Journal of the Korean Data & Information Science Society
2016, **27**(6), 1487–1498

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2016.27.6.1487
한국데이터정보과학회지

$\bar{X}$ 관리도에서 런길이의 중위수에 기초한 모수 추정의 영향[†]

이유진[1] · 이재헌[2]

[12]중앙대학교 응용통계학과

접수 2016년 9월 23일, 수정 2016년 10월 19일, 게재확정 2016년 10월 25일

요 약

관리도를 사용하여 공정을 관리할 때, 일반적으로 공정 모수의 정확한 값은 알 수 없기 때문에 제1국면의 표본을 통하여 이를 추정해서 사용하고 있다. 또한 추정된 공정 모수를 이용하여 관리도를 설계하는 경우 관리한계는 관리상태에서의 런길이의 평균인 ARL (average run length)이 미리 지정한 값을 만족하도록 설정하고 있다. 그러나 런길이의 분포는 일반적으로 치우쳐져 있기 때문에, 런길이의 평균 대신 중위수를 사용하는 것이 바람직할 수 있다. 이 논문에서는 제1국면에서 추정한 모수를 사용하는 경우 부그룹의 크기에 따른 $\bar{X}$ 관리도의 성능에 대해 연구하였고, 이때 공정 평균에 대한 추정량은 전체 표본평균을 사용하고 공정 표준편차에 대해서는 5가지 추정량을 사용하여 이에 대한 영향을 살펴보았다. 기존 연구와 다른 점은 여러 가지의 부그룹 크기에 대해 모수 추정의 영향을 ARL 대신 런길이의 중위수인 MRL (median run length)에 기초하여 살펴보았으며, 두 가지 방법에 대해 그 결과를 비교하였다.

주요용어: 공정 모수, 런길이의 중위수, 제1국면, $\bar{X}$ 관리도.

1. 서론

Shewhart가 공정을 효율적으로 관리하기 위해 관리도 (control chart)를 제안한 이후 관리도는 통계적 공정관리에서 공정 모수 (process parameter)의 변화를 탐지하기 위한 기법으로 다양하게 사용되고 있다. Shewhart 관리도는 주로 공정 모수의 큰 변화를 탐지하기 위해 적합한 관리도인데, 그 설계와 적용이 비교적 간편해서 관리도들 중에서 가장 널리 사용되고 있다. 관리도를 사용하는 주요 목적은 공정이 관리상태 (in-control)인지 이상상태 (out-of-control)인지를 판단하고, 공정 모수의 변화를 유발시키는 이상원인 (assignable cause)이 발생한 경우에 그 원인을 찾아서 제거하는 것이다. 관리도를 설계하기 위해서는 관리상태에서의 공정 모수를 알고 있어야 하는데, 일반적으로 이들 모수가 알려져 있는 경우는 많지 않다. 따라서 실제 관리도를 운용할 때에는 제1국면 (Phase I)을 통하여 추출한 표본으로부터 공정 모수를 추정하고, 여기서 추정한 모수를 이용하여 관리도를 설계하여 공정의 변화를 탐지하는 제2국면 (Phase II)을 운용하는 것이다.

제2국면에서 관리도의 성능을 평가할 때 런길이 (run length)의 분포의 특징을 이용해서 평가한다. 여기서 런길이란 공정에서 이상신호를 줄 때까지 추출한 표본의 수를 나타내며, 일반적으로 런길이의 평균인 ARL (average run length)을 이용하여 성능을 평가하고 있다. 관리도의 성능을 올바르게 평가하기 위해서는 제1국면에서 모수를 정확하게 추정하는 것이 중요한데, 이때 실무자들은 서로 다른

[†] 이 논문은 2014년도 정부 (교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. NRF-2014R1A1A2054200).
[1] (06974) 서울시 동작구 흑석로 84, 중앙대학교 응용통계학과, 석사과정.
[2] 교신저자: (06974) 서울시 동작구 흑석로 84, 중앙대학교 응용통계학과, 교수. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr

표본의 데이터를 이용하여 모수를 추정하기 때문에 추정된 모수에는 산포가 존재하며 이 산포가 관리도의 성능에 영향을 주게 된다. 제1국면에서 추정한 모수의 영향에 대한 연구로는 Ghosh 등 (1981), Quesenberry (1993), Chen(1997), Jones 등 (2001), Chakraborti (2006), Bischak와 Trietsch (2007), 그리고 Castagliola 등 (2012)이 있다. 최근 관리도의 성능을 평가함에 있어서 이러한 산포를 반영하기 위해 ARL의 평균과 표준편차인 AARL (average of the ARL)과 SDARL (standard deviation of the ARL)을 사용하기 시작했는데, 특히 SDARL은 그 중요성이 점점 커지고 있는 상황이다. Jones와 Steiner (2012)가 처음으로 SDARL의 중요성에 대해 제시하였고, Zhang 등 (2013, 2014), Lee 등 (2013), Aly 등 (2015), Faraz 등 (2015), 그리고 Saleh 등 (2015)이 AARL과 SDARL을 함께 고려해서 관리도의 성능을 평가하였다.

이처럼 관리도의 성능을 평가할 때 ARL을 많이 사용하지만 런길이의 분포가 한쪽으로 많이 치우친 형태로 나타나거나 이상치가 다수 발생하는 경우 ARL을 단독으로 사용하는 것은 적절하지 않다. Bischak와 Trietsch (2007), Das (2009)는 런길이의 분포가 한쪽으로 많이 치우친 경우 관리도의 성능을 평가할 때 ARL만을 이용하는 것에 대한 문제점을 지적하였다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 하나의 방안은 런길이의 평균 대신 중위수 (median)를 이용하는 것이다. 중위수는 이상치가 발생한 경우 평균에 비하여 민감하게 반응하지 않고 분포가 한쪽으로 치우친 경우 좀 더 타당한 분포의 대푯값이 될 수 있다고 알려져 있기 때문에, 런길이의 분포가 한쪽으로 많이 치우친 경우 ARL과 함께 런길이의 중위수인 MRL (median run length)을 이용하는 방법을 고려할 수 있다. Gan 등 (1993), Golosnoy와 Schmid (2007), Khoo 등 (2012), 그리고 Low 등 (2012)은 관리도의 성능을 평가할 때 MRL을 이용하는 것을 권장하였다. 런길이의 MRL도 ARL과 마찬가지로 실무자들이 제1국면에서 모수를 추정할 때 서로 다른 표본을 사용함에 따른 변동이 발생하기 때문에, 모수 추정의 영향을 판단할 때 MRL의 평균인 AMRL (average of the MRL)과 표준편차인 SDMRL (standard deviation of the MRL)을 이용할 수 있다.

