

비선형 진동 기본 개념 및 물리시스템에서의 거동특성

윤종윤
(공주대학교)

1. 머리말

비선형 진동(nonlinear vibration) 또는 비선형 동역학(nonlinear dynamics)은 수세기 동안 이론적으로 많은 발전을 해왔으나, 그 이론적인 수준에 비하여 실제 기계시스템의 동역학적 메커니즘이나 비선형성으로부터 야기되는 진동을 저감하기 위한 활용적인 측면에서는 아직까지도 이론과 실제 간의 간격은 크다고 할 수 있다. 따라서, 이번 강좌에서는 비선형진동에 대한 기본적인 개념을 이해하고, 물리시스템 중 자동차 트라이브라인에서 찾아 볼 수 있는 비선형 특성과 해석모델을 소개함으로써, 비선형 진동에 대한 독자 여러분의 이해를 돕고 향후 야기되는 여러 가지 비선형 거동특성이나 진동현상에 대한 연구와 관심을 고조하고자 한다.

2. 비선형진동 개념에 대한 이해

비선형 진동이란, 시스템의 여러 가지 진동 현상 중에서, 선형성을 제외한 모든 거동 특성에서

나타나는 현상이라 할 수 있다. 일반적으로 수학적 이론에서는 어느 임의의 상수와 함수가 있을 때, 이들의 관계가 두 개 함수의 합과 상수의 곱으로 표현이 되면 선형성이 있다고 판정하고, 그렇지 못할 경우는 비선형 함수로 구분한다. 예를 들면, $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ 와 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 의 상관관계가 성립하면 선형함수이고, 이를 만족하지 못하면 비선형 함수로 구분한다. 더불어, 시스템의 비선형 특성을 논할 때, 가장 대표적으로 다루는 상미분방정식으로는 Duffing 방정식이 있다. 예를 들면, $\ddot{x}(t) + \zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) + \beta(x(t))^3 = F\cos(\omega t)$ 와 같은 상미분방정식이 있다고 하자. 이와 같은 형태의 상미분방정식은 $\ddot{x}(t) + \zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = F\cos(\omega t)$ 로 이루어진 선형성이 $\beta(x(t))^3$ 항에 의해 비선형성을 가지게 되는데, 이런 특성을 가지는 시스템의 거동특성을 해석적으로 풀어보면, 그림 1과 같은 형태의 주파수 응답특선 곡선을 얻을 수 있다. 그림에서 보는 바와 같이, 주파수 응답특선곡선은 일반 선형미분방정식으로부터 얻어지는 곡선과는 다르게 공진 주파수 영역에서 좌측이나 우측으로 휘

