉, 정삼각형 MNC의 높이는 어떤 꼭짓점에서 그어도 길이는 동일하며, 동시에 정삼

각형 ABC의 높이 역시 어떤 꼭짓점에서 그어도 길이는 동일하니 그 두 높이의 차이인 $\overline{MW}$와 $\overline{DE}$ 역시 같다는 논지를 펼쳤다.

학생F의 추측은 반성적 의사소통을 유발하였으며, 증명에 대한 활발한 탐구를 고취시켰다. 학생F가 제기한 추측은 학생L에 의해 정당화되었는데, 이들의 의사소통은 더 깊은 탐구를 유도했다는 점에서 반성적 의사소통[7]에 해당한다. 반성적 의사소통은 증명에 대한 활발한 탐구를 고취시켰는데, 그 이유는 학생F의 추측이 증명의 어려움을 완화하는 역할을 수행했기 때문이다. 무지 상태에서 증명을 완성하는 과정 사이에 존재하는 격차는 새로운 추측의 개입으로 2단계로 분할하여 접근하는 것이 가능하게 되었다. 기존의 어려움은 그것보다 작은 두 가지 어려움으로 분할된 것이다.

이는 아이디어가 미숙할지라도 그것이 발표되고 나면 기존의 어려움을 완화할 수 있음을 보여준다. 따라서 도전적 과제일수록 현재의 생각을 가감 없이 솔직하게 발표하는 용기를 북돋아 주는 노력이 요구된다. 다시 말해, 학생의 사고를 독려하고 그것을 과감하게 발표하도록 돕는 지도적 의사소통이 필요하다.

[그림 Ⅳ-10] 원 상태의 격차와 새로운 추측이 가세된 상태의 격차

5. 일반화와 일반성 이해 사이의 괴리

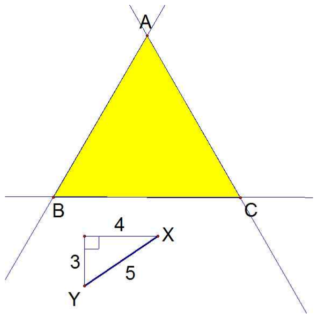
일반화 경험에도 불구하고 일반화된 결과에 내재한 일반성 인식에 실패한 경우를 확인할 수 있었다. 대표적인 사례로 아래 대화를 들 수 있다. 일반성을 묻는 질문에 대한 학생K의 반응은 일반성 인식이 결여되어 있음을 보여준다. 사실 내부의 점에서 그은 세 수선의 길이의 합이 동일한 것은 이들이 어떤 위치에 있어도 고정된 값인 높이와 같기 때문이다. 학생K는 적합한 이유 제시에 실패하였으며. 이는 일반화의 경험과 별도로 일반성 이해를 다룰 필요가 있음을 시사한다.

연구자: 내부에 있을 때, 왜 내부의 점이 돌아다녀도 세 수선의 길이 합은 변하지 않는 것일까?
학생K: 길이가 같으니까

영재학급 학생들은 외부에서의 결과에 대해서도 일반성 인식이 결여된 모습을 보여주었다. 다음의 물음에 대

7) Brendefur & Frykholm(2000)은 교실 의사소통 유형을 일방향 의사소통, 기여적 의사소통, 반성적 의사소통, 지도적 의사소통 네 가지로 구분하였다. 일방향 의사소통은 화자인 교사가 청자인 학생에게 강의식으로 토론을 주도하는 상황이며, 학생들이 전략이나 아이디어를 의사소통할 기회가 거의 허용되지 않는 경우를 말한다. 기여적 의사소통은 학생 간, 교사와 학생간 상호작용에서 도움이나 공유에 국한되어 있어 심도 있는 사고를 전제로 하지 않는 특징이 있다. 반성적 의사소통은 더 깊은 탐구를 위한 발판 역할을 하는 수학적 대화를 말한다. 지도적 의사소통은 학생의 수학을 발생, 유지, 독려, 수정하기 위해 교사가 제기하는 상황을 강조하는 유형이다(장혜원, 2015 재인용).

한 학생 반응은 일반성 이해는 일반화의 경험과 대별되는 또 다른 인지적 과제임을 보여준다.



