Journal of the Korean Data & Information Science Society
2016, **27**(1), 121–130

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2016.27.1.121
한국데이터정보과학회지

공간의존 파론도 게임의 재분배 모형[†]

이지연[1]

[1]영남대학교 통계학과

접수 2015년 12월 28일, 수정 2016년 1월 11일, 게재확정 2016년 1월 13일

요 약

N명의 게임자들이 둥글게 둘러앉아 공간의존 파론도 게임 B를 실시한다. 게임 B는 여러 명의 게임자들 중에서 한 명을 임의로 선택하고, 선택된 게임자는 양 옆에 있는 두 명의 게임자들의 상태에 따라 앞면이 나올 확률이 달라지는 동전을 던져서 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 게임 A'은 임의로 선택된 게임자가 나머지 $N-1$명의 게임자들 중에서 한 명을 임의로 선택하여 본인의 상금 1원을 전달하는 게임으로 전체 게임자들의 총 상금에는 변함이 없으므로 전체 게임자들에게는 항상 공정한 게임이다. 만약 게임 B가 지는 게임인 반면에 두 게임 A'와 B를 결합한 혼합게임 C는 이기는 게임이 되면 파론도 효과가 존재하고, 게임 B가 이기는 게임이고 혼합게임 C는 지는 게임이면 역파론도 효과가 존재한다고 한다. 먼저 마코프 체인의 상태공간의 축소를 위한 lumpability 조건이 게임 A', B 그리고 혼합게임 C에 대해 만족함을 보이고, 축소된 상태공간에서 게임 B와 C의 기대상금을 계산한다. 이를 이용하여 파론도 효과와 역파론도 효과의 존재를 확인하고, 특별히 $3 \leq N \leq 6$의 경우에는 파론도 효과와 역파론도 효과가 존재하는 확률 모수의 영역을 도식화 한다.

주요용어: 공간의존 파론도 게임, 기대상금, 마코프 체인, 재분배 모형, 정상확률, 파론도 역설.

1. 서론

파론도 (Parrondo, 1996)가 소개한 간단한 동전 던지기 게임에서 시작한 파론도 역설은 처음에는 지는 두 게임이 결합하여 이기는 게임이 되거나 이기는 두 게임이 결합하여 지게 되는 역설적인 현상을 나타내었으나 이제는 넓은 의미로 두 시스템이 결합하여 원래의 특성과 다른 특성을 갖는 새로운 시스템이 되는 현상을 말한다 (Harmer과 Abbott, 2002). 현재까지 약 20년간 파론도 역설에 대한 연구가 계속되면서 초기의 한 명의 게임자에 의해 행해지던 원금의존 (captial-dependent) 파론도 게임과 과거의존 (history-dependent) 파론도 게임은 여러 명의 게임자가 서로 협력하여 진행하는 공간의존 (space-dependent) 파론도 게임 등의 다양한 분야로 확대되었다 (Parrondo 등, 2000; Harmer와 Abbott, 2002; Ethier, 2007; Lee, 2009; Lee, 2011; Ethier와 Lee, 2015).

Toral (2001)이 제안한 공간의존 파론도 게임 B는 N (≥ 3)명의 게임자들이 둘러앉아 진행한다. 이들 중 한 명의 게임자를 임의로 선택하는데 그를 게임자 i ($i = 1, 2, \ldots, N$)라고 하면, 공간의존 파론도 게임 B는 게임자 i의 양 옆 게임자 $i-1$과 $i+1$의 상태에 따라 앞면이 나올 확률이 각각 p_0, p_1, p_2인 3개의 동전 중에 하나를 사용한다. 만약 양 옆에 있는 게임자 $i-1$과 $i+1$가 모두 패의 상태이면 p_0 동전을, 둘 중 한 게임자만 승의 상태이면 p_1 동전을, 모두 승의 상태이면 p_2 동전을 사용한다. 게임자 i가 정해

[†] 이 논문은 2013년도 정부 (미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. 2013R1A1A3A04007670).
[1] (712-749) 경북 경산시 대동 214-1, 영남대학교 통계학과, 교수. E-mail: leejy@yu.ac.kr