기초강좌

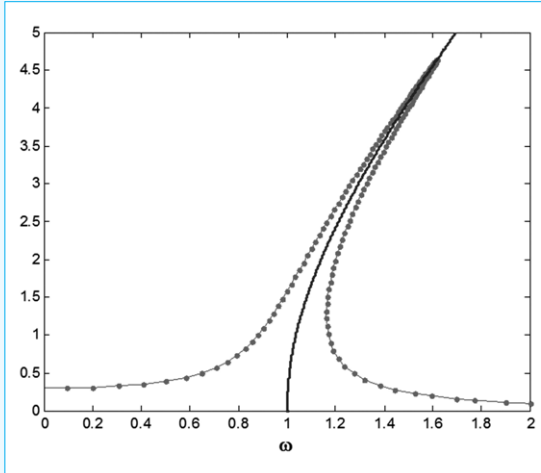


그림 1 백본(backbone)곡선을 포함한 비선형 주파수 응답특성 곡선

어진 형태의 응답특성을 보인다⁽¹⁾. 그림 1에서 파란색 실선으로 나타낸 선은 backbone 곡선으로서, 주어진 시스템의 댐핑 값에 따라서 응답곡선의 최대값을 예측하거나 비선형 공진주파수 영역을 추측할 수 있는 경로가 되겠다. 이와 같은 이론상의 비선형성은 일반적인 시스템의 거동 현상에서는 어떻게 구분할 수 있을까? 시스템의 거동 특성이 비선형성을 나타내는지 알아보는 가장 쉬운 방법은, 특정 시스템에 대해 기본이 되는 한 개의 하모닉(harmonic)성분을 가진 Sine 이나 Cosine 형태의 주기함수로 가진 시켜보면: (1) 선형시스템의 경우, 한 개의 하모닉 성분을 갖는 시스템 응답 특성이 관측되나; (2) 비선형 시스템의 경우, 두 개 이상의 하모닉 성분을 갖는 응답 특성을 나타낸다. 또 다른 하나의 비선형성은 주파수 응답 특성 곡선(FRFs, frequency response functions)에서도 나타나는데, 앞서 언급한 Duffing 방정식에서처럼 비선형 FRFs의 가장 대표적인 형태는 고유 진동수 영역에서 특성곡선이 좌측이나 우측으로 휘어지는 현상을 보이며, 이 영역에서 시스템의 응답 특성이 점핑 현

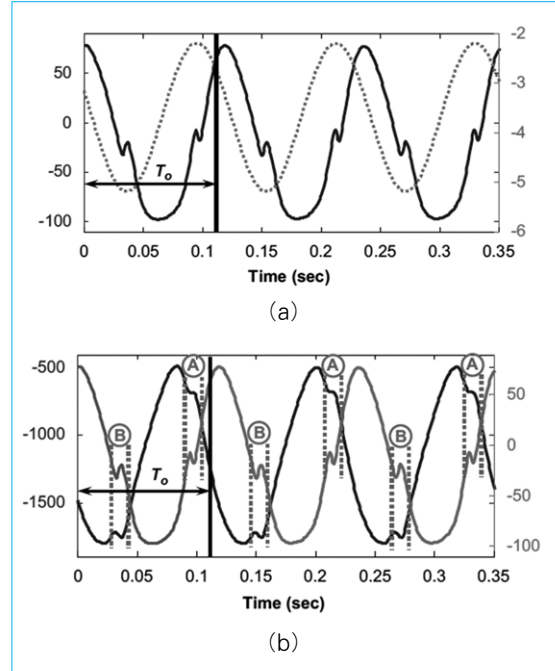


그림 2 선형/비선형 거동 특성에 대한 비교 및 예

상(jumping phenomena)을 보인다는 특징이 있다. 이 점핑 현상에 대해서는 드라이브라인의 거동 특성과 관련하여 다음 섹션에서 자세히 소개하기로 하고, 시간 영역에서 구분할 수 있는 비선형 진동 현상에 대한 예를 살펴보자.

그림 2는 특정 시스템의 응답특성을 계측하여 시간의 영역에서 살펴 본 데이터이다. 그림 2(a)는 두 개의 주기함수를 비교하고 있다. 여기서, 점선으로 표시된 선은 주어진 시스템을 외부에서 가진한 주기함수를 나타내고 있는데, 순수한 한 개의 하모닉 성분을 가지고 있는 주기함수임을 알 수 있다. 실선은 외부 가진에 따른 시스템의 응답 특성을 나타내고 있는 계측치로서 T_0 로 표시한 한 개의 주기 동안의 응답특성을 살펴보면, 한 개 이상의 하모닉 성분을 가지고 있음을 알 수 있다. 이와 같이 일정 주기 이내에 여러 개의 하모닉 성분이 나타나는 현상의 경우, 초조화

성분(super-harmonics)을 갖는다고 한다. 그림 2(b)는 두 개의 서로 다른 시스템 응답특성에서 나타나는 초조화 성분으로 기인하는 효과를 보여주고 있다. 여기서, ㉔와 ㉕로 표시된 부분을 보면, 순수한 조화함수의 파형에 보다 더 주기가 짧은 파형이 더해진 특성을 살펴 볼 수 있다. 즉, 주파수는 주기의 역수이기 때문에, 시스템의 가진 함수가 가지는 기본주기 T_0 보다 더 짧은 주기를 나타내고 있으므로, 고주파수 성분이 혼재해 있음을 알 수 있다. 이와 같은 고주파수 성분은 앞에서 설명한 초조화성분(super-Harmonic term)으로부터 기인하게 된다.