[그림 Ⅳ-11] 일반성 인식 확인을 위해 제안된 과제

연구자: 여기서 점 X에서 점 Y로 이렇게 이동하게 되면 Y에서의 세 수선의 길이의 합은 X에서의 세 수선의 길이의 합에 비해 얼마가 더 커지게 될까?
학생B: 7요.
연구자: 왜?
학생B: 4+3요.
학생C: 14요.
연구자: 왜?
학생C: 4+3을 해서 두 배했어요. 그러니까 7만큼 늘어났으니까 두 배하니까 14 아니에요?
학생F: 12 아닌가요?
연구자: 왜?
학생F: 5 더하기 4 더하기 3하면 12잖아요.
연구자: 왜 그렇게 되지?
학생F: 그러니까 증가한 만큼 증가할 것이니까 그럴 것 아니에요.

영재학급 학생들은 자신들이 발견한 일반화의 결과를 활용하는데 실패하였다. X에서의 세 수선의 길이의 합은 '(△ABC의 높이)+2×(점X에서 선분BC 사이의 거리)'이며, Y에서의 세 수선의 길이의 합은 '(△ABC의 높이)+2×(점X에서 선분BC 사이의 거리+3)'이므로 6만큼 늘어난다. 그러나 학생들은 7, 14, 12와 같은 오답을 제시했다. 더군다나 그들이 제시한 이유는 4+3, 2(4+3), 5+4+3와 같이 자신들이 발견한 일반화의 결과를 전혀 적용하지 못한 것이었다. 이는 일반성 인식은 일반화와는 또 다른 인지적 과제라는 점을 분명히 보여준다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 중학교 2학년 수학 영재학급 학생 13명을 대상으로 GSP를 활용한 일반화 수업을 설계하고 실행해 봄으로써, GSP를 활용한 일반화 수업의 실제를 파악하였으며 이로부터 GSP를 활용한 일반화 수업에 대한 몇 가지 교육적 시사점을 얻고자 하였다. 본 연구의 결과로부터 중학교 수학 영재학급에서 GSP를 활용한 일반화 수업 진행을 위한 결론과 시사점은 두 가지로 구분할 수 있다. 하나는 기존 연구의 결과와 부합하는 보편적 결론이며, 다른 하나는 본 연구의 독창적 결론이다.

보편적 결론으로, GSP는 실험과 조작이 가능한 기하 학습 환경이라는 잠재성을 보유하고 있지만, 동시에 GSP에서의 확인이 곧 증명이 될 수 있다는 오개념으로 연결되는 위험성을 지니고 있었다. 이는 증명 학습에서 역동적 기하 소프트웨어의 사용이 오히려 연역적 증명의 역할이나 필요성을 약화시키는 결과를 초래할 수 있다는 Chazan(1993)과 Hadas, Hershkowitz & Schwarz(2000)와 신유경 외(2008)의 연구와 일맥상통하다. 특히 Hadas, Hershkowitz & Schwarz(2000)에 의하면, 많은 기하 문제에서 학생들은 추측의 타당성이 DGE에서의 활동에 의해 보장되는 반면, 연역적 설명은 이에 대한 확신을 강화하지 못한다고 느낀다. 다만 본 연구에서는 DGE 활용의 위험성이 비단 일반학생에게 그치지 않고 영재학급 학생에게까지 폭넓게 나타날 수 있음을 확인한 것이 특징적이다.

다음 독창적 결론에 해당하는 것으로 첫째, 연역적 증명의 필요성을 약화시키는 GSP의 단점을 극복하기 위한 대안의 하나로 도구의 제약을 영재학급 수업에서 활용할 것을 제안한다. GSP는 소수 둘째 자리까지의 측정과 계산을 수행하는 프로그램이므로 제기된 추측에 대한 확인 과정에서 0.01의 오차가 발생 가능한 제약을 지닌다. 따라서 이러한 제약을 통해 GSP에서의 정당화와 연역적 증명 사이의 차이점을 부각시킬 필요가 있으며, 이는 곧 GSP에서의 정당화가 갖는 한계와 연역적 증명의 필요성 인식에 도움이 될 수 있을 것이다.

둘째, 영재학급 수업에서 주제를 이탈한 새로운 사실의 발견이 이루어졌을 때, 이것 역시 탐구의 대상에 포함시키는 노력이 필요하다. 수업 대상이 영재학급 학생인 점을 감안할 때, 수업자가 설계해놓은 대로만 수업이 진행되는 것은 아니므로 주제를 이탈한 경우에 대한 적절한 대비가 요구된다. 김유경·방정숙(2012)에 의하면 연결성을 강조한 수업에서 교사가 예상치 못한 답변이 나타난 경우 교사는 학생들과 함께 연결성을 탐구해 나가는 것을 포기하고 일방적인 설명으로 대신하였으며, 이는 수학적 연결 수업을 구현에 있어 빚어지는 하나의 난관이라고 지적하기도 하였다. 본 연구의 일반화 수업에서도 예상치 못한 발견이 이루어졌으며, 연구자는 이러한 탐구를 격려하였다. 특히 연구자가 생각지 못한 것임을 솔직하게 밝힘으로써, 영재학급 학생들의 탐구 행위를 강화하고자 하였다. 이는 탐구를 지향하는 본 수업의 애초 취지와 일치하는 것이라는 판단 하에 이루어진 것이다.