이 논문의 목적은 제1국면에서 추정한 모수를 사용하는 경우 부그룹 (subgroup) 또는 표본의 수에 따른 관리도의 성능에 대하여 연구하는 것인데, 공정 평균에 대한 추정량은 전체 표본평균을 사용하고 공정 표준편차에 대한 추정량은 5가지 추정량을 사용해서 그 영향을 살펴보았다. 이때 기존 연구에서는 모수 추정에 따른 영향을 평가할 때 ARL을 이용하였는데 이 논문에서는 MRL을 이용하여 평가하였으며, ARL과 MRL을 이용한 결과를 서로 비교하고 분석하여 그 경향을 알아보고자 한다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 Shewhart의 $\bar{X}$ 관리도에 대해 설명하며, 특히 관리도의 관리한계와 런길이에 대한 내용을 언급하고 있다. 3절에서는 추정량에 대해 설명하고 MRL의 평균과 표준편차에 대한 계산식을 제안하였다. 4절에서는 모의실험을 통해 부그룹의 크기와 추정량에 따라 모수 추정의 영향을 살펴보았으며, 마지막으로 5절에서는 전반적인 결론을 제시하고 있다.

2. Shewhart $\bar{X}$ 관리도

품질특성치 X에 대하여, 시점 i에서 관측한 크기 n의 표본 $(X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in})$은 서로 독립이고 평균은 μ, 표준편차는 σ인 정규분포를 따른다고 가정하자. Shewhart의 $\bar{X}$ 관리도의 목적은 공정 평균 μ가 관리상태에서의 평균값인 μ_0에서 변화하는지를 탐지하는 것인데, 여기서 관리상태에서의 표준편차 값은 σ_0라고 가정한다. 시점 i에서 $\bar{X}$ 관리도의 관리통계량 (control statistic)은

$$\bar{X}_i = \left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \right) / n$$

이고, 만일 관리상태에서의 공정 모수인 μ_0와 σ_0가 알려진 경우 이 관리통계량이

$$\mathrm{LCL} = \mu_0 - L\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad \mathrm{UCL} = \mu_0 + L\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

로 주어지는 L-시그마 관리한계 (control limit)를 벗어나면 이상상태라는 신호를 주게 된다. 여기서 LCL (lower control limit)과 UCL (upper control limit)은 각각 관리하한과 관리상한을 나타낸다.

이상상태라는 신호를 줄 확률을 p라 할 경우, p는 $\Pr(\bar{X}_i > \mathrm{UCL}$ 또는 $\bar{X}_i < \mathrm{LCL})$로 계산할 수 있다. 예를 들어, 관리한계의 상수 L을 3으로 사용하는 경우, 공정이 관리상태인데 이상상태의 신호, 즉 오경보 (false alarm)가 발생하는 확률 p_0는

$$p_0 = \Pr(\bar{X}_i > \mathrm{UCL} \text{ 또는 } \bar{X}_i < \mathrm{LCL} \mid \mu = \mu_0,\ \sigma = \sigma_0) = 1 - \Phi(3) + \Phi(-3) = 0.0027$$

이 된다. 여기서 $\Phi(\cdot)$은 표준정규분포의 누적분포함수를 나타낸다.

$\bar{X}$ 관리도의 런길이는 기하분포 (geometric distribution)를 따르고 평균은 $1/p$이 되기 때문에, $L = 3$인 경우 관리상태에서의 평균런길이인 ARL_0는 $1/0.0027 = 370.4$가 된다.

3. 공정 모수의 추정량과 성능 측도의 계산

3.1. 공정 모수의 추정량

관리상태에서의 평균과 표준편차인 μ_0와 σ_0는 일반적으로 모르기 때문에 제1국면을 통하여 이를 추정하는 것이 필요하다. 제1국면에서 추출한 부그룹의 수가 m이라 할 때, μ_0에 대한 추정량은 일반적으로 다음과 같은 추정량을 사용한다.

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i\right)/m$$

μ_0에 대한 추정량과는 다르게 σ_0에 대해서는 여러 가지 추정량을 고려할 수 있는데, 크게는 불편추정량 (unbiased estimator)과 편향추정량 (biased estimator)으로 구분할 수 있다. 먼저 σ_0의 불편추정량으로 다음과 같은 3가지 추정량을 많이 사용한다.

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}, \quad \hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{S}}{c_4(n)}, \quad \hat{\sigma}_3 = \frac{S_{\mathrm{pooled}}}{c_4(\upsilon + 1)}$$

이때 $\bar{R} = (\sum_{i=1}^{m} R_i)/m$, $\bar{S} = (\sum_{i=1}^{m} S_i)/m$, $S_{\mathrm{pooled}} = \{(\sum_{i=1}^{m} S_i^2)/m\}^{1/2}$, 그리고 $\upsilon = m(n-1)$를 나타낸다. 여기서 S_i와 S_i^2은 각각 i번째 부그룹의 표본표준편차와 표본분산이다. $\hat{\sigma}_1$과 $\hat{\sigma}_2$은 각각 R 관리도와 S 관리도를 병행할 때 사용하는 추정량으로, 이 관리도들은 공정의 산포를 관리하기 위해 사용하고 있다. 또한 $\hat{\sigma}_3$은 관리도 소프트웨어에서 σ_0의 추정량으로 많이 사용하고 있다. 여기서 불편성을 만족시키기 위해 사용하는 상수 $d_2(\cdot)$과 $c_4(\cdot)$는 표본크기에 의존하는 상수로서 관리도와 관련된 여러 서적, 예를 들면 Montgomery (2013)에서 찾을 수 있다. 그러나 표본범위에 기반을 둔 추정량은 이상치가 발생했을 때 효율이 떨어지기 때문에 Mahmoud 등 (2010)은 추정량 $\hat{\sigma}_1$을 사용하는 것은 바람직하지 않다고 제언하였다.