그림 2에서 살펴본 바와 같이, 선형 시스템에서는 찾아 볼 수 없는 시스템의 비선형 응답특성이 주어진 시스템의 고유 진동수(또는 그 영역)와 일치하게 되면, 예측치 못한 진동 문제가 발생하게 된다. 이런 비선형 진동 현상은 선형시스템을 기반으로 하는 단순 모달 테스트(modal test)나 선형해석으로는 그 한계가 있기 마련이다. 이와 같은 비선형 진동 현상을 관측하고 해석하기 위해서는, 첫째, 실험적으로는 대부분의 진동분야에서 실시하는 주파수응답특성곡선 분석법 이외에 시간영역에서의 주기별 응답 특성에 대한 분석이 요구되며, 둘째, 해석모델에서는 해석의 신뢰성을 높이기 위해 비선형거동 특성을 정의해 줄 수 있는 그에 최적화된 수학적모델 수립이 선행되어야 한다. 이상으로 비선형 진동에 대한 기본적인 개념과 시스템의 비선형성이 나타나는 예로부터 기본적인 주기함수와의 차이점에 대해 알아보았는데, 이와 같은 비선형 진동 현상은 실제 시스템에서 어떠한 형태로 나타나는지에 대해, 차량 시스템의 구동을 담당하는 드라이브라인(driveline)의 예를 가지고 비선형이 일어나는 주요 원인과 이로부터 야기되는 비선형 특성에 대해 알아보자.

3. 드라이브라인 내 비선형진동 현상에 대한 예

그림 3은 전륜구동형 차량 시스템의 드라이브라인의 개요도와 이 시스템의 구동메커니즘을 바탕으로 나타낸 물체도이다⁽²⁻⁵⁾. 그림 3(a)는 전륜구동 시스템의 각각의 구성품들을 강체시스템(lumped parameter system)으로 가정하여, 각각의 등가 관성치(Inertia value)를 계산하여 묘사하고 있으며, 여기서 f_n 은 엔진과 트랜스미션 사이에서 발생하는 클러치 토크(clutch torque)를 나타내고 있다. I_{ic} 로 나타낸 기어트랜스미션 내부에는 각각의 기어쌍이 맞물려서 구동하고 있다. 그림 3(b)에 묘사한 바와 같이 물체도는 강체시스템모델을 바탕으로 본래 시스템과 같은 특성을 유지하고 있는 6자유도계 축소 모델로 유도할 수 있다⁽³⁾. 그림 3(b)에 표시한 (A)와 (B)는 주어진 드라이브라인 모델 내에 존재하는 대표적인 비선형 요소를 나타내고 있다. 여기서, (A)는 단단계의 형태로 이루어진 클러치 스프링 및 클러치 거동시 나타내는 마찰력(hysteresis)을 묘사하고 있다. (B)는 기어와 기어 사이에 존재는 간극 즉 백래쉬(backlash)를 표현하고 있는데, 이와 같이 두 개의 기계요소 사이에 존재하는 간극은 시스템의 거동시 기어쌍의 접촉/이탈의 반복적인 현상 또는 맞물리는 기어치 숫자에 따라서 여러 가지 비선형 진동 현상을 야기 시키며, 이로 인한 방사소음이 유발하게 된다. 따라서, 드라이브라인 내 기계요소 (A)는 엔진으로부터 트랜스미션으로 유입되는 엔진토크의 진동을 비선형적으로 감쇠하고 있다면, 기계요소 (B)는 (A)로부터 유입되는 토크의 영향을 받아 비선형 응답특성을 나타내는 부분이 되겠다.