셋째, 미완의 추측이 아이디어 발전의 촉매재로 작용할 수 있음을 숙지하고 이를 영재학급 학생들에게 전달하려는 노력이 필요하다. 전술하였듯, '시무라-타니야마의 추측'은 페르마의 마지막 정리를 완성하는 토대가 되었다. 이러한 일은 비단 수학 역사 속에서만 이루어지는 것이 아니라, 영재학급 수업 중에도 발생 가능하다. 영재학급 수업에서 이와 같은 현상을 유도하기 위해서는 결과보다 추측이 개선되어 가는 과정에 주목하는 것이 필요하다. 또한 이 현상으로부터 영재학급 학생들에게 교훈을 주기 위해서는 미완의 추측에서부터 증명이 완성되어 가는 과정 전체를 되짚어주는 노력이 요구된다.

넷째, 소수의 영재학급 학생 사이에도 격차가 존재하는 만큼, 이를 완화할 수 있는 노력이 요구된다. 발견자는 자신의 아이디어를 당연하다고 여긴다. 따라서 발견자가 자신의 아이디어를 발표할 때, 청자의 입장을 고려하지 않고 발표에 임하는 현상이 발생한다. 이러한 현상은 영재학급 속에서 소외받는 학생을 낳을 우려를 낳으며, 이를 예방하기 위한 노력이 요구된다. 구체적으로 발견자와 청자 간 입장 차이에 대한 설명이 좋은 방법이 될 수 있을 것으로 본다. 이는 발견자에게 상세한 설명을 유도하고, 청자에게 궁금한 점을 묻게 하는 용기를 제공할 것이다.

다섯째, 영재학급 학생에게 조차 일반화와 일반성 이해 사이의 괴리가 확인된 만큼, 일반화 수업의 말미에 일반성 이해의 기회를 제공할 필요가 있다. 일반화를 성공적으로 수행했다고 해서, 그것이 곧 일반성 이해로 연결될 것이라고 기대하는 것은 영재학급 학생에게도 무리였다. 따라서 영재학급 학생일지라도 일반성에 대한 이해를 돕는 과제가 제공될 필요가 있다. 예컨대, 본 연구에서 제안한 [그림 Ⅳ-11]이 적합한 과제 중의 하나라고 생각된다.

참 고 문 헌

강정기 (2013). 본질적 속성 추출을 통한 일반화에 관한 연구. 경상대학교 박사학위논문.

Kang, J.G. (2013). *A study on the generalization through the extraction of essential attributes*. Doctoral dissertation, GSNU.

김성수・박달원 (2013). 유추를 활용한 코사인 법칙의 일반화 지도 방안. 한국학교수학회논문집. 16(4), 927-941.

Kim, S.S. & Park, D.W. (2013). A study on teaching methods of extension of cosine rule using analogy. *Journal of the Korea School Mathematics Society,* 16(4), 927-941.

김유경·방정숙 (2012). 초등학교 수학 수업에 나타난 수학적 연결의 대상과 방법 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 51(4), 455-469.

Kim, Y.K. & Bang, J.S. (2012). An analysis of th objects and methods of mathematical connections in elementary mathematics instruction, *The Mathematical Education,* 51(4), 455-469.

김진호 (2012). 학습자 중심 수학 수업을 위한 수업자료의 몇 가지 특징. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 15(3), 189-199.

Kim, J.H. (2012) On some characteristics of instructional materials for learner-mathematics instruction. *Education of Primary School Mathematics,* 15(3), 189-199.

문혜령・고상숙 (2010). GSP를 활용한 삼각함수에서 학습부진아의 수학화 과정에 관한 사례연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 49(3), 353-373.

Moon, H.R., & Choi-Koh, S.S. (2010). A case study on slow learners' mathematization of trigonometric functions, using GSP. *The Mathematical Education,* 49(3), 353-373.

방정숙 (2002). 수학 학습에서 도구의 역할에 관한 관점: 수학적 어포던스와 상황적 어포던스의 조정. 수학교육학연구, 12(3), 331-351.

Pang, J.S. (2002). The role of tools in mathematical learning: Coordinating mathematical and ecological affordances. *The Journal of Education Research in Mathematics,* 12(3), 331-351.