진 동전을 던져서 앞면이 나오면 1원을 얻어 승의 상태가 되고, 뒷면이 나오면 1원을 잃어 패의 상태가 되며, 이 상태는 게임자 i가 다시 선택될 때까지 유지된다. 다만, 첫 시행을 위한 모든 게임자들의 상태는 동일한 확률 1/2로 승과 패를 정한다. 이 게임은 게임자가 사용할 동전이 양 옆 게임자들의 상태에 의해 결정이 되어 공간의존 파론도 게임이라고 한다 (Ethier와 Lee, 2012a). Toral (2001)의 게임 A는 게임 B와 동일한 구조를 가지고 $p_0 = p_1 = p_2 = 1/2$인 특별한 경우로서 다른 게임자들의 상태와는 무관하게 진행되며 항상 공정한 게임이 된다. 두 게임 A와 B에 대해서 게임 B는 전체 게임자들에 대한 시행당 기대상금이 음수가 되어 지는 게임이 되는 반면에 게임 A와 B를 1/2의 확률로 결합한 혼합게임의 시행당 기대상금은 양수가 되어 이기는 게임이 되는 파론도 역설 현상이 나타남을 Toral (2001)은 특정한 확률 모수 값에서 시뮬레이션을 통하여 확인하였다. Ethier (2007)은 혼합게임의 점근적 기대상금을 계산하였고, Ethier와 Lee (2012a, 2012b)는 이를 확장하여 모든 확률 모수 값에 대해 임의적 혼합게임 뿐 아니라 주기적 반복 결합에 대해서도 파론도 현상이 존재함을 증명하였다. Cho와 Lee (2012)는 주식투자에 적용하여 파론도 현상이 발생할 수 있음을 확인하였다. Xie 등 (2011)은 Toral (2001)의 공간독립인 게임 A를 변형하여 공간의존 게임 A''을 제안하였다. 게임 A''에서는 임의로 선택된 게임자 i가 양 옆의 두 게임자 $i-1$과 $i+1$ 중에서 한 명을 임의로 선택하고 본인의 1원을 전달하여 본인은 패의 상태가 되고 1원을 전달받은 게임자는 승의 상태가 된다. 게임 A''는 인근의 게임자들 사이에서 1원을 전달만 하는 게임으로 전체 게임자들의 상금에는 변동이 없어 여전히 공정한 게임이 된다. Ethier와 Lee (2015)는 게임 A''와 게임 B로 진행되는 혼합게임에서 파론도 역설 현상이 발생함을 확인하고, 특정한 N의 값에서 파론도 역설이 발생하는 확률 모수값의 범위를 그림으로 나타내었다.

본 논문에서는 Xie 등 (2011)의 게임 A''의 상금 전달 범위를 확대하여, 선택된 게임자 i의 양 옆에 있는 게임자들 중에서 임의로 선택된 사람에게 전달하는 것이 아니라 $N-1$명의 나머지 모든 게임자들 중에서 임의로 선택된 게임자에게 1원을 전달하는 Toral (2002)의 재분배 게임 A'를 고려하고자 한다. 재분배 게임은 Toral (2002)이 처음 소개하여 원금의존 파론도 게임에서 재분배로 인해 파론도 역설 현상이 존재함을 시뮬레이션을 통해 확인하였고, Ethier와 Lee (2012c)는 원금의존 파론도 모형에 재분배 게임을 적용하여 파론도 역설 현상이 존재하는 확률 모수의 범위를 유도하였다. Jin과 Lee (2015a, 2015b)는 과거의존 파론도 게임에 적용하여 파론도 역설이 존재하는 확률 모수의 범위를 찾고 주식투자에 적용하였다.

N명의 게임자들로 진행되는 게임 A', B 그리고 혼합게임의 기대상금을 계산하기 위해서는 마코프 체인의 전이확률이 필요하며 이는 확률 모수 p_0, p_1, p_2 뿐 아니라 게임자들의 수 N에도 의존한다. 따라서 마코프 체인의 상태공간은 그 크기가 2^N가 되고, 전이확률행렬은 $2^N \times 2^N$이 되어 바로 유도하기에는 행렬의 크기가 매우 커서 계산이 제한적이다. 이를 해결하기 위해 기존의 마코프 체인의 전이확률 값을 유지한 채 상태공간을 축소할 수 있는 lumpability 조건이 세 게임 A', B 그리고 혼합게임에서 충족하는지를 먼저 확인한 후 축소된 상태공간의 마코프 체인에서 기대상금을 계산한다. 게임 B의 기대상금은 이미 Ethier와 Lee (2012a)에서 유도하였으므로 본 논문에서는 게임 A'와 혼합게임의 전이확률과 기대상금을 축소된 상태공간을 이용하여 계산하고 비교한다.

2절에서는 기존의 공간의존 파론도 게임 B의 기대상금을 유도하는 과정을 설명하면서 게임 A'와 혼합게임에서 lumpability 조건이 충족함을 보이고 기대상금을 계산한다. 3절에서는 $3 \le N \le 6$에서 계산되는 혼합게임의 기대상금을 게임 B의 기대상금과 비교하여 파론도 역설 현상이 존재하는 확률 모수의 범위를 나타낸다. 더불어 기존의 공간독립 게임 A와 결합하여 파론도 역설 현상을 확인했던 공간의존 파론도 게임의 세 개의 확률 모수값에서 재분배 게임 A'와의 결합에도 파론도 역설 현상이 존재하는지 $3 \le N \le 16$의 다양한 N 값에서 기대상금을 계산하여 비교한다.

2. 공간의존 파론도 게임의 재분배 모형

게임 A', B 그리고 혼합게임의 확률모형은 N명의 게임자들의 각 상태를 0 (패) 또는 1 (승)로 나타내어 상태공간

$$\{0,1\}^N := \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) : x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, N\}$$