σ_0에 대한 편향추정량으로는 다음을 고려할 수 있다.

$$\hat{\sigma}_4 = c_4(\upsilon + 1)\, S_{\mathrm{pooled}}, \quad \hat{\sigma}_5 = S_{\mathrm{pooled}}$$

Derman과 Ross (1995), Del Castillo (1996), 그리고 Chakraborti (2000)는 $\hat{\sigma}_5$의 사용을 제안한 바 있으며, Vardeman 등 (1999)과 Mahmoud 등 (2010)은 $\hat{\sigma}_4$와 같은 편향추정량의 효율이 불편추정량을 사

용하는 경우보다 더 좋다는 결과를 제시하였다. 또한 $\hat{\sigma}_2$는 표본표준편차들을 평균한 것 (averaging)에 기초한 추정량인데 반해, $\hat{\sigma}_3$, $\hat{\sigma}_4$, 그리고 $\hat{\sigma}_5$는 표본표준편차들을 합동한 것 (pooling)에 기초한 추정량이라는 특징이 있다.

3.2. AMRL과 SDMRL 계산

최근 들어 제1국면에서 서로 다른 표본을 사용함으로 발생하는 ARL의 산포를 측정하기 위해 AARL과 SDARL을 사용하고 있다. Saleh 등 (2015)은 AARL과 SDARL을 함께 고려하여 $\bar{X}$ 관리도에서 추정된 모수의 영향에 대한 연구를 수행하였다. AARL과 SDARL을 계산하기 위해 그들이 사용한 방법을 간략하게 기술하면 다음과 같다.

W_i는 μ_0와 σ_0가 알려져 있는 경우 표본평균을 표준화한 것으로

$$W_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

가 되고, $\widehat{W}_i$는 μ_0와 σ_0가 알려져 있지 않은 경우 추정량을 이용하여 표본평균을 표준화한 것으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\widehat{W}_i = \frac{\bar{X}_i - \hat{\mu}_0}{\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}}$$

이때 $\widehat{W}_i$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\widehat{W}_i = \frac{1}{Q}\left(\nu_i + \gamma - \frac{Z}{\sqrt{m}}\right)$$

여기서 $Q = \hat{\sigma}_0/\sigma_0$는 관리상태일 때 실제 표준편차에 대한 추정량의 비 (ratio)를 나타내고,

$$\nu_i = \frac{\bar{X}_i - (\mu_0 + \delta)}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

는 δ를 평균의 변화량이라 할 때 제2국면에서 표본평균을 표준화한 것이다. 또한 $\gamma = \delta/(\sigma_0/\sqrt{n})$는 평균의 변화를 표준화한 것이고,

$$Z = \frac{\hat{\mu}_0 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{mn}}$$

는 관리상태일 때 평균의 실제값과 추정량의 차이를 표준화한 것을 나타낸다.

ARL $= 1/p$이기 때문에 이상상태 신호의 확률 p를 $\hat{W}_i$를 이용하여 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p &= 1 - \Pr(-3 < \hat{W}_i < 3 \mid \hat{\mu}_0\,,\, \hat{\sigma}_0) \\ &= 1 - \Pr\left(-3 < \frac{1}{Q}\left(\nu_i + \gamma - \frac{Z}{\sqrt{m}}\right) < 3 \mid \hat{\mu}_0\,,\, \hat{\sigma}_0\right) \\ &= 1 - \Pr\left(-3Q - \gamma + \frac{Z}{\sqrt{m}} < \nu_i < 3Q - \gamma + \frac{Z}{\sqrt{m}} \mid \hat{\mu}_0\,,\, \hat{\sigma}_0\right) \\ &= 1 - \left\{\Phi\left(3Q - \gamma + \frac{Z}{\sqrt{m}} \mid \hat{\mu}_0\,,\, \hat{\sigma}_0\right) - \Phi\left(-3Q - \gamma + \frac{Z}{\sqrt{m}} \mid \hat{\mu}_0\,,\, \hat{\sigma}_0\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

이때 일반성을 잃지 않고 $\mu_0 = 0$이고 $\sigma_0/\sqrt{n} = 1$을 가정할 수 있으며, 공정이 관리상태일 경우 δ와 γ의 값은 모두 0이 된다.

위의 식을 이용하여 $\hat{\mu}_0$와 $\hat{\sigma}_0$이 주어진 경우 ARL을 계산할 수 있는데, 이 ARL은 확률변수 $\hat{\mu}_0$와 $\hat{\sigma}_0$, 즉 확률변수 Z와 Q의 함수가 된다. 따라서 ARL의 평균 AARL (= E(ARL))과 표준편차 SDARL은

$$\begin{aligned} E(\mathrm{ARL}) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathrm{ARL} \cdot g_Z(z) \cdot f_Q(q)\, dz dq \\ E(\mathrm{ARL}^2) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathrm{ARL}^2 \cdot g_Z(z) \cdot f_Q(q)\, dz dq \\ \mathrm{SDARL} &= \sqrt{E(\mathrm{ARL}^2) - \{E(\mathrm{ARL})\}^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

와 같이 계산할 수 있다. 이 식에서 $g_Z(z)$와 $f_Q(q)$는 각각 Z와 Q의 확률밀도함수인데, 확률변수 Z는 표준정규분포를 따르고 Q는 스케일된 χ분포 (scaled χ distribution)를 따른다. 확률변수 Q의 확률밀도함수 $f_Q(q)$에 대해서는 다음 절에서 상세하게 설명할 것이다.