손홍찬 (2011). GSP를 활용한 역동적 기하 환경에서 기하적 성질의 추측. 학교수학, 13(1), 107-125.

Son, H.C. (2011). A study on students' conjecturing of geometric properties in dynamic geometry environment using GSP. *School Mathematics, 13*(1), 107-125.

송상헌・정영옥・장혜원 (2006). 초등학교 6학년 수학영재들의 기하 과제 증명 능력에 관한 사례 분석. 학교수학, 16(4), 327-344.

Song, S.H., Jeong, Y.O., & Chang, H.W. (2006). Mathematically gifted 6th grade students' proof ability for a geometrric problem. *School Mathematics, 16*(4), 327-344.

신승윤・류성림 (2014). 초등수학영재의 수학 창의적 문제해결력과 메타인지와의 관계. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 17(2), 95-111.

Shin, S.Y., & Rye, S.R. (2014). The relationship between mathematically gifted elementary students' math creative problem solving ability and metacognition. *Education of Primary School Mathematics,* 17(2), 95-111.

신유경・강윤수・정인철 (2008). GSP가 증명학습에 미치는 영향: 사례연구. 한국학교수학회논문집, 11(1), 55-68.

Shin, Y.G., Kang, Y.S., & Jeong, I.C. (2008). An influence of GSP to learning process of proof of middle school students: case study. *Journal of the Korea School Mathematics Society,* 11(1), 55-68.

영재교육종합데이터베이스 (2015). https://ged.kedi.re.kr/stss/viewStatistic.do.

Gifted Education Database (2015). https://ged.kedi.re.kr/stss/viewStatistic.do.

유미경・류성림 (2013). 초등수학영재와 일반학생의 패턴의 유형에 따른 일반화 방법 비교. 학교수학, 15(2), 459-479.

Yu, M.G., & Rye, S.R. (2013). A comparison between methods of generalization according to the types of pattern of mathematically gifted students and non-gifted students in elementary school. *School Mathematics,* 15(2), 459-479.

이헌수・이광호 (2012). 중등 영재학생들의 GSP를 활용한 내분삼각형 넓이의 일반화. 한국학교수학회논문집, 15(3), 565-584.

Lee, H.S., & Lee, G.H. (2012). The generalization of the area of internal triangles for the GSP use of mathematically gifted students. *Journal of the Korea School Mathematics Society,* 15(3), 565-584.

장정은・정윤숙・최양희・김성원 (2013). 과학 영재들의 과제집착력 특성 탐색. 한국과학교육학회지, 33(1), 1-16.

Chang, J.E., Jeong, Y.S., Choi, Y.H., & Kim, S.W. (2013). Exploring the charateristics of science gifted students' task commitment. *Journal of The Korean Association For Science Education,* 33(1), 1-16.

장한나라 (2013). 우리나라 수학영재교육의 현황과 효율적 운영방안 : 미국, 중국, 싱가포르와 비교하여. 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.

Chang, H.N.R. (2013). *Present Condition of Our Country's Mathematics Talent Education and an Efficient Management Plan: Compared with the US, China, Singapore.* Master's thesis, GHU.

장혜원 (2015). 2학년 쌓기나무 수업에서의 수학적 의사소통 분석. 학교수학, 17(2), 223-239.

Chang, H.W. (2015). Analysis of mathematical communication in building-block lessons for 2nd graders. *School Mathematics,* 17(2), 223-239.

정찬식・노은환 (2014). 학생중심의 문제해결 모형 개발 및 효과 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 17(1), 57-75.

Jeong, C.S., & Roh, E.H. (2014). Development and analysis of effect for problem solving model of student-based. *Education of Primary School Mathematics,* 17(1), 57-75.

최병훈・방정숙 (2012). 초등 4,5,6학년 영재학급 학생의 패턴 일반화를 위한 해결 전략 비교. 수학교육학연구, 22(4), 619-636.

Choi, B.H., & Bang, J.S., (2012). A comparison of mathematically gifted students' solution strategies of generalizing geometric patterns. *The Journal of Education Research in Mathematics,* 22(4), 619-636.

최종현・송상헌 (2005). 주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료 개발에 관한 연구. 학교수학, 7(2), 169-192.

Choi, J.H., & Song, S.H. (2005). A study on the development of project based teaching·learning materials for the mathematically gifted. *School Mathematics,* 7(2), 169-192.

허민 (1999). 페르마의 마지막 정리. 한국수학사학회지, 12(2), 1-13.

Her, M. (1999). Fermat's last theorem, *Historia Mathematica,* 12(2), 1-13.