에서 정의되는 마코프 체인으로 나타낼 수 있다. 상태벡터 $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_N)$에 대해 벡터 $\boldsymbol{x}^i$와 $\boldsymbol{x}^{i,j}$는 상태공간 $\{0,1\}^N$에 속하는 벡터들로서 $\boldsymbol{x}^i$는 $\boldsymbol{x}$와 나머지는 모두 동일하고 i번째 요소 x_i의 값만 차이가 나는 것으로서

$$\boldsymbol{x}^i := (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)$$

으로 정의하고, $\boldsymbol{x}^{i,j}$는 $\boldsymbol{x}$와 나머지는 모두 동일하고 i번째 요소와 j번째 요소가 각각 $x_i = 0$이고 $x_j = 1$인 벡터로서

$$\boldsymbol{x}^{i,j} := (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

로 정의한다. 게임 A'에서는 한 명의 게임자를 임의로 선택한 후, 남은 $N-1$명의 게임자들 중에서 한 명을 임의로 선택하여 그 게임자에서 1원을 넘겨주므로 먼저 선택된 게임자는 패의 상태가 되고 나중에 선택된 게임자는 승의 상태가 된다. 따라서 게임 A'의 전이확률은

$$P_{A'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \delta(\boldsymbol{x}^{i,j}, \boldsymbol{y})/[N(N-1)]$$

가 된다. 단, $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$는 크로네커 델타 (Kronecker delta) 함수로서 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$이면 $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := 1$이고, 그 외에는 $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := 0$이다. 상태벡터 $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_N)$에 대해

$$n(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{N} x_i$$

라고 두면, $n(\boldsymbol{x})$는 $\boldsymbol{x}$의 원소 중 1의 갯수로서 N명의 게임자들 중에서 승의 상태에 있는 게임자들의 수를 나타낸다. 게임 A'의 전이확률 $P_{A'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$은 이 $n(\boldsymbol{x})$에 의해 결정이 되어 다음과 같이 나타낼 수 있다. 만약 $n(\boldsymbol{x}) = 0$ 즉, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0)$이거나 또는 $n(\boldsymbol{x}) = N$ 즉, $\boldsymbol{x} = \mathbf{1} := (1, 1, \ldots, 1)$일 때는 전이확률이

$$P_{A'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^i) = 1/N, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

이고, $1 \leq n(\boldsymbol{x}) \leq N-1$인 $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^N$와 $i, j = 1, 2, \ldots, N, j \neq i$에 대해서는 전이확률이

$$P_{A'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{i,j}) = \begin{cases} [N - n(\boldsymbol{x}) - 1]/[N(N-1)] & \text{만약 } x_i = 0, x_j = 0\text{이면,} \\ 1/[N(N-1)] & \text{만약 } x_i = 1, x_j = 0\text{이면,} \\ n(\boldsymbol{x})[N - n(\boldsymbol{x})]/[N(N-1)] & \text{만약 } x_i = 0, x_j = 1\text{이면,} \\ 1/[N(N-1)] & \text{만약 } x_i = 1, x_j = 1\text{이면} \end{cases} \tag{2.1}$$

로 얻어진다. 게임 A'의 마코프 체인은 상태 $\mathbf{0}$와 $\mathbf{1}$이 도달 불가 상태로서 분할 가능 마코프 체인이지만 $\{0,1\}^N - \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$로 상태공간을 제한하면 분할불가 마코프 체인이 되고 유일한 정상확률분포 $\boldsymbol{\pi}_{A'}$가 존재한다. 더불어 게임 A'에서는 전체 게임자들의 상금에 변함이 없으므로 전체 게임자들의 게임당 기대상금이 항상

$$\mu_{A'} = 0$$

이 되어 공정한 게임이 된다.

게임 B의 전이확률을 위해 상태벡터 $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \{0,1\}^N$에 대해

$$m_i(\boldsymbol{x}) := x_{i-1} + x_{i+1}$$

라고 정의하면, $m_i(\boldsymbol{x})$는 게임자 i의 양 옆에 있는 게임자들 중에서 승의 상태에 있는 게임자들의 수로서 {0, 1, 2}의 정수값 중 하나를 갖게 된다. N명의 게임자들이 둘려앉기 때문에 $x_0 := x_N$이고 $x_{N+1} := x_1$이다. 따라서 게임 B의 전이확률 $P_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$은 전체 게임자들의 수 N과 확률 p_0, p_1, p_2에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다 (Ethier와 Lee, 2012a). 모든 $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^N$와 $i = 1, ..., N$에 대해

$$P_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^i) = \begin{cases} p_{m_i(\boldsymbol{x})}/N & \text{만약 } x_i = 0\text{이면,} \\ q_{m_i(\boldsymbol{x})}/N & \text{만약 } x_i = 1\text{이면,} \end{cases}$$

$$P_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = [\sum_{i:x_i=0} q_{m_i(\boldsymbol{x})} + \sum_{i:x_i=1} p_{m_i(\boldsymbol{x})}]/N, \tag{2.2}$$

그 외의 경우에는 $P_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$이다. 여기서 $q_m := 1 - p_m$, $m = 0, 1, 2$이다.