다음으로 이 논문에서 중요한 측도로 사용하고자 하는 런길이의 중위수인 MRL을 고려해 보자. 런길이의 중위수 MRL은 모수가 p인 기하분포의 누적분포함수가 0.5가 되는 값이기 때문에

$$\mathrm{MRL} = -\frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$$

가 됨을 어렵지 않게 알 수 있다. 이때 이상상태 신호의 확률 p는 $\hat{\mu}_0$와 $\hat{\sigma}_0$이 주어진 경우 식 (3.1)을 이용하여 계산할 수가 있다. 참고로 $L = 3$인 경우 관리상태일 때의 MRL은 $p = 0.0027$을 대입해서 계산하면 약 256.37이 된다.

MRL의 평균 AMRL (= E(MRL))과 표준편차 SDMRL은 AARL과 SDARL의 경우와 유사하게 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} E(\mathrm{MRL}) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathrm{MRL} \cdot g_Z(z) \cdot f_Q(q)\, dz dq \\ E(\mathrm{MRL}^2) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathrm{MRL}^2 \cdot g_Z(z) \cdot f_Q(q)\, dz dq \\ \mathrm{SDMRL} &= \sqrt{E(\mathrm{MRL}^2) - \{E(\mathrm{MRL})\}^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.3. σ_0의 추정량에 따른 $f_Q(q)$

먼저 S_{pooled}에 기초한 추정량인 $\hat{\sigma}_3$, $\hat{\sigma}_4$, 그리고 $\hat{\sigma}_5$의 경우 $f_Q(q)$는 다음과 같이 쉽게 유도할 수 있다. 만일 $\hat{\sigma}_0 = c \cdot S_{\text{pooled}}$라 하면,

$$Q = \hat{\sigma}_0/\sigma_0 = c \cdot \sqrt{Y}$$

가 되는데, 여기서 $Y = S^2_{\text{pooled}} / \sigma_0^2$이고 Y의 분포는 $\upsilon = m(n-1)$에 대해 모수가 $\upsilon/2$와 $2/\upsilon$인 감마분포 (gamma distribution)를 따른다는 것을 유도할 수 있다. 따라서 Q의 확률밀도함수 $f_Q(q)$는 Y의 확률밀도함수 $f_Y(y)$를 이용하여

$$f_Q(q) = \frac{2q}{c^2} \cdot f_Y\left(\frac{q^2}{c^2}\right), \quad q > 0$$

으로 계산할 수 있다. 이때 $\hat{\sigma}_3$을 이용할 경우 상수 c는 $c = 1/c_4(\upsilon+1)$, $\hat{\sigma}_4$에서는 $c = c_4(\upsilon+1)$, 그리고 $\hat{\sigma}_5$에서는 $c = 1$이 된다.

$\hat{\sigma}_1$과 $\hat{\sigma}_2$를 이용할 경우, $f_Q(q)$의 정확한 분포는 유도하기가 쉽지 않다. Chen (1997)은 Patnaik (1950)의 접근법을 이용하여 다음과 같은 근사적 분포를 제안하였다. $M = E(Q)$이고 $V = Var(Q)$라 할 때,

$$K = \frac{V}{M^2}, \quad r = \left\{-2 + 2\sqrt{1+2K}\right\}^{-1}, \quad t = K + \frac{1}{16r^3}$$

이라 하자. 그러면 Q의 확률밀도함수 $f_Q(q)$는 근사적으로

$$f_Q(q) \approx \left(\frac{2}{s}\right) \frac{(u/2)^{u/2}}{\Gamma(u/2)} \left(\frac{q}{s}\right)^{u-1} \exp\left[-\frac{u}{2}\left(\frac{q}{s}\right)^2\right], \quad q > 0 \tag{3.4}$$

이 된다고 유도하였으며, 이때 u와 s는

$$u = \left\{-2 + 2\sqrt{1+2t}\,\right\}^{-1}, \quad s = M\left(1 + \frac{1}{4u} + \frac{1}{32u^2} - \frac{5}{128u^3}\right)$$

를 나타낸다.

$\hat{\sigma}_1$을 사용하는 경우

$$E(\hat{\sigma}_1) = \sigma_0, \quad Var(\hat{\sigma}_1) = \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \cdot \frac{\sigma_0^2}{m}$$

임을 이용하면

$$M = E(Q) = 1, \quad V = Var(Q) = \frac{d_3^2(n)}{d_2^2(n)} \cdot \frac{1}{m}$$

이 되기 때문에, 이를 식 (3.4)에 대입하여 $f_Q(q)$를 유도할 수 있다.

유사하게 $\hat{\sigma}_2$을 사용하는 경우

$$E(\hat{\sigma}_2) = \sigma_0, \quad Var(\hat{\sigma}_2) = \frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)} \cdot \frac{\sigma_0^2}{m}$$

임을 이용하면

$$M = E(Q) = 1, \quad V = Var(Q) = \frac{1 - c_4^2(n)}{c_4^2(n)} \cdot \frac{1}{m}$$

이 되기 때문에, $f_Q(q)$를 유도할 수 있다.

4. 모의실험

관리도를 의도한 바와 같이 올바르게 적용하기 위해서는 공정 모수가 실제값에 근접하도록 추정하는 것이 중요하다. 관리도의 성능을 평가하고 부그룹의 수 m을 결정하기 위한 기준으로 주로 AARL을 이용하는데, 일반적으로 AARL이 미리 설정한 목표값에 근접하도록 m을 결정하고 있다. 그러나 실제로 공정 모수를 추정할 때 실무자들마다 서로 다른 제1국면의 데이터를 이용함으로 인하여 산포가 발생하기 때문에 AARL뿐만 아니라 SDARL도 함께 고려하여 적절한 부그룹의 수 m을 결정해야 한다.

SDARL은 ARL의 표준편차를 의미하는 것으로 이 값이 작을수록 실무자에 따른 ARL값이 안정적임을 의미하지만, SDARL값이 작아지기 위해서는 필요한 부그룹의 수가 매우 커지는데 표본의 크기를 어떤 수준 이상으로 크게 하는 것은 현실적으로 불가능한 경우가 많다. 따라서 SDARL에 대해 기준을 정하는 것이 필요한데, Zhang 등 (2014)은 SDARL이 미리 설정한 관리상태에서의 ARL의 10% 이내에 있도록 부그룹의 수를 결정하는 기준을 제시하였다. 그러나 경우에 따라서는 이 기준을 충족시키기 위해서 아주 많은 양의 표본을 필요로 하는 경우도 있다.