그림 4는 그림 3에서 나타난 주요 비선형 기계요소들의 거동특성 및 구성부품에 대해 묘사하고 있다. 그림 4(a)는 차량시스템에 장착되는 클

기초강좌

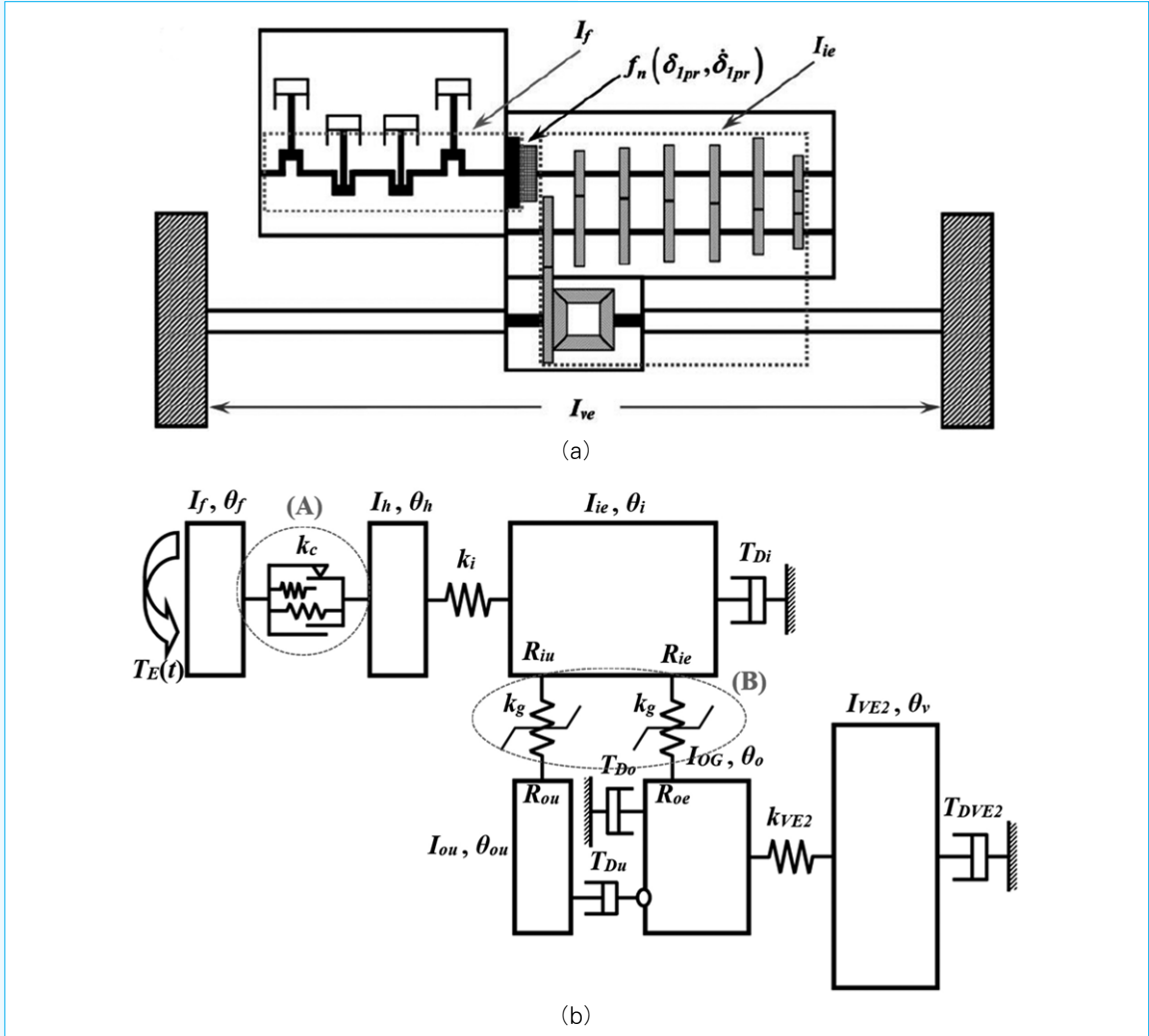


그림 3 드라이브라인 시스템 및 6자유도계 단순물체도

러치 시스템 단면도이다. 일반적으로 클러치는 엔진으로부터 하부시스템으로 전달되는 토크의 진동을 감쇠하거나 토크의 전달을 단락 및 연결하는 역할을 하는 주요 시스템 중의 하나이다. 그림에 나타난 바와 같이 클러치 시스템은 엔진의 토크 범위에 따라 여러 단계의 스프링이 엔진으로부터 하부 시스템으로 유입되는 진동을 감쇠하는 역할을 수행한다. 그림 4(b)는 클러치가 갖

는 특정 유형의 클러치 토크 프로파일과 클러치 토크를 구성하는 각각의 구성 성분을 도시하고 있다. 즉, 그림 4(b)의 (A)는 일반적으로 실험이나 주어진 클러치 특성 프로파일로부터 얻을 수 있는 클러치 토크 허용값을 나타낸 선도로서, 시스템 거동 시 엔진의 감/가속 정도에 따라 주어진 클러치 토크 선도내의 특정 범위에서 클러치 토크가 형성되게 된다. 그림 4(b)의 (B)는 클러치 내

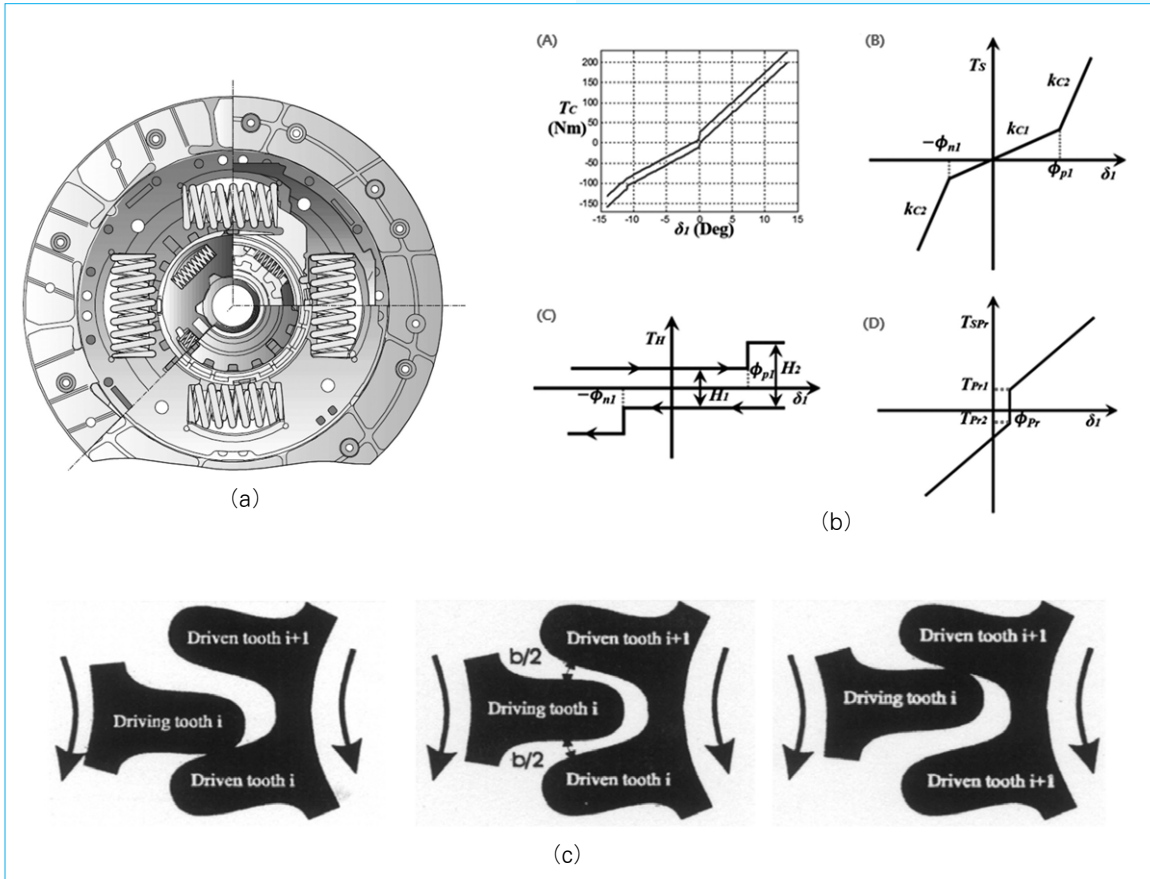


그림 4 클러치 시스템 및 비선형 기어 거동특성

의 스프링 작용에 의해 형성되는 클러치 토크 선도이며, (C)는 클러치 스프링 거동 시 연동되어 일어나는 마찰력(hysteresis) 선도이며, (D)는 pre-load에 의해 형성되는 클러치 토크 값을 묘사하고 있다⁽²⁻⁵⁾. 그림 4(c)는 엔진으로부터 유입되는 폭발행정의 영향으로 인해 가진되는 비선형 기어 거동 특성을 나타내고 있는데, 이와 같이 엔진의 폭발로 인해 기어쌍이 일정한 회전흐름을 갖지 못하고 서로 접촉과 이탈을 반복하는 충격형 진동 현상을 나타내게 된다. 이와 같은 현상을 기어래틀(gear rattle)이라고 하는데, 이와 같은 현상을 실험적으로 규명하고 해석적으로 정의하기

위해서는 이에 부합하는 실험 방법과 신뢰성 있는 해석 모델이 뒷받침 되어야 한다⁽³⁻⁵⁾.

그림 3과 4에서 묘사한 시스템과 같이 비선형성을 갖는 드라이브라인 모델을 해석하게 되면, 선형해석 결과와는 다른 양상을 관찰할 수 있다. 그림 5(a)는 그림 3(b)의 6자유도계 모델 중, 플라이휠(flywheel)과 다단계 클러치만으로 구성된 1자유도계 모델을 사용하여 해석한 결과이다⁽²⁾. 비선형 거동특성을 해석하기 위해서 harmonic balance method(HBM)가 사용되었으며, 그래프 상에 나타난 빨간색 원은 시스템이 주파수가 변함에 따라 나타내는 실제 거동 특성을 나타내고

기초강좌

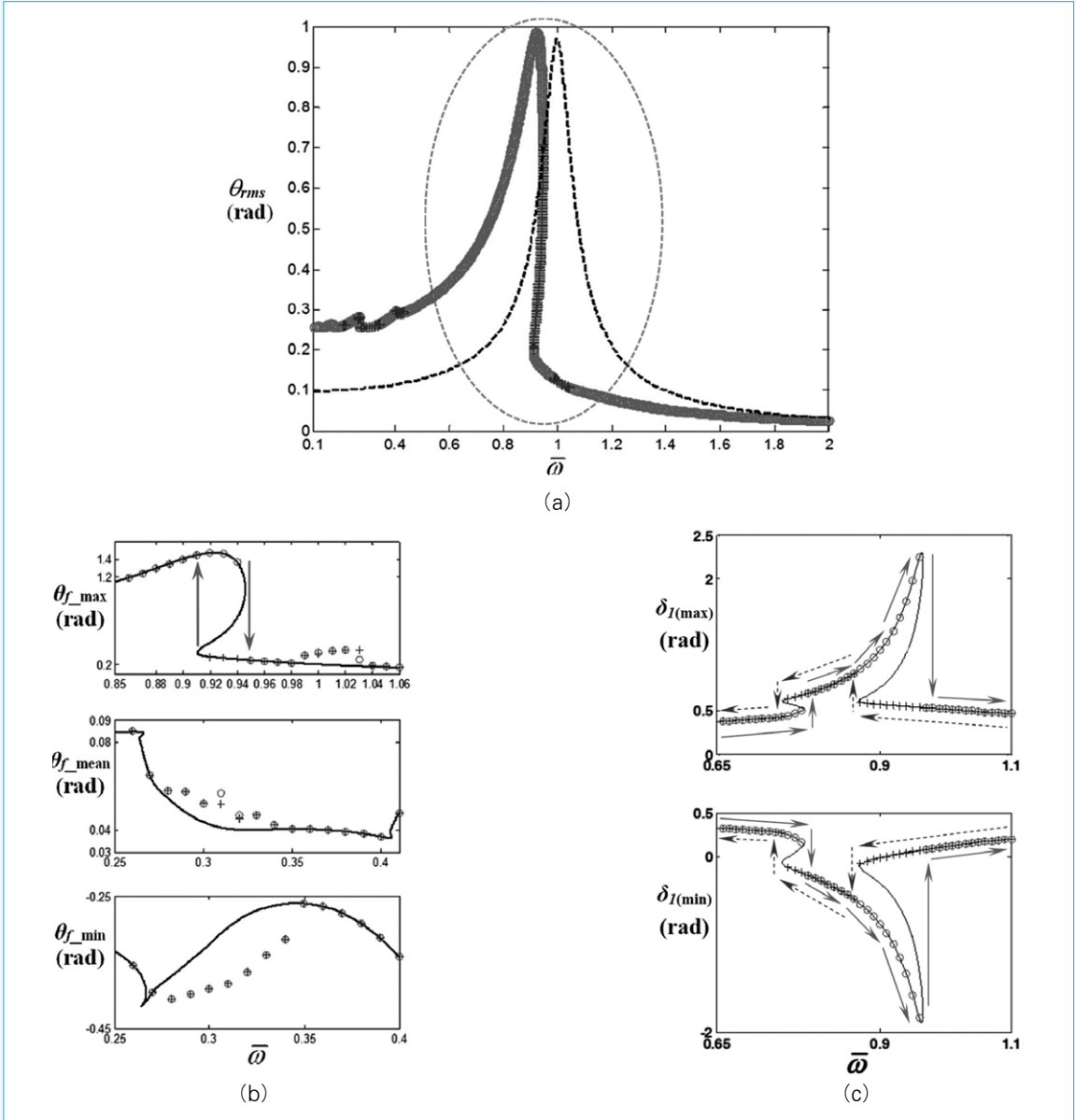


그림 5 주파수 도메인에서 나타나는 비선형 거동현상 특성

있으며 파란색 크로스라인은 시스템 거동현상을 확인할 수 없는 범위의 예측치를 나타내고 있다. 이와 같이 파란색 크로스라인으로 표시된 부분을 불안정 거동범위(unstable regime)이라고도 하

며, 보통 이런 주파수 대역에서 점핑 현상(jumping phenomena)이 나타나게 된다. 이와 같은 점핑 현상은 시스템을 가진하면서 frequency sweeping을 진행할 때, 이 전 주파수 값의 초기 조건에 따

라서 연속적으로 거동특성 값이 증가하기도 하고, 어느 일정 범위에서 특정값으로 점핑하여 떨어지거나 갑작스럽게 증가하기도 한다. 그림 5(b)는 이와 같은 현상을 frequency sweeping에 따라서 어떻게 시스템의 거동 특성이 변하는지를 대조적으로 잘 보여주고 있다.

그림 5(b)는 그림 5(a)의 점선으로 표시한 부분을 좀 더 확대해서 나타낸 결과이며, 여기서 실선은 HBM을 사용하여 얻은 해석 결과를, 빨간색 원과 파란색 크로스타인은 Runge-Kutta를 이용한 수치해석결과를 나타내고 있다. 이 때, 빨간색 원은 frequency up-sweeping을 파란색 크로스타인은 frequency down-sweeping을 나타내고 있는데, 시스템의 점핑 현상이 나타나는 구간과 주파수 값이 1 ~ 1.045 사이의 특정 구간을 제외하고 전반적으로 HBM과 Runge-Kutta 결과는 모두 일치하고 있다. 이와 같은 결과의 차이는 각각의 해석 모델이 갖는 해석방법의 차이에 의해서 발생한다. 예를 들어, HBM은 일반적으로 정상상태의 응답특성을 해석하는데 이용할 수 있는 신뢰도가 높은 해석 모델인 반면, 해석모델 구축 시 행렬과 벡터의 구성이 정수배의 super-harmonic 항을 기본으로 이루어지기 때문에, 정수배가 아닌 시스템의 응답특성을 예측하는 데에는 한계가 있기 마련이다²⁾. 이를 위해서는 여러 가지 비선형적인 방법들을 같이 적용하여야 하는 단점이 있으나, 시스템의 응답특성을 주파수와 시간 영역에서 동시에 해석할 수 있는 장점이 있다. 일반적으로 Runge-Kutta는 특정 주파수 값에 대한 시간영역에서의 정상상태 응답 특성을 해석하거나, 과도응답특성에 대한 해석 시 신뢰도가 높은 결과를 주지만, 여러 주파수 영역대에서의 시스템 응답 특성을 구할 때는 많은 시간이 요구되는 단점이 있다. 따라서, 비선형 해석 시에는 해석 모델에 따른 해석 시간의 장·단점 및 특정 응답

특성의 해석가능여부에 따라 몇 가지 모델을 혼용하여 쓰기도 한다.

그림 5(c)도 마찬가지로 HBM(실선)과 Runge-Kutta(원 및 크로스타인)에 의한 frequency sweeping 조건에 따른 해석 결과를 비교하고 있는데, 그림 5(a,b)와는 달리 좀 더 복잡한 점핑 현상이 관측되고 있다. 즉, 시스템 가진 시, frequency up-sweeping과 down-sweeping 모두 두 번의 점핑 현상을 보이고 있다. 예를 들어, frequency up-sweeping시, 최초에 시스템의 거동 특성 값이 작은 쪽에서 큰 쪽으로 점핑하다가 두 번째 점핑 구간에서는 시스템의 거동 특성이 큰 쪽에서 작은 쪽으로 떨어지는 것을 관측할 수 있다. Frequency down-sweeping시에는 반대현상이 관찰이 되는데, frequency up-sweeping과 down-sweeping 지점은 다른 비선형 현상과 마찬가지로 각기 다른 지점에서 관찰됨을 알 수 있다. 이와 같은 비선형 거동 현상은 보통 기어 거동 특성에서 전형적으로 관측되는 특성으로서 시스템의 댐핑 조건이나 특정 가진 구간에 따라 나타나는 현상이다⁶⁾. 따라서, 이와 같은 복잡한 비선형 진동 현상을 규명하고 그 해결법을 찾기 위해서는, 신뢰도가 높은 해석기법의 개발과 더불어 비선형 거동 특성을 규명할 수 있는 계측기법이 필수적이라 할 수 있다. 즉, 대부분의 현장에서는 시스템의 공진 주파수 영역에서의 거동특성을 확인하기 위한 선형성 기반의 계측기법이 주된 방법이었다면, 시스템의 비선형성을 파악하기 위해서는 적어도 비선형 거동 특성을 갖는 하부 시스템에 대한 시간 영역에서의 프로파일을 찾아내고 기본 주파수 영역뿐만 아니라, 그 시스템의 거동특성이 포함하고 있는 모든 harmonic 성분을 확인할 수 있는 계측기법이 사용되어야 한다. 또한 여러 형태의 물리 시스템은 각각 고유의 비선형 응답 특성을 나타내기 때문에, 그 특성에 맞는

기초강좌

비선형 거동 특성 프로파일을 얻을 수 있는 계측 기법이 매년 개발되어야하는 문제와도 상관관계가 있다.

4. 맺음말

이상으로 비선형 진동에 대한 기본 개념과 더불어 비선형 거동 현상에 대해 드라이브라인 시스템의 예를 들어 그 특성에 대해 알아보았다. 여러 물리 시스템은 이보다 더 많은 비선형 거동/진동 특성을 내포하고 있으며, 이전까지의 선형적인 방법으로 그 현상을 규명하고 해법을 찾는 데는 많은 한계에 다다른 시점에서, 이와 같은 비선형 현상에 대한 규명과 이를 해결하기 위한 해법이 실제 시스템에 보다 더 적극적으로 응용되어야 할 것이다. 따라서, 여태까지 이론적인 단계에서만 머물던 비선형 개념을 소음진동 분야내의 해결하지 못한 여러 가지 물리 시스템에 적용함으로써, 기존의 선형적인 한계에서 얻지 못했던 해법들을 찾는데 적극적으로 활용하고, 보다 더 보편적으로 적용할 수 있는 해석방법과 계측방법이 개발되어야 할 것이다. [KSNVE](#)

참고문헌

(1) Jordan D. W. and Smith, P., 2004, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford

University Press New York.

- (2) Yoon, J. Y. and Yoon, H. S., 2014, Nonlinear Frequency Response Analysis of a Multistage Clutch Damper with Multiple Nonlinearities, *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 9, No. 3. pp. 031007.
- (3) Yoon, J. Y. and Singh, R., 2013, Effect of the Multi-staged Clutch Damper Characteristics on Transmission Gear Rattle Under Two Engine Conditions, *Proc. IMechE Part D: Journal of Automobile Engineering*, Vol. 227, No. 9, pp. 1273~1294.
- (4) Yoon, J. Y. and Lee, I. J., 2014, Nonlinear Analysis of Vibro-impacts for Unloaded Gear Pairs with Various Excitation and System Parameters, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 136, No. 3, pp. 031010.
- (5) Yoon, J. Y. and Kim, B., 2015, Effect of Various Excitation Conditions on Vibrational Energy in a Multi-degree-of-freedom Torsional System with Piecewise-type Nonlinearities, *Energies*, Vol. 8, No. 10, pp. 10861~10882.
- (6) Comparin, R. J. and Singh, R., 1989, Nonlinear Frequency Response Characteristics of an Impact Pair, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 134, No. 2, pp. 259~290.

[기획 : 김기우 편집이사 gwkim@inha.ac.kr]