게임 B의 상금행렬 $\boldsymbol{W}_B = (w_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$는 모든 $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^N$와 $i = 1, ..., N$에 대해

$$w_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^i) = \begin{cases} +1 & \text{만약 } x_i = 0\text{이면,} \\ -1 & \text{만약 } x_i = 1\text{이면,} \end{cases}$$

$$w_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} -1 & \text{만약 } x_i = 0\text{이면,} \\ +1 & \text{만약 } x_i = 1\text{이면,} \end{cases}$$

그 외의 경우에는 $w_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$이다. 만약 모든 $m = 0, 1, 2$에 대해 $0 < p_m < 1$이면 게임 B의 마코프 체인은 분할불가이고 비주기적이므로 유일한 정상확률분포 $\boldsymbol{\pi}_B$가 존재한다. 따라서 전체 게임자들의 게임당 기대상금 μ_B는 Ethier와 Lee (2009)에 의해

$$\begin{aligned} \mu_B &= \sum_{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^N} \pi_B(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{N} [p_{m_i(\boldsymbol{x})} - q_{m_i(\boldsymbol{x})}]/N \\ &= \boldsymbol{\pi}_B \dot{\boldsymbol{P}}_B \mathbf{1}^{\mathsf{T}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

으로 계산된다. 여기서 $\mathbf{1}^{\mathsf{T}}$는 크기가 2^N인 열벡터 $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$이고, $\dot{\boldsymbol{P}}_B := \boldsymbol{P}_B \circ \boldsymbol{W}_B$로서 $\boldsymbol{P}_B$의 각 요소에 있는 q_m, $m = 0, 1, 2$ 대신에 $-q_m$을 대입하여 얻은 행렬과 일치한다. 단, $\circ$는 아다마드 곱 (Hadamard product)을 나타낸다 (Ethier와 Lee, 2009).

한편, 게임 B의 마코프 체인의 전이확률 값은 임의로 선택된 게임자의 양 옆에 있는 게임자들의 상태에만 의존함으로 둥글게 앉은 게임자들의 위치가 시계방향으로 회전을 하거나 또는 앉은 위치를 시계 반대 방향의 순서로 바꾸어 앉아도 그 전이확률이 변하지 않는 특성을 가진다. 그러므로 다음의 정리를 적용하여 기존의 마코프 체인의 상태공간을 축소하면 더 작은 크기의 상태공간에서 기대상금을 계산할 수 있다 (Ethier와 Lee, 2012a).

정리 2.1 (Ethier와 Lee 2012a) G를 대칭군의 부분집합이라 하고, $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_N) \in \{0,1\}^N$와 $\sigma \in G$에 대해서 $\boldsymbol{x}_\sigma := (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)}) \in G$ 라고 하자. 전이확률행렬 $\boldsymbol{P}$과 정상확률분포 $\boldsymbol{\pi}$를 갖는 마코프 체인이 모든 $\sigma \in G$와 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \Sigma$에 대해 lumpability 조건

$$P(\boldsymbol{x}_\sigma, \boldsymbol{y}_\sigma) = P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{2.4}$$

을 만족하면

$$\pi(\boldsymbol{x}_\sigma) = \pi(\boldsymbol{x})$$

이 성립한다. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_\sigma$가 되는 $\sigma \in G$가 존재하면, $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{y}$는 동치 (equivalent)가 되고 $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$로 나타내며 $\boldsymbol{x}$를 포함하는 동치류 (equivalence class)는 $[\boldsymbol{x}]$로 표현한다. 그러면 동치류들의 공간 $\{0,1\}^N/\sim$에서 정의되는 마코프 체인의 전이확률행렬은

$$\bar{P}([\boldsymbol{x}],[\boldsymbol{y}]) := \sum_{\boldsymbol{y}':\boldsymbol{y}'\sim\boldsymbol{y}} P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}') = \sum_{\sigma\in G:\text{다른}\boldsymbol{y}_\sigma} P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_\sigma)$$

이며, $\bar{\boldsymbol{P}}$의 정상확률분포 $\bar{\boldsymbol{\pi}}$가 존재하여 $\pi(\boldsymbol{x}) = \bar{\pi}(\boldsymbol{x})/|[\boldsymbol{x}]|$를 만족한다. 단, $|[\boldsymbol{x}]|$는 동치류 $[\boldsymbol{x}]$의 크기이다.

게임 B의 전이확률 (2.2)은 집합 G가 $(1,2,\ldots,N)$의 회전변환 (rotation) σ_1과 반사변환 (reflection) σ_2에 의해 생성되는 크기 $2N$의 정이면체군 (diheral group)일 때 정리 2.1를 적용할 수 있다 (Ethier와 Lee, 2012a). 회전변환 σ_1은 $(\sigma_1(1),\ldots,\sigma_1(N)) = (2,3,\ldots,N,1)$이고 반사변환 σ_2는 $(\sigma_2(1),\ldots,\sigma_2(N)) = (N,N-1,\ldots,2,1)$이다. Ethier와 Lee (2015)는 두 변환 σ_1과 σ_2에 대해 전이확률 $P_B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$이 (2.4)의 lumpability 조건을 만족함을 보이고, (2.3)의 기대상금 μ_B는 축소된 상태공간 $\{0,1\}^N/\sim$에서

$$\begin{aligned}\mu_B &= \sum_{[\boldsymbol{x}]\in\{0,1\}^N/\sim} \bar{\pi}_B([\boldsymbol{x}]) \sum_{i=1}^{N} [p_{m_i([\boldsymbol{x}])} - q_{m_i([\boldsymbol{x}])}]/N \\ &= \bar{\boldsymbol{\pi}}_B \dot{\bar{\boldsymbol{P}}}_B \bar{\mathbf{1}}^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

으로 나타낼 수 있음을 증명하였다. 여기서 $\dot{\bar{\boldsymbol{P}}}_B$는 $\bar{\boldsymbol{P}}_B \circ \bar{\boldsymbol{W}}_B$로서 $\bar{\boldsymbol{P}}_B$의 각 요소에 있는 q_m, $m = 0,1,2$ 대신에 $-q_m$을 대입하여 얻는 행렬과 동일하다. $\dot{\bar{\boldsymbol{P}}}_B = \dot{\bar{\boldsymbol{P}}}_B$이며 $\bar{\mathbf{1}}^{\mathsf{T}}$는 $\{0,1\}^N/\sim$에서 정의되는 열벡터 $(1,1,\ldots,1)^{\mathsf{T}}$이다.

이번에는 게임 A'의 전이확률에 대한 두 변환 σ_1와 σ_2의 lumpability 조건을 살펴보자. (2.1)에서 전이확률 $P_{A'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$은 상태벡터 $\boldsymbol{x}$의 $n(\boldsymbol{x})$ 값에 의해서 결정됨을 알았다. $n(\boldsymbol{x})$는 N명의 게임자들 중에서 승의 상태에 있는 게임자들의 수로서 둥글게 앉은 게임자들의 위치가 시계방향으로 회전을 하거나 (σ_1 변환) 또는 앉은 위치를 시계 반대 방향의 순서로 옮겨 앉아도 (σ_2 변환) $n(\boldsymbol{x})$의 값에는 변함이 없다. 즉, 변환 σ_1와 σ_2에 대해

$$\begin{aligned}P_{A'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^{i,j}) &= P_{A'}(\boldsymbol{x}_{\sigma_1},\boldsymbol{x}^{i,j}_{\sigma_1}) \\ P_{A'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^{i,j}) &= P_{A'}(\boldsymbol{x}_{\sigma_2},\boldsymbol{x}^{i,j}_{\sigma_2})\end{aligned}$$

이 항상 성립한다. 변환 σ_1과 σ_2에 대한 lumpability 조건은 게임 A'와 게임 B를 확률 $\gamma(0<\gamma<1)$로 결합한 혼합게임 $C := \gamma A' + (1-\gamma)B$에서도 충족한다.

혼합게임 $C = \gamma A' + (1-\gamma)B$에 대한 전이확률은

$$\boldsymbol{P}_C := \gamma \boldsymbol{P}_{A'} + (1-\gamma)\boldsymbol{P}_B$$

이고, 축소된 상태공간 $\{0,1\}^N/\sim$에서의 전이확률은

$$\bar{\boldsymbol{P}}_C := \gamma \bar{\boldsymbol{P}}_{A'} + (1-\gamma)\bar{\boldsymbol{P}}_B$$

가 된다. 게임 A'에서는 전체 게임자들의 상금에 변함이 없으므로 $\dot{\boldsymbol{P}}_{A'} = \mathbf{0}$이고 $\dot{\bar{\boldsymbol{P}}}_{A'} = \mathbf{0}$이다. 그러므로

$$\dot{\boldsymbol{P}}_C = (1-\gamma)\dot{\boldsymbol{P}}_B \quad \text{그리고} \quad \dot{\bar{\boldsymbol{P}}}_C = (1-\gamma)\dot{\bar{\boldsymbol{P}}}_B$$

가 된다. $\boldsymbol{\pi}_C$과 $\bar{\boldsymbol{\pi}}_C$을 각각 $\boldsymbol{P}_C$와 $\bar{\boldsymbol{P}}_C$의 정상확률이라고 하면, 혼합게임 C의 전체 게임자들의 게임당 기대상금 μ_C는

$$\mu_C = \boldsymbol{\pi}_C \dot{\boldsymbol{P}}_C \mathbf{1}^\top = \bar{\boldsymbol{\pi}}_C \dot{\bar{\boldsymbol{P}}}_C \mathbf{1}^\top \tag{2.5}$$

로 축소된 상태공간에서 계산할 수 있다.

$N = 3$일 때는 게임 A'가 Xie 등 (2011)의 게임 A''와 일치하므로 $N = 4$일 때의 경우를 간단한 예로서 살펴보자. $N = 4$일 때는 전체 $2^4 = 16$개의 상태가 회전변환 σ_1과 반사변환 σ_2에 의해 생성한 정이면체군 G에 의해 6개의 동치류 $\{0000\}$, $\{0001, 0010, 0100, 1000\}$, $\{0011, 0110, 1001, 1100\}$, $\{0101, 1010\}$, $\{0111, 1011, 1101, 1110\}$, $\{1111\}$의 상태공간으로 축소된다. 이 축소된 공간에서의 전이확률행렬은

$$\bar{\boldsymbol{P}}_B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4q_0 & 4p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_0 & p_0+q_0+2q_1 & 2p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_1 & 2(p_1+q_1) & 0 & 2p_1 & 0 \\ 0 & 2q_0 & 0 & 2(p_0+q_2) & 2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_1 & q_2 & 2p_1+p_2+q_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4q_2 & 4p_2 \end{pmatrix}$$

로 얻어진다 (Ethier와 Lee, 2015). 따라서 식 (2.3)을 적용하여

$$\begin{aligned} \mu_B \quad = \quad & [-(3-2p_2-3p_0^2+2p_0p_2-p_2^2+2p_0^2p_2-2p_0p_2^2) \\ & +4(1+p_0)(1-p_0+p_2)(1-p_2)p_1-2(1-p_0+p_2)(1-p_0-p_2)p_1^2] \\ & /[3+6p_0-2p_2-3p_0^2-2p_0p_2-p_2^2+12p_0^2p_2-4p_0p_2^2-8p_0^2p_2^2 \\ & -4(1-p_0+p_2+2p_0^2+2p_0p_2)(1-p_2)p_1 \\ & +2(1+4p_0-p_0^2-2p_0p_2-p_2^2)p_1^2] \end{aligned} \tag{2.6}$$

을 얻는다.

한편, 16개의 상태들로 구성된 상태공간에서의 게임 A'의 전이확률행렬은

$$\boldsymbol{P}_{A'} := \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0&3&3&0&3&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&3&1&2&1&2&0&0&1&2&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&3&2&1&0&2&0&1&0&2&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&4&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&3&2&2&0&1&0&0&0&2&0&0&0 \\ 0&1&0&1&1&4&1&1&0&1&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&1&1&4&1&0&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&2&0&2&2&3&0&0&0&1&0&1&1&0 \\ 0&1&1&0&1&0&0&0&3&2&2&0&2&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&0&1&4&1&1&1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&1&0&1&1&4&1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&2&0&0&0&1&0&2&2&3&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&0&4&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&2&0&1&0&2&0&1&2&3&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&2&1&0&0&2&1&2&1&3&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&3&0&3&3&0 \end{pmatrix}$$

이 되고, 6개의 동치류로 축소된 상태공간에서의 전이확률행렬은

$$\bar{\boldsymbol{P}}_{A'} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

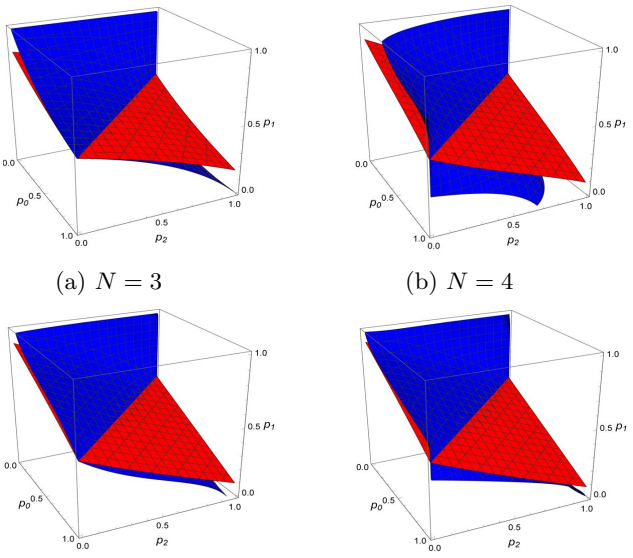
가 된다. 따라서 $\gamma = 1/2$일 때 혼합게임 $C := A'/2 + B/2$의 기대상금은 식 (2.5)로부터

$$\begin{aligned} \mu_C \quad = \quad & 3\{224 - 124p_2 - p_2^2 - 3p_1^2(-7 + 4p_2 + 3p_2^2) + 6p_1(-44 + 4p_2 + 7p_2^2) \\ & -p_0^2[44 - 9p_1^2 - 12p_2 + 6p_1(-7 + 3p_2)] - 6p_0[10 + 5p_1^2 - 3p_2 + p_2^2 \\ & +p_1(3 + 8p_2 - 3p_2^2)]\}/\{2[-672 + 260p_2 + 31p_2^2 + p_1(120 + 36p_2 - 60p_2^2) \\ & +3p_1^2(-45 + 10p_2 + 3p_2^2) + p_0^2(52 + 78p_1 + 9p_1^2 - 108p_2 - 36p_1p_2 + 36p_2^2) \\ & +2p_0[-190 + 11p_2 + 36p_2^2 + p_1^2(-33 + 9p_2) - 3p_1(1 - 9p_2 + 6p_2^2)]\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

가 계산된다.

3. 파론도 영역

본 절에서는 게임 A', B 그리고 혼합게임 $C := A'/2 + B/2$의 기대상금 값을 비교하여 파론도 역설 현상이 존재하는 확률 모수 p_0, p_1, p_2의 범위를 알아보고자 한다. $N = 3$인 경우는 임의로 선택된 게임자의 양 옆에 있는 두 명의 게임자만이 존재함으로 Xie 등 (2011)의 모형과 일치한다. $N = 4$인 경우에 (2.6)의 $\mu_B = 0$인 (p_0, p_1, p_2)의 영역을 Figure 3.1의 (b)에 파란색으로 표시하고, (2.7)로부터 얻어지는 $\mu_C = 0$인 (p_0, p_1, p_2)의 영역은 붉은색으로 나타내었다. $\mu_B < 0$이고 $\mu_C > 0$인 영역, 즉, 파란색 면의 아래와 붉은색 면의 윗 부분에 해당하는 확률 모수 (p_0, p_1, p_2)의 영역에서 파론도 효과가 존재한다. 한편, $\mu_B > 0$이고 $\mu_C < 0$인 파란색 면의 위와 붉은색 면의 아래 부분에 해당하는 확률 모수 (p_0, p_1, p_2)의 영역에서는 역파론도 (reverse-Parrondo) 효과가 존재한다. $N = 5, 6$의 경우에 얻어지는 파론도 효과와 역파론도 효과에 해당하는 확률 모수의 영역도 Figure 3.1의 (c)와 (d)에 각각 나타내었다.



(a) $N = 3$ (b) $N = 4$

(c) $N = 5$ (d) $N = 6$

Figure 3.1 The blue surface is the surface $\mu_B = 0$ and the red surface is the surface $\mu_C = 0$ in the (p_0, p_1, p_2) unit cube.

Toral (2001)이 공간의존 파론도 게임을 처음 제안하면서 시뮬레이션을 통해 파론도 효과의 존재를 확인했던 확률 모수 $(p_0, p_1, p_2) = (1, 4/25, 7/10)$와 추가로 Ethier와 Lee (2012a)에서 파론도 효과를 확인했던 확률 모수 $(p_0, p_1, p_2) = (7/10, 17/25, 0)$와 $(p_0, p_1, p_2) = (1/10, 3/5, 3/4)$에 대해 게임 A'와 B에 대해서도 여전히 파론도 효과가 존재하는지 $3 \leq N \leq 16$의 다양한 N값에 대해 기대상금을 계산하였다. Table 3.1에 나와있듯이 $(p_0, p_1, p_2) = (1, 4/25, 7/10)$에서는 $N = 4, 7, 8$에서 역파론도 효과가 존재하고 나머지 N값에서는 기대상금 μ_B와 μ_C가 모두 음수가 되어 파론도 현상이 나타나지 않는다. 반면에 $(p_0, p_1, p_2) = (7/10, 17/25, 0)$와 $(p_0, p_1, p_2) = (1/10, 3/5, 3/4)$에서는 $4 \leq N \leq 16$에서 $\mu_B < 0$이고 $\mu_C > 0$인 파론도 효과가 존재함을 확인하였다.

Table 3.1 Expected profits of games B and C for (p_0, p_1, p_2)

	$(1, 4/25, 7/10)$		$(7/10, 17/25, 0)$		$(1/10, 3/5, 3/4)$	
N	μ_B	μ_C	μ_B	μ_C	μ_B	μ_C
3	−0.090909	−0.076616	0.071038	0.052556	−0.190476	0.025074
4	0.079961	−0.023017	−0.042571	0.019585	−0.085819	0.030224
5	−0.002195	−0.021697	−0.042571	0.019916	−0.038998	0.027190
6	−0.018925	−0.015907	−0.010293	0.017588	−0.018317	0.024610
7	0.003506	−0.012192	−0.007226	0.016360	−0.009242	0.022839
8	0.000698	−0.009648	−0.008083	0.015467	−0.005285	0.021591
9	−0.001892	−0.007757	−0.007843	0.014807	−0.003570	0.020670
10	−0.000333	−0.006299	−0.007910	0.013892	−0.002830	0.019963
11	−0.000467	−0.005142	−0.007891	0.013562	−0.002512	0.019404
12	−0.000677	−0.003419	−0.007896	0.013288	−0.002375	0.018950
13	−0.000563	−0.002761	−0.007895	0.013058	−0.002317	0.018259
14	−0.000570	−0.002199	−0.007895	0.012861	−0.002292	0.017989
15	−0.000586	−0.001713	−0.007895	0.012690	−0.002282	0.017757
16	−0.000578	−0.001289	−0.007895	0.012541	−0.002277	0.017554

4. 결론

본 논문에서는 N명의 게임자들로 진행되는 공간의존 파론도 게임 B와 Toral (2002)의 공정한 재분배 게임 A'를 결합한 혼합게임 C의 점근적 기대상금을 계산하고, N의 값과 공간의존 파론도 게임 B의 확률 모수 p_0, p_1, p_2의 범위에 따라 파론도 효과와 역파론도 효과가 존재함을 확인하였다. 게임의 점근적 기대상금을 구하기 위해서는 마코프 체인의 전이확률이 필요한데 그 상태공간의 크기가 2^N으로 매우 크다. 계산이 가능한 N의 값을 확대하기 위해서, 기존의 마코프 체인의 전이확률을 유지한 채 상태공간을 축소할 수 있는 lumpability 조건이 세 게임 A', B 그리고 C에서 충족하는지를 먼저 확인하고 축소된 상태공간의 마코프 체인에서 기대상금을 구하였다. $3 \leq N \leq 6$에서는 혼합게임 C의 기대상금을 게임 B의 기대상금과 비교하여 파론도 역설 현상이 존재하는 확률 모수의 범위를 도식화 하였고, $3 \leq N \leq 16$의 범위에서는 주어진 p_0, p_1, p_2의 값에서 기대상금 값을 계산하여 비교하였다. 비록 lumpability 조건의 활용으로 축소된 상태공간에서 기대상금 계산이 가능해졌지만 여전히 큰 $N \geq 17$의 값에서의 계산에는 한계가 있다.