이 절에서는 3절에서 설명한 계산방법을 이용해서 각 표준편차의 추정량과 부그룹의 수에 따른 $\bar{X}$ 관리도의 성능을 평가하고 비교하고자 한다. 먼저 런길이의 MRL을 이용하는 경우와 비교하기 위해서, Saleh 등 (2015)에서 연구한 AARL과 SDARL값을 식 (3.2)를 이용하여 계산하여 Table 4.1에 제시하였다. 관리한계의 상수는 $L = 3$, 표본크기는 $n = 5$, 그리고 부그룹의 수 m은 20, 50, 100, 300, 500, 600, 700, 800, 1000, 1200, 1300, 3000, 4500, 5000인 경우이다. 여기서 $m = \infty$인 경우는 공정 모수를 알고 있는 경우를 나타낸다. Saleh 등 (2015)의 결과와 아주 미세한 차이가 나는 이유는 그들은 AARL과 SDARL을 계산할 때 적분을 가우스 구적법(Gaussian quadrature)을 이용하여 계산했고, 이 논문에서는 R 프로그램의 적분함수 integrate()를 사용하여 계산했기 때문이다.

Table 4.1 In-control AARL and SDARL for each standard deviation estimator

m	AARL					SDARL				
	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_4$	$\hat{\sigma}_5$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_4$	$\hat{\sigma}_5$
20	453.50	445.16	436.89	408.41	422.36	544.31	511.84	480.65	440.94	460.30
50	394.64	391.95	389.14	379.38	384.22	233.98	225.87	217.39	210.77	214.05
100	380.92	379.65	378.29	373.60	375.94	149.00	144.77	140.24	138.15	139.19
300	373.51	373.10	372.66	371.12	371.89	80.67	78.69	76.52	76.14	76.33
500	372.21	371.97	371.71	370.79	371.25	61.72	60.25	58.63	58.45	58.54
600	371.90	371.70	371.48	370.71	371.10	56.17	54.84	53.37	53.24	53.31
700	371.68	371.50	371.32	370.66	370.99	51.89	50.67	49.32	49.21	49.27
800	371.52	371.36	371.20	370.63	370.91	48.46	47.32	46.07	45.98	46.02
1000	371.29	371.16	371.03	370.58	370.80	43.24	42.23	41.12	41.06	41.09
1200	371.14	371.03	370.92	370.54	370.73	39.42	38.50	37.49	37.44	37.46
1300	371.08	370.98	370.88	370.53	370.71	37.85	36.97	36.00	35.96	35.98
3000	370.69	370.65	370.61	370.45	370.53	24.82	24.24	23.61	23.60	23.61
4500	370.59	370.57	370.54	370.43	370.49	20.24	19.78	19.26	19.26	19.26
5000	370.57	370.55	370.52	370.43	370.48	19.20	18.76	18.27	18.26	18.27
∞			370.40					0		

먼저 Table 4.1의 AARL값을 살펴보면 주어진 m값에 대해 $\hat{\sigma}_4$을 사용하는 경우 목표값인 370.4에 가장 가까우며, $\hat{\sigma}_1$을 사용하는 경우가 제일 좋지 않음을 알 수 있다. SDARL값에 대해서도 $\hat{\sigma}_4$의 경우가 변동이 가장 작고 $\hat{\sigma}_1$의 경우가 변동이 가장 큰 것을 알 수 있다. 당연한 결과이지만, 표본의 수 m이 점점 커질수록 추정량에 따른 차이는 점점 작아진다. Table 4.1에서 AARL을 사용하여 적절한 부그룹의 수를 결정할 때 약 $m = 500$을 사용하면 AARL의 값이 목표값인 370.4에 근접한다고 할 수 있지만, SDARL을 동시에 고려하여 Zhang 등 (2014)이 제시한 기준인 10% 이내를 충족하기 위해서는 약 $m = 1200$을 사용해야 한다. 이것은 $1200 \times 5 = 6000$개의 제1국면의 데이터를 사용해야 한다는 것으로 현실적으로 쉽지 않을 수 있다.

이제 이 논문에서 주된 측도로 제안하는 MRL을 이용하여 모수 추정을 영향력을 살펴보자. Table 4.1의 경우와 동일한 조건을 가정하고 MRL의 평균 AMRL과 표준편차 SDMRL을 식 (3.3)을 이용하여 계산하여 Table 4.2에 제시하였다.

Table 4.2 n-control AMRL and SDMRL for each standard deviation estimator

m	AMRL					SDMRL				
	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_4$	$\hat{\sigma}_5$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_4$	$\hat{\sigma}_5$
20	313.99	308.21	302.48	282.74	292.41	377.28	354.78	333.16	305.64	319.06
50	273.20	271.33	269.39	262.62	265.98	162.18	156.56	150.68	146.10	148.37
100	263.69	262.80	261.87	258.61	260.23	103.28	100.35	97.21	95.76	96.48
300	258.55	258.27	257.96	256.90	257.43	55.92	54.54	53.04	52.78	52.91
500	257.65	257.48	257.30	256.66	256.98	42.78	41.76	40.64	40.52	40.58
600	257.44	257.29	257.14	256.61	256.88	38.94	38.01	36.99	36.90	36.95
700	257.28	257.16	257.03	256.58	256.80	35.97	35.12	34.18	34.11	34.15
800	257.17	257.06	256.95	256.55	256.75	33.59	32.80	31.93	31.87	31.90
1000	257.01	256.93	256.83	256.52	256.68	29.98	29.27	28.50	28.46	28.48
1200	256.91	256.83	256.76	256.49	256.63	27.32	26.69	25.98	25.95	25.97
1300	256.87	256.80	256.73	256.49	256.61	26.23	25.62	24.95	24.92	24.94
3000	256.60	256.57	256.54	256.43	256.48	17.20	16.80	16.37	16.36	16.36
4500	256.53	256.51	256.49	256.42	256.45	14.03	13.71	13.35	13.35	13.35
5000	256.51	256.50	256.48	256.42	256.45	13.31	13.00	12.66	12.66	12.66
∞			256.37					0		