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2005). Designing spreadsheet-based tasks for purposeful algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 10(3), 191-215.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In Chick, H. L., & Vincent, J. L.(Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Vol.4, pp121-128). Melbourne: PME.

Bills, L., Ainley, J., & Wilson, K. (2006). Modes of algebraic communication-moving between natural language, spreadsheet formulae and standard notation. *For the Learning of Mathematics,* 26(1), 41-46.

Bills, L., & Rowland, T. (1999). Examples, generalization and proof. In L. Brown(Ed.), *Making meaning in mathematics. Advanced in mathematics education*(Vol.1. pp.103-116). York, UK: QED.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics* 24, 359-387.

Cho, H., Han, H., Jin, M., Kim, H., & Song, M. (2004). Designing a microworld: Activities and programs for gifted students and enhancing mathematical creativity. *Proceeding of the 10th conference of the International Congress on Mathematics Education, TSG 4: Activities and Programs for Gifted Students*, pp.110-118. Copenhagen, Demark.

Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction*. In Kilpatrick, J.(Ed.) Soviet Studies in Mathematics Education. Vol2. Reston VA: NCTM.

El-Demerdash, M. & Kortenkamp, U. (2009) The effectiveness of an enrichment program using dynamic geometry software in developing mathematically gifted students' geometric creativity. *Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, Metz, France: ICTMT 9.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 3(3), 195-227.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 127-150.

Harel, G., & Tall, D. (1989). The general, the abstract and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 11(1), 38-42.

Jerwan, F. (2002). *Thinking education: Concepts and applications*. Oman, Jordan: Dar Alfikr.

Jonassen, D. (2000). C*omputers in the classroom: Mindtools for critical thinking* (2nd ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Merrill.

Lee, K. H. (2005). Mathematically gifted students' geometrical reasoning and informal proof. In Helen, L. C. & Jill, L. V.(Eds.), *Proceeding 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Vol3, pp.241-248).

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bendnarz, C. Kieran, & L. Lee(Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*(pp. 87-106). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Liu, M., & Bera, S. (2005). An analysis of cognitive tool use patterns in a hypermedia learning environment. *Educational Technology Research and Development,* 53(1), 5-21.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In Bendnarz, N., Kieran, C., & Lee, L.(Eds.), *Approaches to algebra(pp65-86).* Dordrecht: Kluwer.

Mohamed, A. I. Z. (2003). *Enrichment program in geometry for creative thinking development for talented students, in mathematics in the preparatory stage*. Master thesis, Tanta University, Egypt.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton(Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics*(pp.104-120). London, UK: Cassell.

Pyryt, M. (2003). Technology and the gifted. In Colangelo, N., & Davis, G.(Eds.), *Handbook of gifted education* (pp.582-589). Boson: Allyn & Bacon.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the spouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning,* 5(1), 37-70.

Renzulli, J. S. (2000). The identification and development of giftedness as a paradigm for school reform.

Sheffield, L. J. (1999). *Developing mathematically promising students*. Reston VA: NCTM.

Sheffield, C. C. (2007). Technology and the gifted adolescent: Higher order thinking, 21st century literacy, and the digital native. *Meridian Middle School Computer Technologies Journal, 10*, 5. Retrieved from http://www.ncsu.edu/meridian/sum2007 /gifted/index.htm

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics,* 20, 147-164.

Stacey, K., & McGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins(Eds.), *Perspectives on school algebra*(pp. 141-154). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Van Tassel-Baska, J. (1986). Effective curriculum and instructional models for talented students. *Gifted Child Quarterly,* 30(4), 164-169

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (2007). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education,* 40, 131-141.

An Analysis of Generalization Class using GSP for the 8th Grade Students in a Math Gifted Class
- Focused on Viviani theorem -

Kang, Jeong Gi
Gimhae Daegok Middle School, Gimhae 621-918, Korea
E-mail: jeonggikang@gmail.com

This study is aimed to implement a preferred generalization classes for gifted students. By designing and applying the generalization lesson using GSP, we tried to investigate the characteristics on the class. To do this, we designed a lesson on generalization of Viviani theorem and applied to 13 8th grade students in a math gifted class. As results, we could extract five subjects as followings; mediating the conjecture by GSP and checking the pattern, misunderstanding the confirm by GSP as a proof and its overcoming, digressing from the topic and cognitive gap, completing the proof by incomplete conjecture, gap between the generalization and understanding generality. Based on this subjects, we discussed the educational implications in order to help implement a preferred generalization classes for gifted students.

* ZDM Classification : U53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U50
* Key Words : generalization, gifted students, GSP, Viviani theorem