파론도 역설 현상의 존재 확인은 다양한 분야에서 이루어지고 있으며 특히, 게임 B와 결합하여 게임 B의 기존의 특성을 바꾸는 역할을 하는 다양한 형태의 게임 A를 발견하려는 노력이 계속되었다. 처음 고려된 공간독립 게임 A를 비롯하여 Xie 등 (2011)이 제안한, 선택된 게임자의 양 옆에 있는 게임자들 중에서 임의로 한 명을 선택하여 상금을 분배하는 게임 A''까지 비록 본인은 공정한 게임이지만 게임 B와 결합하여 게임 B의 특성을 바꾸는 잡음과 같은 역할의 게임이라고 볼 수 있다. Toral (2002)의 재분배 게임 A'은 원금의존 파론도 게임 또는 과거의존 파론도 게임과 결합할 때 기존 게임의 특성을 변

형시키는 것이 확인되었고, 공간의존 파론도 게임과 결합하여도 유사한 변형을 보여줌을 본 논문에서 확인하였다. 이를 이용하면 공간의존 파론도 게임의 규칙에 따라 진행되는 주식 투자에서 재분배의 투자 포트폴리오를 혼합함으로써 기대수익의 감소의 특성을 증가로 변형시키는 것이 가능할 수 있다. 기존의 공간의존 파론도 게임 B의 점근적 기대상금은 N의 값이 커질수록 일정한 값에 수렴하는 성질이 발견되었다. 상금 전달 범위가 더 확대된 본 모형에서도 유사한 성질이 성립하는 지를 살펴보는 향후 연구가 필요할 것이다.

References

Cho, D. and Lee, J. (2012). Spatially dependent Parrondo games and stock investments. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **23**, 867–880.

Ethier, S. N. (2007) Markov chains and Parrondo's paradox. In *Optimal Play: Mathematical Studies of Games and Gambling,* edited by S. N. Ethier and W. R. Eadington, Institute for the Study of Gambling and Commercial Gaming, University of Nevada, Reno, 493–506.

Ethier, S. N. and Lee, J. (2009). Limit theorems for Parrondo's paradox. *Electronic Journal of Probability*, **14**, 1827–1862.

Ethier, S. N. and Lee, J. (2012a). Parrondo games with spatial dependence. *Fluctuation and Noise Letters*, **11**, 1250004.

Ethier, S. N. and Lee, J. (2012b). Parrondo games with spatial dependence, II. *Fluctuation and Noise Letters*, **11**, 1250030.

Ethier, S. N. and Lee, J. (2012c). Parrondo's paradox via redistribution of wealth. *Electronic Journal of Probability*, **17**, 1-21.

Ethier, S. N. and Lee, J. (2015). Parrondo games with spatial dependence, III. *Fluctuation and Noise Letters*, **14**.

Harmer, G. P. and Abbott, D. (2002). A review of Parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, **2**, R71–R107.

Jin, G. and Lee, J. (2015a). A redistribution model of the history-dependent Parrondo game. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **26**, 77–87.

Jin, G. and Lee, J. (2015b). Stock investment with a redistribution model of the history-dependent Parrondo game. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **26**, 781–790.

Lee, J. (2009). Optimal strategies for collective Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 973–982.

Lee, J. (2011). Paradox in collective history-dependent Parrondo games. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 631–641.

Parrondo, J. M. R. (1996). How to cheat a bad mathematician? In *the Workshop of the EEC HC&M Network on Complexity and Chaos*, ISI, Torino, Italy.

Parrondo, J. M. R., Harmer, G. P. and Abbott, D. (2000). New paradoxical games based on Brownian ratchets. *Physical Review Letters*, **85**, 5226–5229.

Toral, R (2001). Cooperative Parrondo's games. *Fluctuation and Noise Letters*, **1**, 7–12.

Toral, R (2002). Capital redistribution brings wealth by Parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, **2**, L305–L311.

Xie, N.-G., Chen, Y., Ye, Y., Xu, G., Wang, L.-G. and Wang, C. (2011). Theoretical analysis and numerical simulation of Parrondo's paradox game in space. *Chaos Solutions Fractals*, **44**, 401–414.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2016, **27**(1), 121–130

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2016.27.1.121
한국데이터정보과학회지

A redistribution model for spatially dependent Parrondo games[†]

Jiyeon Lee[1]

[1]Department of Statistics, Yeungnam University

Received 28 December 2015, revised 11 January 2016, accepted 13 January 2016

Abstract

An ansemble of N players arranged in a circle play a spatially dependent Parrondo game B. One player is randomly selected to play game B, which is based on the toss of a biased coin, with the amount of the bias depending on states of the selected player's two nearest neighbors. The player wins one unit with heads and loses one unit with tails. In game A' the randomly chosen player transfers one unit of capital to another player who is randomly chosen among $N-1$ players. Game A' is fair with respect to the ensemble's total profit. The games are said to exhibit the Parrondo effect if game B is losing and the random mixture game C is winning and the reverse-Parrondo effect if game B is winning and the random mixture game C is losing. We compute the exact mean profits for games B and C by applying a state space reduction method with lumped Markov chains and we sketch the Parrondo and reverse-Parrondo regions for $3 \leq N \leq 6$.

Keywords: Expected profits, lumpability, Markov chains, Parrondo effects, space-dependent Parrondo games, stationary distriburions, redistribution.

[†] This work was supported by the Basic Science Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Science, ICT & Future Planning (No. 2013R1A1A3A04007670).

[1] Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, Kyeongsan 712-749, Korea.
E-mail: leejy@yu.ac.kr