ARL에 대한 결과인 Table 4.1과 MRL에 대한 결과인 Table 4.2를 비교하면, 각 표준편차의 추정량에 따른 AMRL과 SDMRL은 AARL과 SDARL에서 나타난 결과와 그 경향이 대체로 비슷한 것을 알

수 있다. 즉, $\hat{\sigma}_1$과 $\hat{\sigma}_2$ 보다 $\hat{\sigma}_3$, $\hat{\sigma}_4$, $\hat{\sigma}_5$을 추정량으로 사용할 경우 더 좋은 결과를 얻을 수 있는데, 이 중에서도 $\hat{\sigma}_4$을 사용할 때 실무자간 변동이 가장 작은 것을 볼 수 있다. ARL을 이용할 때와 마찬가지로 이러한 추정량에 따른 차이는 부그룹의 수 m이 커질수록 점점 작아진다. Zhang 등 (2014)이 제시한 기준을 MRL에 대해 적용하면, 즉 SDMRL이 관리상태의 MRL의 10% 이내를 충족하기 위해서는 대략적으로 1200에서 1300개의 표본 수가 필요함을 알 수 있다. SDMRL 측면에서 가장 바람직하지 않은 추정량은 $\hat{\sigma}_1$인데, 이것은 Mahmoud 등 (2010)이 $\hat{\sigma}_1$은 사용하지 말 것을 권유한 내용과 동일한 결과를 나타낸다.

Table 4.3, Table 4.4, Table 4.5는 σ_0의 추정량으로 각각 $\hat{\sigma}_3$, $\hat{\sigma}_4$, $\hat{\sigma}_5$를 사용했을 때, 여러 가지 설정된 MRL_0 값에 대한 AMRL과 SDMRL 값을 계산한 결과이다. 이때 표본크기는 $n = 5$, 그리고 부그룹의 수인 m은 30, 50, 100, 500, 600, 700,1000, 1100, 1200, 1300, 1400의 경우를 고려하였다. 설정한 7가지 MRL_0 값은 일반적으로 목표값으로 많이 사용하는 ARL_0가 50, 100, 200, 300, 370.4, 400, 500인 경우에 해당하는 MRL_0의 값이다.

$\hat{\sigma}_3$을 사용한 Table 4.3을 살펴보면, 설정한 MRL_0의 값이 커질수록 평균적으로 이를 달성하기 위해, 즉 AMRL이 설정한 값에 근접하기 위해 필요한 부그룹의 수가 커지는 것을 알 수 있다. 또한 SDMRL을 고려해도 유사한 결과를 얻을 수 있다. 예를 들어 SDMRL이 MRL_0의 10% 이내가 되기 위해 필요한 부그룹의 수를 대략적으로 살펴보면, MRL_0=34.31인 경우 $m = 500$, MRL_0=68.97인 경우 $m = 700$, MRL_0=256.37인 경우 $m = 1200$으로 나타났다. 대략적으로 MRL_0의 10% 이내가 되는 SDMRL 값을 볼드체로 표시하였다. σ_0의 추정량으로 $\hat{\sigma}_4$와 $\hat{\sigma}_5$를 사용한 Table 4.4와 Table 4.5에서도 유사한 경향이 나타남을 알 수 있다.

Table 4.3 In-control AMRL and SDMRL values for several different desired values of MRL_0 (when $\hat{\sigma}_3$ is used)

	Desired MRL_0=34.31 L=2.327		Desired MRL_0=68.97 L=2.576		Desired MRL_0=138.28 L=2.807		Desired MRL_0=207.60 L=2.935	
m	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL
30	34.50	15.57	70.94	39.45	146.81	98.88	225.36	168.80
50	34.33	11.50	69.83	28.45	142.42	69.10	216.41	115.42
100	34.30	7.87	69.27	19.14	139.93	45.56	211.18	75.05
500	34.35	**3.43**	69.03	8.25	138.52	19.34	208.07	31.55
600	34.35	3.13	69.02	7.52	138.48	17.62	207.96	28.73
700	34.35	2.89	69.02	**6.95**	138.45	16.29	207.89	26.55
1000	34.36	2.42	69.01	5.80	138.39	**13.59**	207.76	22.14
1100	34.36	2.30	69.01	5.53	138.38	12.95	207.73	21.10
1200	34.36	2.20	69.01	5.29	138.37	12.39	207.71	**20.19**
1300	34.36	2.12	69.01	5.08	138.36	11.90	207.69	19.39
1400	34.36	2.04	69.01	4.90	138.35	11.46	207.67	18.67
∞	34.37	0	69.00	0	138.26	0	207.46	0

	Desired MRL_0=256.37 L=3.000		Desired MRL_0=276.91 L=3.023		Desired MRL_0=346.23 L=3.090	
m	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL
30	282.17	223.13	305.90	246.59	388.40	331.23
50	269.39	150.68	291.40	165.76	367.52	219.52
100	261.87	97.21	282.86	106.62	355.15	139.92
500	257.30	40.64	277.64	44.48	347.50	58.01
600	257.14	36.99	277.46	40.49	347.24	52.79
700	257.03	34.18	277.33	37.41	347.05	48.77
1000	256.83	28.50	277.11	31.19	346.71	40.65
1100	256.79	27.16	277.06	29.72	346.64	38.72
1200	256.76	**25.98**	277.02	28.43	346.58	37.05
1300	256.73	24.95	276.99	**27.30**	346.53	35.57
1400	256.71	24.03	276.96	26.30	346.49	**34.26**
∞	256.37	0	276.60	0	345.96	0

Table 4.4 In-control AMRL and SDMRL values for several different desired values of MRL_0 (when $\hat{\sigma}_4$ is used)

	Desired MRL_0=34.31 L=2.327		Desired MRL_0=68.97 L=2.576		Desired MRL_0=138.28 L=2.807		Desired MRL_0=207.60 L=2.935	
m	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL
30	33.59	15.03	68.69	37.86	141.32	94.27	216.17	160.28
50	33.79	11.27	68.51	27.77	139.27	67.21	211.19	112.03
100	34.03	7.79	68.62	18.92	138.40	44.95	208.66	73.97
500	34.29	3.42	68.90	8.23	138.22	19.29	207.58	31.46
600	34.30	3.12	68.91	7.50	138.23	17.58	207.55	28.66
700	34.31	2.89	68.93	6.94	138.23	16.26	207.54	26.49
1000	34.33	2.41	68.95	5.80	138.24	13.57	207.51	22.11
1100	34.33	2.30	68.95	5.53	138.24	12.93	207.51	21.07
1200	34.34	2.20	68.96	5.29	138.24	12.38	207.50	20.16
1300	34.34	2.12	68.96	5.08	138.24	11.89	207.50	19.36
1400	34.34	2.04	68.96	4.89	138.25	11.45	207.50	18.65
∞	34.37	0	69.00	0	138.26	0	207.46	0

	Desired MRL_0=256.37 L=3.000		Desired MRL_0=276.91 L=3.023		Desired MRL_0=346.23 L=3.090	
m	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL
30	270.16	211.42	292.69	233.47	370.88	312.89
50	262.62	146.10	283.97	160.65	357.74	212.48
100	258.61	95.76	279.29	105.01	350.48	137.73
500	256.66	40.52	276.95	44.35	346.60	57.83
600	256.61	36.90	276.88	40.39	346.48	52.66
700	256.58	34.11	276.84	37.33	346.40	48.66
1000	256.52	28.46	276.76	31.14	346.26	40.58
1100	256.50	27.12	276.74	29.68	346.23	38.67
1200	256.49	25.95	276.73	28.40	346.21	37.00
1300	256.49	24.92	276.72	27.27	346.19	35.53
1400	256.48	24.01	276.71	26.27	346.17	34.23
∞	256.37	0	276.60	0	345.96	0

Table 4.5 In-control AMRL and SDMRL values for several different desired values of MRL_0 (when $\hat{\sigma}_5$ is used)

	Desired MRL_0=34.31 L=2.327		Desired MRL_0=68.97 L=2.576		Desired MRL_0=138.28 L=2.807		Desired MRL_0=207.60 L=2.935	
m	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL
30	34.04	15.30	69.80	38.65	144.03	96.54	220.70	164.48
50	34.06	11.39	69.16	28.11	140.84	68.15	213.78	113.71
100	34.16	7.83	68.94	19.03	139.16	45.26	209.92	74.51
500	34.32	3.42	68.96	8.24	138.37	19.32	207.82	31.50
600	34.33	3.12	68.97	7.51	138.35	17.60	207.76	28.69
700	34.33	2.89	68.97	6.94	138.34	16.27	207.71	26.52
1000	34.34	2.41	68.98	5.80	138.31	13.58	207.63	22.13
1100	34.35	2.30	68.98	5.53	138.31	12.94	207.62	21.08
1200	34.35	2.20	68.98	5.29	138.31	12.39	207.60	20.17
1300	34.35	2.12	68.98	5.08	138.30	11.90	207.59	19.37
1400	34.35	2.04	68.99	4.90	138.30	11.46	207.58	18.66
∞	34.37	0	69.00	0	138.26	0	207.46	0

	Desired MRL_0=256.37 L=3.000		Desired MRL_0=276.91 L=3.023		Desired MRL_0=346.23 L=3.090	
m	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL	AMRL	SDMRL
30	276.09	217.19	299.21	239.93	379.52	321.91
50	265.98	148.37	287.66	163.18	362.59	215.97
100	260.23	96.48	281.07	105.81	352.81	138.82
500	256.98	40.58	277.29	44.41	347.05	57.92
600	256.88	36.95	277.17	40.44	346.86	52.73
700	256.80	34.15	277.08	37.37	346.72	48.72
1000	256.68	28.48	276.93	31.17	346.48	40.61
1100	256.65	27.14	276.90	29.70	346.43	38.70
1200	256.63	25.97	276.87	28.41	346.39	37.03
1300	256.61	24.94	276.85	27.29	346.36	35.55
1400	256.59	24.02	276.83	26.28	346.33	34.24
∞	256.37	0	276.60	0	345.96	0

5. 결론

Saleh 등 (2015)은 실제 공정에서 가장 많이 사용하는 Shewhart의 $\bar{X}$ 관리도에서 추정된 모수의 영향을 AARL과 SDARL이란 측도를 사용하여 살펴보았다. 그들은 관리상태에서의 평균에 대한 추정량은 전체 표본평균을 사용하였고, 표준편차에 대한 추정량은 3가지 불편추정량과 2가지 편향추정량을 사용하여 그 결과를 비교하였다. 이 논문에서는 Saleh 등 (2015)과 동일한 설정을 했지만, 모수 추정의 영향을 판단하는 측도로 AMRL과 SDMRL을 사용하였다. 런길이의 분포가 한쪽으로 많이 치우친 경우 평균보다 중위수가 좋은 대푯값이 될 수 있기 때문에, 런길이의 중위수인 MRL을 사용하여 관리도의 성능을 평가하는 것은 의미있는 작업이라고 판단된다.

AMRL과 SDMRL을 사용하여 5가지 표준편차의 추정량에 대한 모수 추정의 영향을 비교한 결과, AARL과 SDARL을 사용한 Saleh 등 (2015)의 경우와 그 경향이 유사함을 알 수 있었다. 모의실험의 결과를 간단하게 요약하면, SDMRL값을 작게 유지하려면 이제까지 일반적으로 권장된 부그룹의 수 보다 더 큰 부그룹이 필요하며, 편향추정량인 $\hat{\sigma}_4$을 사용하는 것이 AMRL과 SDMRL 측면에서 가장 효율적임을 알 수 있었다. 또한 미리 설정한 관리상태에서의 MRL값이 커질수록 더 큰 부그룹이 필요하다는 것이다. 표본표준편차들을 평균한 것에 기초한 추정량보다 합동한 것에 기초한 추정량의 효율이 더 좋은 것은 이전 연구에서도 언급되었는데, 편향추정량인 $\hat{\sigma}_4$의 효율이 가장 좋은 것에 대해서는 추가적인 연구가 필요하다고 생각된다. 또한 향후 $\bar{X}$ 관리도 이외에 다른 관리도에서 MRL을 사용하여 관리도의 성능을 평가하는 것에 대한 연구를 진행할 예정이다.

References

Aly, A. A., Saleh, N. A., Mahmoud, M. A. and Woodall, W. H. (2015). A reevaluation of the adaptive exponentially weighted moving average control chart when parameters are estimated. *Quality and Reliability Engineering International*, **31**, 1611-1622.

Bischak, D. P. and Trietsch, D. (2007). The rate of false signals in charts with estimated limits. *Journal of Quality Technology*, **39**, 54-65.

Castagliola, P., Zhang, Y., Costa, A. and Maravelakis, P. (2012). The variable sample size $\bar{X}$ chart with estimated parameters. *Quality and Reliability Engineering International*, **28**, 687-699.

Chakraborti, S. (2000). Run length, average run length and false alarm rate of Shewhart X-bar chart: Exact derivations by conditioning. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **29**, 61-81.

Chakraborti, S. (2006). Parameter estimation and design considerations in prospective applications of the $\bar{X}$-Chart. *Journal of Applied Statistics*, **33**, 439-459.

Chen, G. (1997). The mean and standard deviation of the run length distribution of $\bar{X}$ charts when control limits are estimated. *Statistica Sinica*, **7**, 789-798.

Das, N. (2009). A comparison study of three non-parametric control charts to detect shift in location parameters. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **41** 799-807.

Del Castillo, E. (1996). Run length distribution and economic design of charts with unknown process variance. *Metrika*, **43**, 189-201.

Derman, C. and Ross, S. (1995). An improved estimator of in quality control. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **9**, 411-415.

Faraz, A., Woodall, W. H. and Heuchenne, C. (2015). Guaranteed conditional performance of the control chart with estimated parameters. *International Journal of Production Research*, **53**, 4405-4413.

Gan, F. F. (1993). An optimal design of EWMA control charts based on median run length. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **45**, 169-184.

Ghosh, B. K., Reynolds, M. R., Jr. and Hui, Y. V. (1981). Shewhart $\bar{X}$-charts with estimated process variance. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **10**, 1797-1822.

Golosnoy, V. and Schmid, W. (2007). EWMA control charts for monitoring optimal portfolio weights. *Sequential Analysis*, **26**, 195-224.

Jones, L. A., Champ, C. W. and Rigdon, S. E. (2001). The performance of exponentially weighted moving average charts with estimated parameters. *Technometrics*, **43**, 156-167.

Jones, M. A. and Steiner, S. H. (2012). Assessing the effect of estimation error on the risk-adjusted CUSUM chart performance. *International Journal for Quality in Health Care*, **24**, 176-181.

Khoo, M. B. C., Wong, V. H., Wu, Z. and Castagliola, P. (2012). Optimal design of the synthetic chart for the process mean based on median run length. *IIE Transactions*, **44**, 765-779.

Lee, J., Wang, N., Xu, L., Schuh, A. and Woodall, W. H. (2013). The effect of parameter estimation on upper-sided Bernoulli cumulative sum charts. *Quality and Reliability Engineering International*, **29**, 639-651.

Low, C. K., Khoo, M. B. C., Teoh, W. L. and Wu, Z. (2012). The revised m-of-k runs rule based on median run length. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **41**, 1463-1477.

Mahmoud, M. A., Henderson, G. R., Epprecht, E. K. and Woodall, W. H. (2010). Estimating the standard deviation in quality control application. *Journal of Quality Technology*, **42**, 348-357.

Montgomery, D. C. (2013). *Statistical quality control: A modern introduction*, 7th Ed., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ.

Patnaik, P. B. (1950). The use of mean range as an estimator of variance in statistical tests. *Biometrika*, **37**, 78-87.

Quesenberry, C. P. (1993). The effect of sample size on estimated limits for $\bar{X}$ and X control charts. *Journal of Quality Technology*, **25**, 237-247.

Saleh, N. A., Mahmoud, M. A., Keefe, M. A. and Woodall, W. H. (2015). The difficulty in designing Shewhart $\bar{X}$ and X control charts with estimated parameters. *Journal of Quality Technology*, **47**, 127-138

Vardeman, S. B. (1999). A brief tutorial on the estimation of the process standard deviation. *IIE Transactions*, **31**, 503-507.

Zhang, M., Megahed, F. M., and Woodall, W. H. (2014). Exponential CUSUM charts with estimated control limits. *Quality and Reliability Engineering International*, **30**, 275-286.

Zhang, M, Peng, Y., Schuh, A., Megahed, F. M. and Woodall, W. H. (2013). Geometric charts with estimated control limits. *Quality and Reliability Engineering International*, **29**, 209-223.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2016, **27**(6), 1487–1498

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2016.27.6.1487
한국데이터정보과학회지

The effect of parameter estimation on $\bar{X}$ charts based on the median run length[†]

Yoojin Lee[1] · Jaeheon Lee[2]

[12]Department of Applied Statistics, Chung-Ang University

Received 23 September 2016, revised 19 October 2016, accepted 25 October 2016

Abstract

In monitoring a process, in-control process parameters must be estimated from the Phase I data. When we design the control chart based on the estimated process parameters, the control limits are usually chosen to satisfy a specific in-control average run length (ARL). However, as the run length distribution is skewed when the process is either in-control or out-of-control, the median run length (MRL) can be used as alternative measure instead of the ARL. In this paper, we evaluate the performance of Shewhart $\bar{X}$ chart with estimated parameters in terms of the average of median run length (AMRL) and the standard deviation of MRL (SDMRL) metrics. In simulation study, the grand sample mean is used as a process mean estimator, and several competing process standard deviation estimators are used to evaluate the in-control performance for various amounts of Phase I data.

Keywords: Median run length, Phase I, process parameter, $\bar{X}$ control chart.

† This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (NRF-2014R1A1A2054200).
1 Graduate student, Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, Seoul 06974, Korea.
2 Corresponding author: Professor, Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, Seoul 06974, Korea. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr