韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2015.29.4.699
제 29집 제 4호, 2015. 11. 699-722

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 29, No. 4, Nov. 2015. 699-722

대칭성을 고려한 방정식의 해법 지도

김 지 홍 (김해제일고)
김 부 윤 (부산대학교)
정 영 우 (경성대학교)†

본 연구의 목적은 라그랑주의 방정식론을 바탕으로 한 방정식의 해법을 고등학교 1학년 수업에 적용하여 방정식의 해법과 관련한 근과 계수의 관계와 대칭성의 의의를 인식하게 하는 것이다. 대칭성은 라그랑주의 방정식론의 핵심 아이디어이며, 근과 계수의 관계는 그의 해법에 있어 중요한 수단이다. 학생들은 수업을 통해 근과 계수의 관계에 대한 학습 의의를 인식하였고, 대칭성의 아이디어를 이해하였으며, 새로운 해법에 흥미를 나타내었다.
이러한 연구는 학교수학에서 다루는 국소적인 방정식의 해법만이 아닌 교수학적 조직화에 의한 체계적인 방정식론에 대한 경험을 주며, 방정식의 해법과 관련한 지식들의 연결성을 이해하게 한다.

Ⅰ. 서론

대칭성은 자연 현상 속에서 쉽게 찾아볼 수 있다. 고대부터 수학자들은 이러한 자연 현상을 방정식으로 나타내고, 그 해를 찾아가는 과정에서 대칭성을 형식화하고 추상화하였다. 대칭을 의미하는 'symmetry'라는 단어의 두 어근은 그리스어에서 나왔다. syn은 '함께'라는 뜻이며, metry는 '측량'을 뜻한다(Mark Ronan, 2008). 그리스어 syn-metry는 사전적으로 균형, 조화, 잘 나뉘어짐, 또는 이들로 인한 미를 의미한다(남진영・박선용, 2002). Wely(1952)에 따르면, 어떤 물질 또는 자연 현상이 대칭성을 가지고 있다는 것은 어떤 변환에 대하여 그 물질 또는 자연 현상이 불변이라는 것으로 정의할 수 있으며, 이러한 의미에서 수학에서의 대칭성의 아이디어는 자기 동형변환 아래에서 대상의 외형적 불변성이라 할 수 있다(남진영・박선용, 2002, 재인용). 따라서 조건을 만족하는 변환이 존재하는지가 결정적인 역할을 하게 된다.

한편, 일차방정식을 해결하기 위해서 자연수가 아닌 음수가 필요하며, 이차방정식을 해결하기 위해서 무리수와 허수가 요구된다. 그리고 방정식의 해법에 관한 연구 특히, 오차 이상의 방정식의 일반 해법이 존재하지 않음을 증명하는 과정에서 방정식을 새롭게 바라볼 필요성이 생겨났으며, 라그랑주에 의해 대칭성의 개념을 이용한 군론이 탄생하게 된다.

라그랑주는 이미 알려져 있던 삼차 및 사차방정식의 해법을 분석하여, 방정식 해법의 공통적인 원리를 발견하였다(고영미・이상욱, 2014). 그것은 최초의 근의 치환[1]에 대한 연구였는데, 이를 이용하여 오차 이상의 방정식의 일반해가 존재하지 않음을 보이려고 시도하였으나 해결할 수는 없었다. 하지만 그의 연구는 이후 루피니, 아벨 등에 영향을 미쳤다. 그들의 뒤를 이어 갈루아는 근의 치환에 대한 연구를 통해 방정식의 근 사이의 관계를 보존하는 치환군으로 결정되는 대칭성의 정도로 방정식을 나누었으며(남진영・박선용, 2002), 결국 오차 이상

* 접수일(2015년 3월 30일), 심사(수정)일(1차: 2015년 6월 25일, 2차: 2015년 10월 5일), 게재 확정일(2015년 11월 12일)
* ZDM 분류 : D34
* MSC2000 분류 : 97D40
* 주제어 : 방정식, 대칭성, 근과 계수의 관계
† 교신저자 : nahime02@ks.ac.kr
1) 치환(permutation) 또는 순열이라 한다.

의 방정식의 일반해가 없다는 갈루아 이론에까지 이르게 되었다.

이처럼 방정식의 해법을 찾는 과정에서 대칭성의 개념이 중요한 역할을 하였으며, 현대대수학으로 넘어가는 과정에서 등장한 라그랑주의 방정식론에 근과 계수의 관계가 사용되었다. 라그랑주의 방정식론에서 근의 치환과 근과 계수의 관계를 바탕으로 방정식을 해결하는 과정은 군과 체의 이론이 발생되는 수학사적으로 중요한 전환점이 되는 부분이다.

방정식과 관련된 선행연구로 김경희·김부윤(2000)은 일차방정식에서 오차방정식까지 수학사적으로 방정식의 해법을 연구하였으며, 이대현(2004)은 방정식의 해법에서 삼차방정식의 근의 공식을 탐구하고, 카르다노, 페라리, 아벨 등의 업적을 논하고 있다. 또한 성기원(1998)은 n차 방정식의 근과 계수와의 관계를 일반화하는 것을 주로 다루었다. 그리고 고영미·이상욱(2014)은 라그랑주의 방정식론이 가지는 중요한 의미를 탐구하였다. 특히, 삼차방정식과 사차방정식의 해법을 일반화하는 라그랑주의 방정식론에 대해 연구하였다. 그러나 그들의 연구는 라그랑주의 방정식론의 중요성과 내용에 대한 이론적 고찰로, 이를 바탕으로 한 방정식의 해법 지도에 관한 것은 다루지 않았다.

이에 본 연구는 라그랑주의 방법을 바탕으로 대칭성을 고려한 방정식의 해법을 찾는 과정을 교수학적으로 조직화하여 수업에 적용한다. 수업의 목적은 방정식의 해법과 관련하여 대칭성의 아이디어를 인식하고, 근과 계수의 관계의 학습의의를 이해하게 하는 것이다. 그 과정에서 학생들은 방정식론에 관한 체계적인 이해를 할 수 있다.

Ⅱ. 라그랑주의 방정식론; 대칭성, 근과 계수의 관계[2)]

역사적으로 삼차와 사차방정식의 해법을 찾기 위하여 많은 수학자들이 노력했으나, 16세기에 이르러서야 카르다노와 페라리에 의해 해법이 발견되었다. 그 이전에는 해결하지 못했던 방정식의 해법을 찾아냈다는 점에서 의의가 있다고 할 수 있다. 또한, 데카르트, 오일러 등 여러 수학자들이 삼차와 사차방정식에 대한 새로운 공식을 만들었다. 하지만 이들의 해법은 상이하여 공통점을 찾기 어려웠다. 그런데 라그랑주는 1771년에 출간한 '방정식의 대수적 해법에 관한 고찰'에서 방정식의 대수적 해법에 관한 일반원리를 찾기 위하여 삼차, 사차방정식을 분석했다(Gowers et. al., 2014). 라그랑주는 아마도 2, 3, 4개의 문자를 치환함으로써 구성되는 군의 구조만 고찰하더라도 이차, 삼차, 사차방정식의 일반해를 이해할 수 있다는 사실을 처음으로 간파한 수학자일 것이다(Klein, 2012). 즉, 낮은 차수의 방정식에서 근의 공식이 존재할 때, 그 방정식의 수학적 성질을 조사하여 공통적인 아이디어를 이해하려 했다. 높은 차수의 방정식의 해법을 찾기 위한 노력이 꾸준히 지속되었으며, 라그랑주의 연구에 영향을 받아 오차방정식의 해를 직접 찾지 않고도, 모든 차수의 대수방정식들의 일반적인 해를 찾을 수 있는 핵심 아이디어를 찾기 위해 노력했다. 그 결과 루피니, 코시, 그리고 아벨에 이르러 근호의 사용에 의한 오차 이상의 방정식의 일반적인 근의 공식이 존재하지 않음이 증명되었다. 라그랑주의 연구에서 주목할 만 한 점은 방정식과 근의 관계가 본질적으로 어떠한 것인지를 연구했다는 점이다. 이를 이해하기 위해 방정식에 대해서 살펴보자. 먼저, 실계수를 가지는 n차 방정식은 복소수 범위에서 n개의 근을 가진다는 사실을 생각해 볼 수 있다. 즉, 실계수를 갖는 n차 다항식 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$에 대하여, 방정식

$$p(x)=0 \quad \cdots\cdots①$$

은 n개의 실근 또는 복소수근을 가진다. 이 때, 방정식 ①이 근으로 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$을 가진다고 하면, 근과

2) 이 절은 History of Mathematics Histories of Problems의 제12장 A Desperate Search의 내용을 참고하였다.

계수의 관계[3]는 다음과 같다.

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sigma_2 = \sum_{i<j}^{n} x_i x_j = +\frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \sigma_3 = \sum_{i<j<k}^{n} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \ \cdots,$$

$$\sigma_n = (-1)^n x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

이러한 근과 계수의 관계는 그 자체로 대칭식이다. 그리고 방정식 ①의 근 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$으로 만든 근의 함수 Φ[4]는 근과 계수의 관계식인 σ_i를 사용한 유리식으로 표현할 수 있다. 또한, n개의 근으로 만든 함수는 $n!$개의 근의 치환에 의해서 서로 다른 $n!$개의 값을 가진다. 하지만, 만약 이 방정식에서 근의 함수가 $n!$개의 서로 다른 값들보다 적은 m개의 서로 다른 값을 가진다면, 이 값들은 m차수의 방정식으로부터 구해질 수 있다. 그리고 근의 함수는 그 계수들의 근과 계수의 관계에 의해서 구하고 표현할 수 있다.

결국 라그랑주는 방정식에서 바로 근을 구하는 것이 아니라, 근이 존재한다는 가정 하에서 근을 이용한 함수를 생각하고 이를 방정식과 연결하여 인식하려고 했다. 즉, 방정식의 근으로 만들 수 있는 근의 함수 Φ를 생각하고, 근으로 만들 수 있는 모든 가능한 치환을 고려한다. 그리고 대칭성을 고려했을 때, 치환에 의한 근의 함수 Φ가 가질 수 있는 서로 다른 값들의 개수가 방정식의 차수보다 작게 되면 방정식은 근호로 풀이 가능한 것이다. 이러한 방정식의 근의 치환에 대한 연구가 대수방정식에 대한 라그랑주의 일반이론의 기초였다. 현대대수학의 관점에서 살펴보면 이는 결국 라그랑주의 정리로 알려진 다음을 의미한다.

정리. 라그랑주의 정리 군 G가 부분군 H를 가진다면, $|H|$가 $|G|$를 나눌 수 있다(Hungerford, 2006).

이 정리는 방정식의 군이라고 부르는 치환의 집합을 유한군 G라고 할 때, 그 속에서 방정식의 근의 함수 Φ의 함숫값들이 같은 것끼리 구성한 부분군 H의 개수가 주어질 때의 상황을 의미한다. 즉, 어떤 방정식의 해결 가능성을 이해하려면 그 근들의 치환을 조사하고, 이 치환들에 대해 근의 함수인 분해식이 몇 개로 구분되는지를 살펴보아야 한다. 그리고 근과 계수의 관계는 근의 치환과 분해식의 관계를 찾아내는 등 실제적으로 방정식의 근을 찾는 데 핵심적인 역할을 한다. 근과 계수의 관계를 확장하여 근의 함수 Φ를 나타내고, 이를 통해 근들의 치환을 적용하고, 대칭성에 의하여 근의 함수의 값이 최소 몇 가지가 나오는지를 찾아냄으로써 방정식의 특징을 구별할 수 있다. 결국 방정식의 계수를 바탕으로 근을 나타내는 것이 근호를 사용하여 방정식의 근을 표현할 수 있는지의 여부를 판단할 수 있게 한다. 즉, 현대대수학에서 방정식에서의 가해군의 개념을 유추할 수 있도

3) 비에트가 처음으로 제시하였으며, 이후 뉴턴이 임의의 차수의 다항식에 대한 근과 계수의 관계를 증명하였다. 뉴턴은 그 과정에서 다항식의 근에 대한 대칭함수(symmetric function)라는 중요한 개념을 도입했다(I. Kleiner, 2012 참조).
그리고 근과 계수의 관계를 사용하여 방정식의 해를 찾는 것은 서양에서 뿐만 아니라 일본의 와산에서도 그 예를 찾아볼 수 있다. 이차방정식에서 두 근 α, $\beta(\alpha > \beta > 0)$에 대해서 $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$이므로 근의 공식을 다음과 같이 유도할 수 있다(片野善一郎, 2011 참조).
$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} - \alpha\beta = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$이므로 $\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}$ 또는 $\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta$이다. 따라서,
$\alpha = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$, $\beta = -\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$이다.

4) 라그랑주의 방정식론에서 함수 Φ는 근의 함수로써, 근으로 나타난 유리식이며 분해식(resolvent) 또는 해결식이라 한다. 특히, 라그랑주는 이것을 택하는 방법을 설명하였다.

록 하는 밑거름이 된다. 라그랑주의 방법에 따르면 오차방정식의 경우 $5! = 120$의 근의 치환에 대해서 단지 3개 또는 4개의 서로 다른 값들만을 가지는 근의 함수가 존재해야 해를 구할 수 있다. 하지만 라그랑주는 오차방정식을 풀게 될 경우, 조사하고 조합해야 할 계산 대상이 너무 많아서 성공을 보장하기 의심스럽다고 하였는데(고영미・이상욱, 2014), 결국 대칭성을 고려하여 근의 함수가 치환에 의해 가질 수 있는 함숫값의 개수를 5개보다 작게 만들 수는 없었다. 이는 오차방정식에서 조건을 만족하는 분해식을 찾을 수 없으며, 일반적인 오차 이상의 방정식은 근호로 풀이가 불가능하다는 것이다. 여기서 근호로 풀이가능하다는 의미는 다음과 같다.

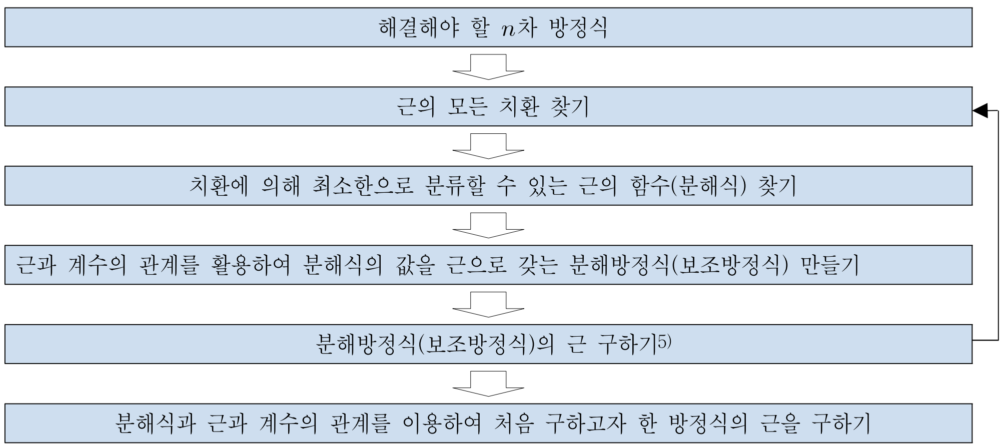
정의. 다항식 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \ a_1 x + a_0$의 근을 계수와 몇 개의 근호를 이용하여 표현할 수 있을 때, $f(x)$를 근호로 풀이 가능한(solvable by radicals) 다항식이라 한다(The Inter-IREM Commision, 1997).

다음 정리에 따르면 일반적으로 오차방정식 이상에서는 근호로 풀이가 가능하지 않다.

정리. 다항식 $f(x) \in F[x]$에서 F가 표수(characteristic)가 영인 체일 때, $f(x) = 0$이 근호로 풀이 가능한 방정식일 필요충분조건은 $f(x)$의 갈로아군이 가해군이다(Hungerford, 2006).

만일 $n(\geq 5)$차 다항식 $f(x) \in F[x]$의 갈로아 군이 S_n과 동형이면, $f(x)$의 갈로아 군은 가해군이 아니다. 예를 들어, $f(x) = x^5 - 10x + 5$의 갈로아 군은 S_5와 동형으로 가해군이 아니고, 이 경우의 $f(x)$의 근은 유리수와 근호만으로 나타낼 수 없다. 결국, $f(x)$의 근은 몇 개의 근호와 계수만으로 나타낼 수 없다. 이로써 $n(\geq 5)$차 방정식의 근의 공식은 없다는 사실을 알 수 있다.

라그랑주의 방정식론에서의 해법을 단계로 요약하면 [그림 Ⅱ-1]과 같다.

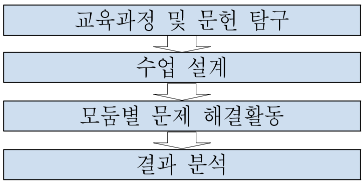


[그림 Ⅱ-1] 라그랑주의 방정식론에서의 해법 개요

5) 방정식이 해결할 수 있는 차수가 될 때까지 이 과정을 반복한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

대칭성의 관점에서 근과 계수의 관계를 활용한 방정식의 해법을 교수학적으로 조직화하고 수업으로 실시하였다. 본 연구의 절차는 [그림 Ⅲ-1]과 같다. 방정식의 해법에서의 대칭성과 근과 계수의 관계가 가지는 의의를 인식하게하기 위해 라그랑주의 해법을 단계별로 분석하고, 수학교육 전문가의 자문을 거쳐 수업을 설계하였다. 수업은 2014년 12월 22일과 23일에 이루어졌으며, 수업 시간은 총 4시간으로 2시간씩 2회 실시하였다. 대상은 경남 김해시 소재의 일반계 G고등학교 1학년 학생 27명이며, 모둠별 문제해결활동을 하였다. 구체적인 수업의 내용은 <표 Ⅲ-1>과 같다.



[그림 III-1] 연구 절차

수업과정은 녹취와 녹화를 하였으며, 학생들이 작성한 워크시트를 바탕으로 분석하였다. 그리고 복잡한 계산을 돕기 위하여 핸드폰으로 Wolfram 사이트[6]를 사용하게 하였으며, 첫 시간의 일부는 인터넷 계산기에 대한 간단한 안내에 할애되었다.

<표 III-1> 차시별 수업 내용

구분	차시별 내용	
1회	1차시	이차방정식 해법 탐구 및 인터넷 계산기 사용 안내
	2차시	삼차방정식 해법 탐구 (1)
2회	3차시	삼차방정식 해법 탐구 (2)
	4차시	사차방정식 해법 탐구, 오차이상의 방정식의 해법

라그랑주의 해법을 적용한 수업에서의 각 단계별 워크시트의 내용과 의도는 다음과 같다.

<표 III-2> 1회 1차시 워크시트 내용과 의도

Ⅰ. 이차방정식에서 근과 계수와의 관계를 이용한 해법 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a>0)$에 대하여 두 개의 근을 x_1, x_2이라 하자.		
단계	내용	의도
1	이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$의 두 근을 x_1, x_2라 할 때, 근과 계수의 관계를 구하여라.	근의 함수를 구하기 위해 근과 계수의 관계를 확인한다.

6) http://www.wolframalpha.com : 간단한 계산이 가능한 매스매티카 인터넷 버전 사이트이다.

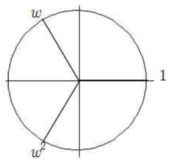
2	근으로 만들 수 있는 치환을 모두 구하여라.	이차방정식의 두 근의 모든 치환을 찾는다.
3	근으로 표현되는 식(분해식)을 만들어 보자. (단, 근의 위치를 바꾸어도 변하지 않도록 만들어 보아라.)	치환에 의해 최소한으로 분류할 수 있는 근의 함수인 분해식을 찾는다. 즉, 이차방정식의 근의 치환을 적용하여 분해식의 값이 하나로 나타나도록 만든다.
4	3단계에서 만든 식을 근과 계수의 관계를 이용하여 표현하여라.	단계 3에서 찾은 분해식을 근과 계수의 관계를 이용하여 나타낸다. 즉, 분해방정식을 만든다.
5	앞의 단계(1, 4단계)의 식을 이용하여 이차방정식의 근을 구하여라.	분해식과 근과 계수의 관계를 이용하여 이차방정식의 근을 구한다.

<표 III-3> 1회 2차시 워크시트 내용과 의도

Ⅱ. 삼차방정식에서 근과 계수와의 관계를 이용한 해법

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a>0)$에 대하여 세 개의 근을 x_1, x_2, x_3이라 하자.

문제1. 삼차방정식$x^3+8x-576=0$을 해결해 보자.

단계	내용	의도
1	삼차방정식$x^3+8x-576=0$의 근과 계수의 관계를 구하여라.	삼차방정식의 근과 계수의 관계를 찾는다.
2	근으로 만들 수 있는 치환을 모두 구하여라.	삼차방정식의 세 근의 모든 치환을 찾는다.
설명	 이 때, $x^3=1$의 근을 구하여 나타내면 다음과 같다. 왼쪽 그림에서 $x^3=1$의 근을 구해보면, $1, w, w^2$ 세 개다. 그림을 통해 살펴보면 w의 경우 120° 회전한 것을 의미하므로 w를 세 번하면, 즉, w^3을 하면 120° 회전을 세 번 한 것으로 360° 회전인 1의 위치에 돌아오게 된다. 그렇다면 w^2은 120° 회전을 두 번 한 것을 의미하므로 세 번한다면 어떻게 될까?	치환에 의해 최소한으로 분류할 수 있는 근의 함수인 분해식을 찾는다. 즉, 삼차방정식의 근의 치환을 적용하여 분해식의 값이 2가지 종류로 나타나도록 만들고, 이를 그림으로 표현하고 분석한다.
3	근으로 표현되는 식(분해식)을 만들어 보자.	
4	위의 3단계에서 만든 식에 2단계에서 만든 치환으로 순서를 바꾸어 대입하면 어떻게 될까? 의미하는 바가 무엇일까? 그림으로 나타낸다면 어떻게 될까?	
5	앞의 단계에서 그림으로 구한 두 종류의 결과를 각각 T_1, T_2 라고 할 때, 이를 식으로 계산하여 동일한 결과가 나오는 것을 확인하여라.	근과 계수의 관계를 이용하여 분해식의 값을 계산하고, 그 결과가 2가지 종류로 분류됨을 확인한다.
6	5단계에서 구한 식의 합과 곱(T_1+T_2, T_1T_2)을 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 구하여 보자.	근과 계수의 관계를 활용하여 분해식의 값을 근으로 갖는 분해방정식(보조방정식)을

7	앞 단계에서 구한 식을 이용하여 T_1과 T_2를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들고 이를 구한 후, 세제곱근 $\sqrt[3]{T_1}$, $\sqrt[3]{T_2}$ 를 구하여라.(Wolframalpha사이트 이용)	만든다. 그리고 분해방정식(보조방정식)의 근을 구한다. 즉, T_1 , T_2을 근으로 갖는 이차방정식을 만들고, 근을 구한다.
8	구하고자 하는 삼차방정식의 해 x_1 , x_2 , x_3를 연립방정식을 만들어 구하여 보자.(w의 성질을 이용)	분해식과 근과 계수의 관계를 이용하여 삼차방정식의 근을 구한다.

<표 III-4> 2회 1차시 워크시트 내용과 의도

문제2. 삼차방정식$x^3+8x-576=0$을 해결해 보자.		
단계	내용	의도
1-8	1회 2차시 수업의 질문과 동일하게 제시한다.	학습한 과정을 되짚어보며 스스로 해결하도록 기회를 제공한다. 즉, 근과 계수의 관계를 활용한 삼차방정식의 해법을 구체적 예를 통해 연습한다.

<표 III-5> 2회 2차시 워크시트 내용과 의도

Ⅲ. 사차방정식에서 근과 계수와의 관계를 이용한 해법 사차방정식$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0(a>0)$에 대하여 네 개의 근을 x_1, x_2, x_3, x_4이라 하자. **문제3.** 사차방정식 $x^4-24x-2=0$에 대하여 위의 과정으로 해결해 보자.		
단계	내용	의도
1	사차방정식$x^4-24x-2=0$의 근과 계수와의 관계를 구하여라.	사차방정식의 근과 계수의 관계를 찾는다.
2	근으로 만들 수 있는 치환을 모두 구하여라.	사차방정식의 네 근의 모든 치환을 찾는다.
3	근으로 표현되는 식(분해식)을 만들어 보자. (단, 네 근의 사칙연산을 이용하여 식을 만든다. 그리고 이 식에 위의 단계에서 구한 모든 치환을 대입했을 때, 그 결과가 같은 것으로 분류하면 차수보다 작게 되도록 만들어야 한다.)	치환에 의해 최소한으로 분류할 수 있는 근의 함수인 분해식을 찾는다. 즉, 사차방정식의 근의 치환을 적용하여 분해식의 값이 3가지 종류로 나타나도록 만들고, 이를 그림으로 표현하고 분석한다.
4	앞 단계에서 만든 치환을 이용하여 분해식에 대입하면 어떻게 될까? 의미하는 바가 무엇인가? 만약 그림으로 나타낸다면 어떻게 될까?	
5	앞 단계에서 구한 식을 Φ_0 , Φ_1 , Φ_2라 할 때, Φ_0 , Φ_1 , Φ_2을 세 근으로 하는 삼차방정식을 만들어 보아라. ((참고) 사차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\Phi_0+\Phi_1+\Phi_2$, $\Phi_0\Phi_1+\Phi_1\Phi_2+\Phi_2\Phi_0$, $\Phi_0\,\Phi_1\,\Phi_2$을 구한 후 삼차방정식을 만든다.)	근과 계수의 관계를 활용하여 분해식의 값을 근으로 갖는 분해방정식(보조방정식)을 만든다. 즉, Φ_0 , Φ_1 , Φ_2을 근으로 갖는 삼차방정식을 만든다.

6	5단계의 삼차방정식의 근을 구해보자. (앞의 삼차방정식의 풀이를 참고로 하여라.)	분해방정식(보조방정식)의 근을 구한다. 즉, 앞 단계에서 만든 삼차방정식의 근을 구한다. 따라서 삼차방정식의 해결과정을 반복해야 함을 이해한다.
7	앞 단계에서 구한 식을 이용하여 이차방정식을 만들고 근을 구하여라.(이차방정식을 두 번 만들어 계산한다. 또한, Wolframalpha사이트 이용)	분해식과 근과 계수의 관계를 이용하여 사차방정식의 근을 구한다. 즉, 근과 계수의 관계를 활용하여 이차방정식을 만들어 근을 찾는다. 따라서 두 이차방정식의 근은 사차방정식의 네 근임을 이해한다.

오차 이상의 방정식에 대한 내용은 수업의 정리 단계에서 교사 설명으로 다루었다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석[7)]

1. 이차방정식

이차방정식의 근을 구하는 과정을 단계별로 나누어 학생들이 탐구할 수 있도록 구성하였으며, 모둠별 토론을 통해 생각을 공유하고 서로 해답을 찾아가는 과정을 분석하였다.

(단계 1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a>0)$의 두 근 x_1, x_2에 대하여 근과 계수의 관계를 구하도록 하였다. 이 단계는 고등학교 1학년 수학Ⅰ에 설명되어 있어 쉽게 해결하였다.

(단계 2) 근의 치환에 대해 설명하고, 근으로 만들 수 있는 치환을 모두 찾아보도록 하였다. 근이 2개 있으므로 두 근을 나열하는 모든 경우의 수는 $2\times1=2$(가지)이다. 이 단계 역시 쉽게 해결하였다.

(단계 3) 라그랑주가 분해식을 찾아낸 방법을 설명한 후, 방정식의 근의 함수인 분해식을 찾아보도록 하였다.

라그랑주의 분해식은 근으로 표현하는 근의 유리식[8)]이다. 또한, 근의 모든 치환을 대입하였을 때 방정식의 차수보다 작은 수로 분류할 수 있어야 한다. 이차방정식은 근의 치환을 적용하여도 분해식의 값이 하나로 나타나도록 만들어야 한다. 따라서 이차방정식의 두 근의 위치를 바꾸어 대입하여도 분해식의 값이 변하지 않도록 만들어야 함을 강조하였다. 합을 이용하여 분해식을 만든 학생도 있었으나, 대부분의 학생들은 합은 첫 번째 단계에서 찾아낸 근과 계수의 관계에 포함되는 식이므로 의미가 없다는 사실을 인식하였다. 학생들은 이차방정식의 경우는 비교적 쉽게 이해하였으며, [그림 Ⅳ-1]과 같은 분해식을 만들었다.

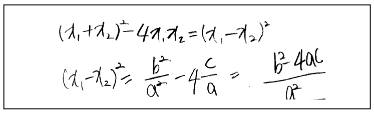
$$\left.\begin{array}{l} 표(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2 \\ 표(x_2,x_1)=(x_2-x_1)^2 \end{array}\right] =$$

[그림 Ⅳ-1] 학생 5가 찾은 이차방정식의 분해식

7) 학생산출물에서는 학생들에게 부여한 고유 번호로 학생 이름을 대신하기로 한다.

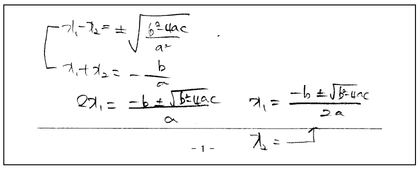
8) 근의 사칙연산을 사용하여 나타낸 식을 의미한다. 즉, $\sqrt{x}$와 같은 무리식은 될 수 없다.

(단계 4) (단계 3)에서 만든 식을 근과 계수의 관계를 이용하여 표현해 보도록 하였는데, 대부분의 학생들이 곱셈공식을 변형하여 쉽게 해결하였다.



[그림 Ⅳ-2] 학생 18이 찾은 근과 계수의 관계를 사용한 분해식의 표현

(단계 5) 지금까지 구한 내용을 바탕으로 이차방정식의 근의 공식을 유도해 보도록 하였다. 특히, 두 근의 합과 분해식을 이용하여 연립방정식을 해결하도록 했다.



[그림 Ⅳ-3] 학생 13이 찾은 근의 공식 유도과정

다음 대화에서 기존에 알고 있던 방법 이외에도 근의 공식을 유도하는 새로운 방법을 접하고서 흥미로워 하는 모습을 볼 수 있다.

학생 2 : (이것과 이것의) 연립방정식 푸는 거잖아.
학생 5 : x_1과 x_2 합이잖아.
학생 7 : 연립을 하라고?
학생 2 : 일단, 이거 빼거나 더하면 안 돼?
학생 5 : 이거를 $\sqrt{\ }$ 씌운 이 식이랑 위에 식이랑 연립하면 나오잖아.
학생 2 : 그래. 두 개 더하면 x_1 나오잖아.
학생 7 : 아. 알겠다.(박수치며)
학생 2 : 어 이거, 근의 공식이네.

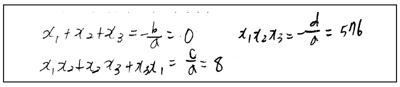
위의 대화에서 학생 2, 학생 7은 근의 공식이 유도되었다는 사실에 놀라고 있다. 또한, 3단계에서 찾은 다른 분해식에 대해서도 같은 값을 가진다는 사실을 찾았다. 그리고 이차방정식의 근의 공식을 유도하는 과정을 정리하면서, 근의 치환에 의해 분해식이 같은 값을 가진다는 사실로부터 대칭이라는 개념을 일깨워주었다.

2. 삼차방정식

학생들은 이차방정식의 근의 공식은 알고 있지만, 삼차방정식의 근을 찾는 방법은 인수분해와 인수정리를 이용한 방법만 배운 상태이다. 따라서 이 과정은 삼차방정식의 근의 공식을 찾는 과정이기도 하다. 이차방정식에서

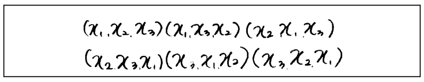
는 일반식을 제시하였으나, 삼차방정식에서는 계수가 주어져 있는 구체적인 문제를 통해서 근과 계수의 관계를 찾고, 분해식을 구성하여 단계적으로 근을 유도하도록 하였다. 사용된 삼차방정식은 $x^3+8x-576=0$이다.

(단계 1) 세 근을 x_1, x_2, x_3라 할 때, $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$의 전개식과 비교하여 근과 계수의 관계를 찾아보도록 하였다. [그림 Ⅳ-4]는 학생 6이 찾아낸 삼차방정식의 근과 계수의 관계이다. 이 과정은 계산식이 다소 복잡하지만 대부분의 학생들이 쉽게 해결하였다.



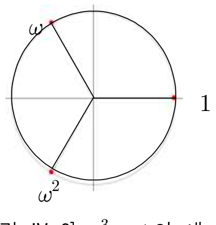
[그림 Ⅳ-4] 학생 6이 찾은 근과 계수와의 관계

(단계 2) 세 근으로 만들 수 있는 치환을 모두 구하도록 하였다. 근이 3개가 있으므로 세 근을 나열하는 모든 경우의 수는 $3\times2\times1=6$(가지)이다. [그림 Ⅳ-5]는 세 근으로 만들 수 있는 모든 치환의 경우를 학생 20이 구해낸 결과이며, 대부분의 학생들도 쉽게 찾아냈다.[9)]



[그림 Ⅳ-5] 학생 20이 찾은 세 근으로 만들 수 있는 모든 치환

분해식을 찾는 데 사용되는 아이디어를 제공하기 위하여, 다음 단계로 넘어가기 전에 $x^3=1$의 근을 원 위에 표현하는 방법에 대해 간략히 설명하였다. 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$라 할 때, $w^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 상기시키고, $x^3=1$의 근을 [그림 Ⅳ-6]과 같이 나타낼 수 있음을 설명하였다.



[그림 Ⅳ-6] $x^3=1$의 세 근

(단계 3) 근으로 표현되는 분해식을 ω를 사용하여 표현하도록 하였다. 학생들은 삼차방정식의 분해식인

9) 이 때, 치환의 표현을

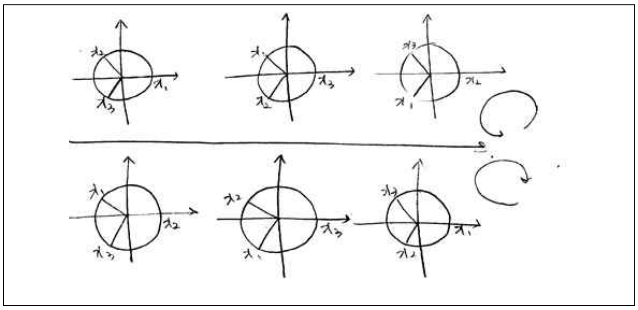
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$$

으로 나타내게 하였다. 즉, $(x_1,\ x_3,\ x_2)$는 $x_1\to x_1$, $x_2\to x_3$, $x_3\to x_2$임을 의미한다.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$$

을 쉽게 만들어내지는 못했다. 따라서 세제곱을 하면 어떻게 될지에 대해 생각하도록 하고, 원에서의 위치를 생각하도록 안내하였다. 그 결과 학생들은 원에서 세제곱의 의미를 회전으로 생각하고, 1, w, w^2의 위치를 이용하여 분해식을 이해하는 모습을 보였다.

(단계 4) 근의 치환을 적용하여 분해식이 몇 가지 종류로 분류되는지 그림으로 나타내도록 하였다. 학생 23은 [그림 Ⅳ-4]와 같이 치환에 의한 분해식의 결과를 그림으로 나타내어, 6가지 경우가 3개씩 같은 것이어서 최종적으로 2가지 종류로 분류됨을 찾아냈다. 이 과정에서 학생들은 방정식을 그림으로 표현할 수 있었으며, 이때 대칭성이 사용되었다는 사실을 깨달았다. 특히, 식으로만 접근할 때보다 쉽게 이해하였다.



[그림 Ⅳ-7] 학생 23이 그림으로 찾은 두 가지 분류

다음은 [그림 Ⅳ-7]을 찾는 과정에서의 학생들이 한 대화이다. 그림을 이용하여 활발히 의견을 나누고 있음을 알 수 있다.

학생 25 : 그러니까 이거를 x_1, x_2, x_3이라고 하고 여기다가 ω냐 ω^2이냐에 따라 달라진다는 거 아니가?
학생 24 : 그림에서 x_1, x_2, x_3을 보면 왼쪽으로 회전하냐 오른쪽으로 하냐......
학생 13 : 세제곱하니까 똑 같아지는 거 아니가?
학생 24 : 얘가 원래 이거면 계속 돌리면 위치만 다르게 해서 같은 거잖아.
학생 25 : 그니까. 이렇게 되는 거재?

(단계 5) 앞 단계에서 찾은 두 종류의 결과를 T_1, T_2라 하면, 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + wx_2 + w^2 x_3)^3 = T_1, \ \Phi(x_2, x_1, x_3) = (x_2 + wx_1 + w^2 x_3)^3 = T_2$$

그림으로 구별한 6가지 경우를 직접 계산하여도 동일한 결과가 나오는지 찾아보도록 하였다. 계산에 시간이 걸리므로 모둠별로 나누어 확인해 보도록 하였다.

$\Phi(x_1, x_2, x_3) = T_1$이라 하면, w의 성질10)에 의해서

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1 + wx_2 + w^2 x_3)^3$$
$$= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3w(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1) + 3w^2(x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2)$$

이고,

$$\Phi(x_2,\ x_3,\ x_1) = (x_2 + wx_3 + w^2x_1)^3 = T_1,\ \Phi(x_3,\ x_1,\ x_2) = (x_3 + wx_1 + w^2x_2)^3 = T_1$$

이다. 따라서

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = \Phi(x_2,\ x_3,\ x_1) = \Phi(x_3,\ x_1,\ x_2) = T_1$$

이 성립한다. 동일한 방법으로,

$$\Phi(x_2,\ x_1,\ x_3) = \Phi(x_1,\ x_3,\ x_2) = \Phi(x_3,\ x_2,\ x_1) = T_2$$

임을 학생들이 스스로 확인하였다.

(단계 6) T_1과 T_2에 대하여 합과 곱을 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 나타내도록 하였다. 이 과정을 식으로 살펴보면,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \sigma_1,\quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} = \sigma_2,\quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = \sigma_3$$

라 할 때, T_1과 T_2의 합과 곱은 다음과 같다.

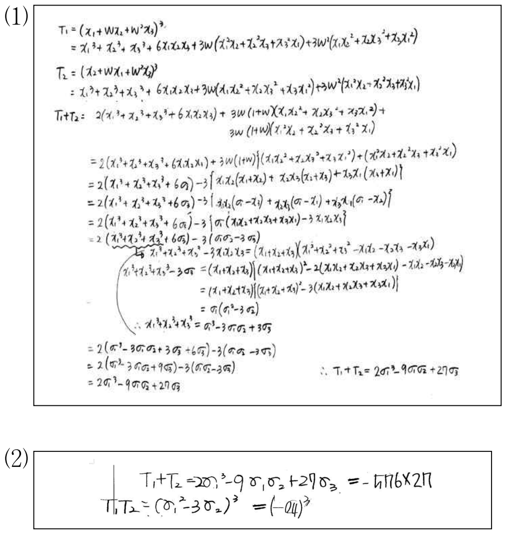
$$T_1 + T_2 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12x_1x_2x_3 - 3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2)$$
$$= 2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3$$
$$T_1T_2 = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\right\}^3 = (\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^3$$

[그림 Ⅳ-8]은 학생 18이 근과 계수의 관계를 이용하여 T_1, T_2의 합과 곱을 표현한 것이고, [그림 Ⅳ-9] 의 (1)은 학생 1이 찾은 T_1, T_2의 합이고, (2)는 학생 14가 삼차방정식의 값을 대입하여 계산한 T_1, T_2의 합과 곱이다. 이 단계에서 T_1, T_2의 합과 곱을 삼차방정식의 근과 계수로 표현하는 과정이 복잡해서인지, 학생 1과 학생 14, 학생 18, 세 사람만이 찾아내었다. 특히, 학생 1과 학생 14는 합을 표현하였고, 시간이 부족하여 곱을 찾아내지는 못했다. 하지만, 학생 18은 합과 곱을 모두 찾아내었다.

---

10) ω는 $x^3 - 1 = 0$의 한 허근이다. 즉, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$이다.

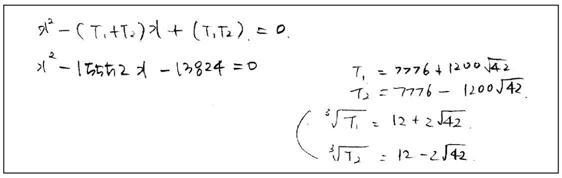
[그림 Ⅳ-8] 학생 18이 찾은 T_1, T_2의 합과 곱



[그림 Ⅳ-9] 학생 1과 학생 14가 찾은 T_1, T_2의 합과 곱

이 단계에서는 근과 계수의 관계를 이용하여 합과 곱을 표현할 수 있느냐가 중요하다. 해결해 낸 3명의 학생은 수학 성적이 높은 편이며, 계산능력이 우수한 학생이었다.

(단계 7) 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 T_1, T_2를 근으로 하는 이차방정식을 만들어 구하도록 하였다. 그리고 세제곱근을 계산하도록 하였다. 계산이 복잡하므로 휴대폰을 이용하여 계산하도록 안내하였다. [그림 Ⅳ-10]은 학생 23이 이차방정식을 찾고 이를 구한 결과이다.



[그림 Ⅳ-10] 학생 23이 찾은 T_1과 T_2를 근으로 하는 방정식과 그 해

위의 과정을 식으로 다시 정리하면,

$$t^2-(T_1+T_2)t+T_1T_2=0$$

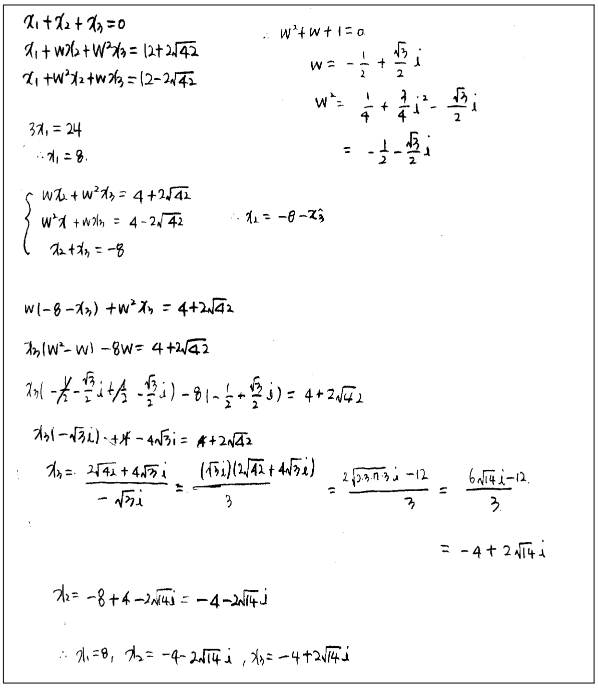
$$t^2-(2\sigma_1-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3)t+(\sigma_1^2-3\sigma_2)^3=0$$

이고, 이 식의 두 근이 T_1과 T_2이다.

(단계 8) 삼차방정식의 해 x_1, x_2, x_3를 구하는 단계이다. $(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3=T_1$을 변형하면 $x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=\sqrt[3]{T_1}$이고, T_2도 동일한 방법으로 나타내면 $x_2+\omega x_1+\omega^2 x_3=\sqrt[3]{T_2}$가 된다. 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 다음 연립방정식의 해가 구하고자 하는 세 근이 된다. 연립방정식

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\sigma_1 \\ x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=\sqrt[3]{T_1} \\ x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3=\sqrt[3]{T_2} \end{cases}$$

를 풀면 삼차방정식의 세 근을 구할 수 있으므로 이를 직접 계산하도록 하였으며, 이때 w의 성질을 이용하도록 안내하였다. [그림 Ⅳ-11]은 학생 26이 계산한 답안이다.



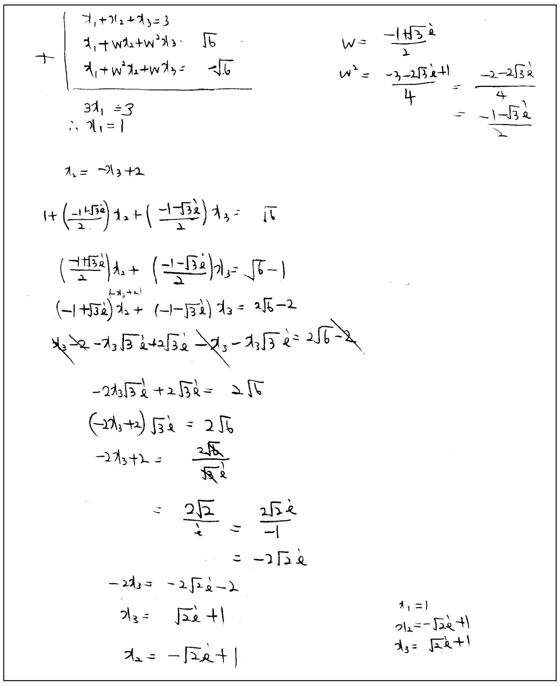
[그림 Ⅳ-11] 답안 예시(학생 26)

이로써 삼차방정식 $x^3+8x-576=0$의 해를 구할 수 있었다. 다음은 삼차방정식과 이차방정식을 해결하는 과정을 비교하는 대화이다.

학생 18 : 이차방정식 해 구하는 거에선 합이랑 곱이랑 알면 되잖아요.
교　 사 : 그렇죠. 그러면 삼차방정식 구하는 거랑 어떤 부분이 비슷해요?
학생 18 : 이렇게 똑같은 거 찾는 거요.
교　 사 : 그렇죠. 여기에서 같은 값을 가지는 걸 찾아서 분류하는 게 중요하죠.

위의 대화로부터 같은 것을 찾는 것 – 즉, 대칭을 이용하여 근의 치환에 의해 분해식의 값이 불변인 것을 분류하는 것 – 이 중요함을 인식하고 있음을 알 수 있다

다음으로, 삼차방정식 $x^3-3x^2+5x-3=0$에 대하여 앞의 일련의 풀이 과정을 다시 해보도록 하였다. 이전 시간에 학습한 삼차방정식의 해법을 상기하며 문제를 해결해내는 모습을 보였다. [그림 Ⅳ-12]는 마지막 단계인 8단계에 대한 학생 15의 답안이다.



[그림 Ⅳ-12] 답안 예시(학생 15)

3. 사차방정식

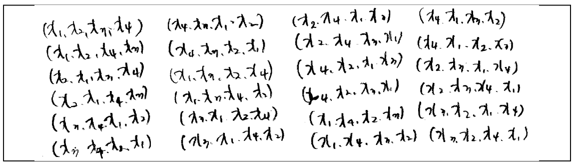
이차, 삼차방정식과 같은 방법으로 사차방정식의 근을 구하는 과정을 단계별로 나누어 활동하였으며, 해결해야 할 문제로 $x^4-24x-2=0$을 제시하였다.

(단계 1) 네 근을 x_1, x_2, x_3, x_4라 할 때, $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=0$의 전개식과 비교하여 근과 계수의 관계를 찾아보도록 하였다. [그림 Ⅳ-13]은 학생 27이 찾은 사차방정식의 근과 계수의 관계이다. 이 단계는 계산이 다소 복잡하지만 대부분 해결하였으며, 방정식에서 바로 식의 값까지 구하였다.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}=0$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=0$$
$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4=24$$
$$x_1x_2x_3x_4=-2$$

[그림 Ⅳ-13] 학생 27이 찾은 근과 계수의 관계

(단계 2) 네 근으로 만들 수 있는 치환을 모두 구하도록 하였다. 네 근 x_1, x_2, x_3, x_4로 만들 수 있는 모든 치환은 $4!=4\times3\times2\times1=24$(가지)이다. [그림 Ⅳ-14]는 학생 17이 구한 답안이다.



[그림 Ⅳ-14] 학생 17이 찾은 네 근으로 만들 수 있는 모든 치환

(단계 3) 근으로 표현되는 분해식을 만들도록 하였다. 이 경우는 네 근을 이용하여 분해식을 만들 때, 근의 모든 치환을 대입한 결과를 같은 것끼리 분류하여 최대한 작게 되도록 식을 만들어야 한다. 즉, 24개의 치환에 의한 분해식의 값이 8개씩 3가지로 분류되도록 해야 한다. 다음 [그림 Ⅳ-15]는 학생 1, 18, 24, 27이 찾아낸 분해식들이다. 이들 중에서 (1)과 (3)은 주어진 조건을 만족하는 분해식이지만, (2)와 (4)는 만족하지 않아 분해식이 아니다. 즉, (1)과 (3)은 근의 치환에 의해 분해식이 3가지로 분류가 되지만, (2)와 (4)는 3가지로 분류되지 않는다. 이를 통해 분해식은 하나가 아니라는 사실을 학생들은 알게 되었고, 그 속에 숨은 원리를 생각해 볼 수 있는 기회가 되었다. 삼차방정식에서는 w를 사용하여 학생들이 다소 어려워했지만, 사차방정식에서는 단순한 사칙연산을 사용하여 분해식을 찾아봄으로써 좀 더 쉽게 다양한 결과를 이끌어낼 수 있었다.

(1) $x_1x_2+x_3x_4$ (2) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_3}{x_4}$ (3) $(x_1+x_2)-(x_3+x_4)$ (4) $\frac{x_1x_2}{x_3x_4}$

[그림 Ⅳ-15] 학생들이 찾은 사차방정식의 분해식들

(단계 4) 사각형의 그림과 식을 이용하여 근의 모든 치환을 분해식에 대입하고 식의 값이 몇 개로 분류되는지 찾아보도록 하였다. 이 때, 근으로 표현되는 분해식을

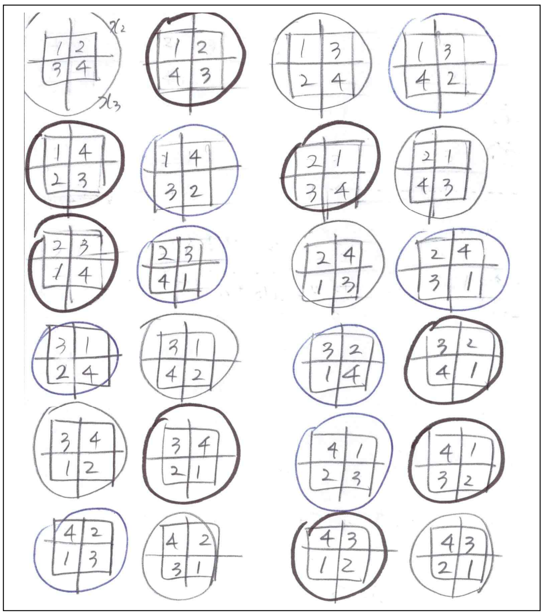
$$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_3x_4$$

라고 하고, 이를 [그림 Ⅳ-16]처럼 표현하면, 이 식은 다음과 같은 사각형의 대각선을 곱한 것을 의미한다.

4	2
1	3

[그림 Ⅳ-16]

[그림 Ⅳ-17]은 학생 1이 24개를 3가지로 분류한 것인데, 같은 종류는 동일한 색깔로 표현하고 있다.



[그림 Ⅳ-17] 학생 1이 그림으로 찾은 세 가지 분류

사차방정식의 차수보다 작은 3가지로 결과가 분류되어야 한다는 아이디어를 학생들이 가지고 있음을 볼 수 있다. 대부분의 학생들이 삼차보다 사차를 더 쉽게 인식하였으며, 사각형을 활용하여 회전, 대칭 등 다양한 방법으로 사고하였다. 사차방정식의 근의 함수 Φ는 치환에 의하여 단지 3개의 다른 값만을 가진다. 주어진 치환에 의해 변환된 근의 함수가 가질 수 있는 3개의 서로 다른 값은 아래와 같다.

$$
\begin{array}{ll}
\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_3x_4=\Phi_0, & \Phi(x_1,x_2,x_4,x_3)=x_1x_2+x_4x_3=x_1x_2+x_3x_4=\Phi_0 \\
\Phi(x_2,x_1,x_3,x_4)=x_2x_1+x_3x_4=x_1x_2+x_3x_4=\Phi_0, & \Phi(x_2,x_1,x_4,x_3)=x_2x_1+x_4x_3=x_1x_2+x_3x_4=\Phi_0 \\
\Phi(x_3,x_4,x_1,x_2)=x_3x_4+x_1x_2=x_1x_2+x_3x_4=\Phi_0, & \Phi(x_3,x_4,x_2,x_1)=x_3x_4+x_2x_1=x_1x_2+x_3x_4=\Phi_0 \\
\Phi(x_4,x_3,x_1,x_2)=x_4x_3+x_1x_2=x_1x_2+x_3x_4=\Phi_0, & \Phi(x_4,x_3,x_2,x_1)=x_4x_3+x_2x_1=x_1x_2+x_3x_4=\Phi_0 \\
\Phi(x_1,x_3,x_2,x_4)=x_1x_3+x_2x_4=\Phi_1, & \Phi(x_1,x_3,x_4,x_2)=x_1x_3+x_4x_2=x_1x_3+x_2x_4=\Phi_1 \\
\Phi(x_3,x_1,x_2,x_4)=x_3x_1+x_2x_4=x_1x_3+x_2x_4=\Phi_1, & \Phi(x_3,x_1,x_4,x_2)=x_3x_1+x_4x_2=x_1x_3+x_2x_4=\Phi_1 \\
\Phi(x_2,x_4,x_1,x_3)=x_2x_4+x_1x_3=x_1x_3+x_2x_4=\Phi_1, & \Phi(x_2,x_4,x_3,x_1)=x_2x_4+x_3x_1=x_1x_3+x_2x_4=\Phi_1 \\
\Phi(x_4,x_2,x_1,x_3)=x_4x_2+x_1x_3=x_1x_3+x_2x_4=\Phi_1, & \Phi(x_4,x_2,x_3,x_1)=x_4x_2+x_3x_1=x_1x_3+x_2x_4=\Phi_1 \\
\Phi(x_1,x_4,x_2,x_3)=x_1x_4+x_2x_3=\Phi_2, & \Phi(x_1,x_4,x_3,x_2)=x_1x_4+x_3x_2=x_1x_4+x_2x_3=\Phi_2 \\
\Phi(x_4,x_1,x_2,x_3)=x_4x_1+x_2x_3=x_1x_4+x_2x_3=\Phi_2, & \Phi(x_4,x_1,x_3,x_2)=x_4x_1+x_3x_2=x_1x_4+x_2x_3=\Phi_2 \\
\Phi(x_2,x_3,x_1,x_4)=x_2x_3+x_1x_4=x_1x_4+x_2x_3=\Phi_2, & \Phi(x_2,x_3,x_4,x_1)=x_2x_3+x_4x_1=x_1x_4+x_2x_3=\Phi_2 \\
\Phi(x_3,x_2,x_1,x_4)=x_3x_2+x_1x_4=x_1x_4+x_2x_3=\Phi_2, & \Phi(x_3,x_2,x_4,x_1)=x_3x_2+x_4x_1=x_1x_4+x_2x_3=\Phi_2
\end{array}
$$

다음은 대칭을 이용하여 동일한 것을 찾아낼 때의 학생들 간의 대화이다. 그림에서 분해식의 값이 같은 것끼리 분류하는 활동 과정에서 학생들이 대칭을 인식하고 있음을 알 수 있다.

학생 21 : 대칭이네
학생 17 : 어떻게?
학생 21 : 대각선에 이거이거 바꾸잖아.
학생 17 : 그러면 똑같은 거 아니가?
학생 21 : 응.
학생 17 : 이야 내가 드디어 찾았다.

(단계 5) 근과 계수의 관계를 이용하여 앞의 단계에서 구한 세 종류의 식을 근으로 하는 삼차방정식을 만들도록 하였다.

$$\Phi_0 = x_1x_2 + x_3x_4,\quad \Phi_1 = x_1x_3 + x_2x_4,\quad \Phi_2 = x_1x_4 + x_2x_3$$

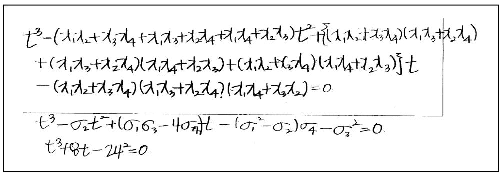
일 때, Φ_1, Φ_2, Φ_3를 근으로 하는 삼차방정식의 근과 계수의 관계는 사차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 나타낼 수 있다. 결국, Φ_1, Φ_2, Φ_3를 세 근으로 하는 방정식을 만들 수 있다. 이를 위해 먼저 다음을 계산해 보도록 하였으며, 모둠별로 계산 결과를 확인하도록 하였다. 이때, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4은 사차방정식의 근과 계수와의 관계를 의미한다11). 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \sigma_2$$

$$\begin{aligned}\Phi_0\Phi_1 + \Phi_1\Phi_2 + \Phi_2\Phi_0 &= (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4) + (x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3) \\ &\quad + (x_1x_4 + x_2x_3)(x_1x_2 + x_3x_4) \\ &= \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4\end{aligned}$$

$$\Phi_0\Phi_1\Phi_2 = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3) = (\sigma_1^2 - \sigma_2)\sigma_4 - \sigma_3^2$$

[그림 Ⅳ-18]은 학생 18이 이를 이용하여 만들어낸 삼차방정식이다.



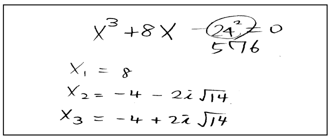
[그림 Ⅳ-18] 학생 18이 찾은 삼차방정식12)

---

11) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} = \sigma_1,\quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a} = \sigma_2$

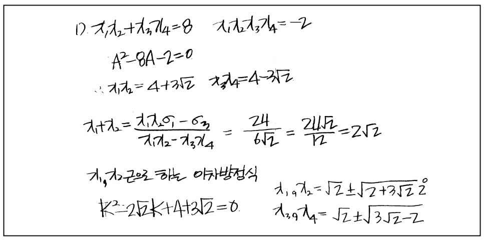
$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 = -\dfrac{d}{a} = \sigma_3,\quad x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a} = \sigma_4$

(단계 6) (단계 5)에서 만든 삼차방정식의 해를 구하는 단계이다. 이 단계에서는 계산과정을 반복하지 않도록 하기 위해 앞 시간에 해결했던 삼차방정식을 이용하도록 식 자체를 구성해 놓았다. [그림 Ⅳ-19]는 학생 2가 찾은 삼차방정식의 근이다.



[그림 Ⅳ-19] 학생 2가 찾은 삼차방정식의 근

(단계 7) (단계 6)에서 구한 결과를 이용하여 이차방정식을 만들고 근을 구하도록 하였다. 여기서 주의할 점은 이차방정식을 두 번 만들어 계산해야 한다는 점이다. 계산을 돕기 위해 휴대폰을 이용하도록 하였다. [그림 Ⅳ-20]은 학생 18의 답안이다.



[그림 Ⅳ-20] 학생 18이 찾은 사차방정식의 근

4. 오차 이상의 방정식의 해법

일반적으로 오차 이상의 방정식은 근호로 풀이가 가능하지 않다. 지금까지 살펴본 방법을 이용하면, 오차방정식에서 근의 치환의 개수는 $5\times4\times3\times2\times1=120$(가지)이며, 치환에 의한 분해식의 값이 5가지보다 적게 분류할 수 있는 분해식을 찾아야 한다. 하지만 오차방정식에 대해서는 그러한 분해식을 찾을 수 없다. 즉, 오차방정식은 근호로 풀이가 가능하지 않다는 의미이다. 다음은 이러한 것을 설명하는 과정에서의 대화이다.

교　사 : 따라서 오차 이상의 방정식은 근호로 풀이가 가능하지 않아요.
학생 2 : 선생님, 근데 상반방정식은 되잖아요.
교　사 : 그렇죠. 특수한 경우는 가능해요.

학생의 의문은 오차방정식에서도 가능한 경우가 있으며, 이 경우는 왜 가능한지를 묻고 있다. 만약, 상반방정식이나 $x^5=1$과 같이 방정식의 근들이 충분한 대칭성을 가진다면 근호로 풀이가 가능할 수 있다. 학생의 질문은 교사의 설명에 대한 반례를 제시한 것으로, 질문에 의해 방정식이 근호로 풀이가 가능한가의 여부는 방정식에 숨어있는 대칭성의 정도에 의해 결정된다는 것을 강조할 수 있었다. 이러한 수업을 통해 학생들은 방정식의

---

12) 분해식의 값 Φ_1, Φ_2, Φ_3를 세 근으로 하는 삼차방정식이며, 보조방정식 또는 분해방정식이라고 부른다.

해를 단순히 구하는 데에 그치지 않고, 방정식이 근호로 풀이되는 경우의 대칭성의 의의를 이해하고 있었으며, 나아가 오차 이상의 방정식의 근호 풀이는 불가능하다는 사실에 자신들이 경험한 반례를 들며 반박하는 등 발전적 사고와 태도를 보여주고 있다.

5. 수업에 대한 학생들의 반응

수업이 실시된 후, 대칭성 및 근과 계수의 관계의 중요성에 대한 학생들의 이해도와 생각을 묻기 위해 설문조사를 하였다. 설문 문항은 크게 두 가지로 구성하였다. 첫 번째 문항은 '방정식의 해법에서 가장 중요한 요소가 어떤 것이라 생각하나요?'이다. [그림 Ⅳ-21]은 순서대로 이에 대한 학생 1, 9, 14, 7의 설문결과이다.

(1) 아이디어와 대칭	(2) 분해식 찾아내는 것
(3) 근과계수의 관계	(4) 분해식를 찾아내고, 근과 계수의 관계와 연결짓는 걸

[그림 Ⅳ-21] 학생들의 설문결과 예시

첫 번째 문항의 조사 결과에 따르면, 위의 예시와 같이 네 가지 반응으로 분류할 수 있다. (1)의 응답과 같이 '대칭'이라는 용어나 의미를 제시한 학생이 3명, (2)와 같이 분해식이 중요하다고 대답한 학생이 8명이었다. (3)과 같이 근과 계수의 관계라고 응답한 학생이 4명, (4)와 같이 분해식과 근과 계수의 관계를 함께 제시한 학생이 6명이었다. 즉, 학생들은 이 수업을 통해 방정식의 해법에서 중요한 것으로 분해식과 근과 계수의 관계를 들고 있다.

두 번째 문항은 '수업 이후 느낀 점에 대해 자유롭게 작성해 보세요.'이다. 설문조사 결과를 살펴보면 계산이 복잡하거나 어려웠음을 표현한 학생이 14명이었다. 그런데 학생들의 응답을 살펴보면 '처음에는 계산하는 것이 힘들어서 좀 그랬는데, 나중에 내가 알던 그 식이 나오고, 답을 구하는 것을 보니 신기하고, 원래 수학은 그냥 힘들고 포기하고 싶은 걸로 생각했는데 이걸 하니 재미있었다.(학생 8)', '하는 도중에 굉장히 복잡했지만 그래도 재미있었다.(학생 26)', '수업이 진짜 어려웠고 계산하는 게 힘들었지만 신기했다.(학생 5)'와 같이 어려웠지만 신기하고 재미있었다고 응답한 학생들이 대부분이다. 또한, 단순히 재미있었음을 표현한 학생도 있었으며, 학생들 중 20명이 수업에 대해 신기해하거나 흥미를 느꼈다고 답하였다.

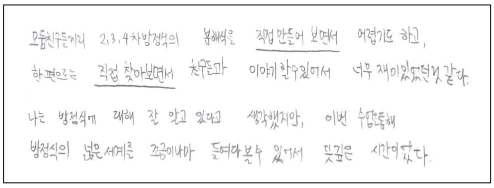
흥미에서 더 나아가 방정식의 해법에 대한 자신감과 방법을 알게 되었다고 언급한 응답도 있었다. '방정식을 푸는 방법을 잘 이해할 수 있었고, 방정식에 흥미가 생겼고, 재밌었다.(학생 14)', '방정식에 한층 자신감이 생겼다.(학생 1)', 'n차 방정식의 풀이법에 대해 예전보다 잘 알게 되었다.(학생 4)', '처음에는 구하는 과정이 길어서 어려울 것 같았다. 그래도 하다 보니 답이 나와서 뿌듯했다. 고차방정식을 풀 수 있는 방법을 알게 됐다.(학생 22)'와 같이 수업을 통해 방정식의 해법에 흥미를 가졌고, 이를 통해 자신감을 가지게 되었음을 알 수 있다.

한편, '이전에는 방정식을 풀 때 있던 공식으로 풀었다면 이번 수업을 통해서 실제 공식도 직접 만들어보고 더 깊게 알 수 있어서 머리는 아팠지만 유익했다.(학생 9)', '어렵고 이해하기 힘든 부분이 많았다. 원래 공식만 알고 있었지만 그것 말고 좀 더 깊은 수학 공부를 한 것 같다.(학생 12)', '내가 아는 근의 공식은 이차방정식의 근의 공식뿐인데 이번 수업을 하면서 삼차, 사차방정식의 분해식을 이용하는 과정이 복잡하고 어려웠지만 해를 구했을 때 정말 재미있었다.(학생 23)'와 같은 응답을 통하여 근의 공식이 방정식의 유일한 해법이 아니며, 다른 해법이 있다는 사실을 학생들은 이해했음을 보여주었다.

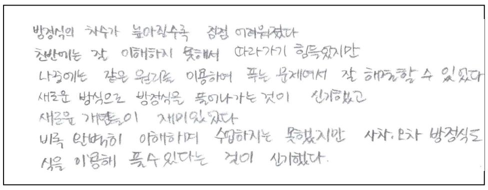
근과 계수의 관계를 언급한 학생들도 있다. 학생들의 응답을 살펴보면 '근과 계수의 관계를 이용하는 것이 신기했고 계산은 어려웠다. 계산 실수를 고쳐야겠다.(학생 27)', '평소에 그냥 외우기만 했던 근과 계수의 관계를 원

리를 알아보고 증명하고 왜 이런 식이 나오는지 알 수 있어서 좋았다. 이번 기회에 근과 계수의 관계는 절대 잊지 못할 꺼 같다.(학생 10)'와 같이 근과 계수의 관계의 중요성을 이해하고 있음을 알 수 있었다.

그리고 방정식의 풀이에서 분해식 또는 공통적인 원리가 있음을 언급한 경우도 있었다. [그림 Ⅳ-22]와 [그림 Ⅳ-23]은 이에 대한 학생들의 응답 사례이다. 학생 15는 직접 분해식을 찾아냈다는 사실과 방정식을 보다 깊게 살펴볼 수 있었다는 것을 이야기하며 흥미로워함을 알 수 있다. 또한, 학생 21은 방정식을 해결해 나가는 과정에서 공통의 원리가 적용되고 있다는 점과 방정식의 다양한 풀이방법이 있음을 통해 수학에 흥미를 느끼고 있다.


모둠친구들끼리 2,3,4차방정식의 분해식을 직접 만들어 보면서 어렵기도 하고,
한편으로는 직접 찾아보면서 친구들과 이야기할수있어서 너무 재미있었던것 같다.
나는 방정식에 대해 잘 알고 있다고 생각했지만, 이번 수업을통해
방정식의 넓은 세계를 조금이나마 들여다 볼수 있어서 뜻깊은 시간이었다.

[그림 Ⅳ-22] 학생 15의 설문지 2번 문항


방정식의 차수가 높아질수록 점점 어려워졌다
초반에는 잘 이해하지 못해서 따라가기 힘들었지만
나중에는 같은 원리를 이용하여 푸는 문제에서 잘 해결할 수 있었다
새로운 방식으로 방정식을 풀어나가는 것이 신기했고
새로운 개념들이 재미있었다
비록 완벽히 이해하며 수업하지는 못했지만 사차·오차 방정식도
식을 이용해 풀수 있다는 것이 신기했다.

[그림 Ⅳ-23] 학생 21의 설문지 2번 문항

이외에도 '대수의 군의 개념을 탄생시킨 이 정리가 신기했다. 몇 백년간 거쳐서 발견된 정리를 단시간 안에 다 배워야 했던 것이 조금 아쉬웠지만 재미있었다.(학생 2)'와 같은 답안도 있었다.

Ⅲ. 결론 및 제언

학교수학에서 방정식은 '방정식을 풀어 해를 구하는 것'이라는 인식이 있어 왔다. 이 생각 속에는 방정식의 해는 항상 구할 수 있는 것이며, 따라서 알고리즘을 잘 익히면 기계적 계산으로 해를 구할 수 있다는 사고가 들어있다. 실제로 2007 개정 수학과 교육과정 해설(교육과학기술부, 2008)을 보면, '문자와 식' 영역의 <지도의 의의>에서 '문제를 이해하고 답을 구하는 문제에서, 문자를 사용하여 미지수를 나타내면 문제의 뜻에 맞는 식을 세울 수 있다. 식이 세워지면 대부분의 경우 그 다음부터는 형식적인 계산이 가능하게 되고, 계산 과정에 착오만 없다면 답을 정확하게 이끌어낼 수 있게 된다. (중략) 식을 세운다는 것은 방정식이나 부등식을 세우는 것을 말하는데, 방정식과 부등식은 여러 가지 문제 해결에 중요한 도구가 될 수 있다.'라고 하여 문제해결수단으로써의 방정식을 강조하고 있다. 하지만 방정식의 해법에 관한 관심은 단순히 해를 구할 수 있는 방법에 관한 것뿐 아니라 해의 존재성과 해를 구할 수 있는 조건인 대수적 구조에도 있어 왔다.

본 연구에서는 고등학교 1학년 수업을 통하여 단순히 방정식을 푼다는 것만이 아닌, 삼차 이상의 방정식에도 근의 공식이 항상 존재하는지, 근의 공식이 존재하지 않는다면 그것을 어떻게 판단하는지 등 방정식에 대한 체계적인 경험을 하게 하였다. 이러한 질문에 대한 답은 라그랑주의 방정식론에서 찾을 수 있는데, 본 수업에서는 그의 이론을 단계별로 구성하여 접근과 이해가 용이하게 하였다.

라그랑주 이론의 핵심은 대칭성과 근과 계수의 관계인데, 방정식에 대한 근의 공식이 존재한다면, 해는 오직 주어진 방정식의 계수에 의해 결정되며 계수들의 사칙연산과 근호를 통해서 구할 수 있다. 이러한 관점에서 모든 방정식을 풀기 위해서는 해당 방정식에 맞는 근의 공식이 존재해야 한다. 하지만 오차 이상의 방정식에 대해서는 근의 공식이 존재하지 않음이 알려져 있다. 그럼에도 학교수학에서는 이차방정식의 근의 공식만을 다루고, 나머지 다른 차수의 방정식의 근의 공식이나 공식의 존재 여부를 다루지 않고 있다. 이로 인해 학생들은 방정식의 해법과 관련한 본질적인 이해를 갖고 있지 못하며, 학교수학에서 다루는 근과 계수의 관계가 가지는 의의도

모른 채 방정식의 하나의 성질로써 수용하고 있는 실정이다.

방정식을 푸는 중요한 원칙은 차수는 낮추고 미지수의 수는 줄여가는 것이다. 그것은 이전 단계의 해법을 이용하여 방정식을 해결하고자 하는 사고로, 일차방정식과 이차방정식이 중요시 되는 이유이기도 하다. 이러한 관점에서 방정식의 모든 해의 치환을 찾고, 치환에 따르는 분해식이 갖는 값을 분류하고, 이를 근과 계수의 관계로 나타내는 과정을 통하여 방정식의 차수를 낮추는 과정을 거치게 된다. 즉, 방정식의 구조를 살피는 것이 방정식의 해법의 근본이며, 대칭의 관점에서 분해식을 찾고 방정식을 해결하는 것이 방정식의 풀이에서 중요하다. 따라서 방정식의 해를 구하기 위해서는 근과 계수의 관계와 방정식의 근으로 만든 분해식과의 관계를 탐구하고, 분해식을 근과 계수의 관계로 표현할 수 있어야 한다.

학생들은 수업을 통해 방정식의 해법에 관한 이러한 흐름과 내용을 이해했으며, 자신들이 학습했던 근과 계수의 관계가 가지는 의의를 인식하였다. 또한 방정식론에서의 대칭성의 의의도 재발견하였다. 하지만 복잡한 계산에 어려움을 보이거나 귀찮아하는 경향도 있었다.

이러한 연구는 학생들에게 방정식의 해법에 관한 기존의 관점과는 다른 관점과 체계적인 방정식에 대한 이해를 주려는 목적을 가지지만, 더불어 대수학에서의 군, 체 등과 연결되는 과정을 자연스럽게 이해할 수 있어 교사의 전문성 신장에도 기여한다. 클라인이 '이중단절(double-forgetting)[13]'이라 표현하였듯이 중등학교수학과 대학수학과의 연결성이 단절된 교사교육은 현대수학이 반영된 중등학교수학의 지도에 있어 본질적 지도를 어렵게 한다. 따라서 중등수학과 고등수학의 연결성을 수업으로 구성하고, 이를 수업에 적용하여 학생들의 반응을 고찰한 본 연구는 교사전문성 신장과 학생들의 수학에 대한 본질적인 이해에 도움을 준다고 할 수 있다. 하지만 계산의 복잡도나 추상적인 표상 등에 대한 어려움은 이 연구의 한계점이며, 이에 대한 후속 방안의 검토가 필요하다.

참 고 문 헌

고영미·이상욱 (2014). 라그랑주의 방정식론. 한국수학사학회지, 27(3), 165-182.

Koh, Y. M., Ree, S. W. (2014). Lagrange and Polynomial Equations. *Journal for History of Mathematics*, 27(3), 165-182.

교육과학기술부 (2008). 2007 고등학교 교육과정 해설 ⑤ 수학. 교육인적자원부.

Ministry of Education, Science and Technology (2008). *The 2007 Revised curriculum Guide for high Schools ⑤ Mathematics*. MEST.

김경희·김부윤 (2000). 유리계수 다항방정식의 해법에 대한 고찰. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 10, 351-379.

Kim, K. H., Kim, B. Y. (2000). A study on the solution of polynomial equations with rational coefficients. *Communications Mathematics Education*, 10, 351-379.

김응태·박승안 (2012). 현대대수학. 서울: 경문사.

Kim, E. T., Park, S. A. (2012). *Modern Algebra*. Seoul: KYUNGMOON PUBLISHERS.

남진영·박선용 (2002). 대칭성의 관점에서 본 '문제해결' 및 '군' 개념지도. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, 12(4), 509-521.

Nam, J. Y., Park. S. Y. (2002). Problem solving and teaching 'group concept' from the point of symmetry. *Journal of*

13) Freudenthal, Hans (1973)의 p. 164 참고.

Educational Research in Mathematics, 12(4), 509-521.
서울대학교 국정도서편찬위원회 (2003). 고급수학. 교육인적자원부.
Seoul National University Compilation Committee of National book (2003). *Advanced Mathematics*. Ministry of Education & Human Resources Development.
성기원 (1998). n차 방정식의 근과 계수의 관계에 대한 연구. 석사학위논문, 홍익대학교.
Seong, G. W. (1998). *The relation between the roots and the coefficients of polynomial equations*. Master's Thesis, Hongik University.
이대현 (2004). 방정식의 해법에 관한 소고. 한국수학사학회지, 17(1), 61-68.
Lee, D. H. (2004). A study on solution of equations. *Journal for History of Mathematics*, 17(1), 61-68.
Freudenthal, Hans (1973), *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Pub. Co.
Gowers, Timothy, June Barrow-Green, Imre Leader (2014). *The Princeton Companion to Mathematics1* (금종해 외 28명 역), 서울: 승산. (원저 2008년 출판)
Keum, J. H. et al. (2014). *The Princeton Companion to Mathematics1* (translation of the book by Gowers, Timothy, June Barrow-Green, Imre Leader. Princeton University Press, 2008). Seoul : Seungsan.
Hungerford, Thomas W. (2006). *Abstract Algebra : An Introduction,* Cleveland: Books/Cole.
Klein, Felix C. (2012). 19세기 수학의 발전에 대한 강의 (한경혜 역). 서울: 나남. (원저 1967년 출판)
Han, G. H. (2012). *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.* Jahrhunder (translation of the book by Klein, Felix C.. 1967). Seoul : Nanam Publishing House.
Kleiner, Israel (2012). 추상대수학의 역사 (김부윤・정영우 역). 서울: 경문사. (원저 2007년 출판)
Kim, B. Y., Chung, Y. W. (2012). *A History of Abstract Algebra* (translation of the book by Israel Kleiner. Birkhäuser Boston, 2007). Seoul : KYUNGMOON PUBLISHERS.
Ronan, Mark (2007). 몬스터 대칭군을 찾아서 (심재관 역). 서울 : 살림Math. (원저 2006년 출판)
Sim, J. G. (2007). *Symmetry and the Monster: The Story of One of the Greatest Quests of Mathematics* (translation of the book by Mark Ronan. Oxford University Press, 2006). Seoul : SalimMath.
The Inter-IREM Commision (1997). *History of Mathematics Histories of Problems*. Paris: Ellipses.
Wely. H. (1952). *Symmetry*. Princeton University Press.
片野善一郎 (2011). 수학사를 활용한 교재 연구 (김부윤・정영우 역), 서울: 경문사. (원저 1992년 출판)
Kim, B. Y., Chung, Y. W. (2011). *A Study on the textbooks using Mathematical History* (translation of the book by Zenichiro Katano. Meijitosho Shuppan Corporation, 1992). Seoul : KYUNGMOON PUBLISHERS.

Teaching the Solutions of Equation in view of Symmetry

Kim, Ji Hong
Gimhaejeil High School
E-mail : white-cloud@hanmail.net

Kim, Boo Yoon
Pusan National University
E-mail : kimby@pusan.ac.kr

Chung, Young Woo†
Kyungsung University
E-mail : nahime02@ks.ac.kr

Based on Lagrange's general theory of algebraic equations, by applying the solution of the equation using the relationship between roots and coefficients to the high school 1st grade class, the purpose of this study is to recognize the significance of symmetry associated with the solution of the equation. Symmetry is the core idea of Lagrange's general theory of algebraic equations, and the relationship between roots and coefficients is an important means in the solution. Through the lesson, students recognized the significance of learning about the relationship between roots and coefficients, and understanded the idea of symmetry and were interested in new solutions.

These studies gives not only the local experience of solutions of the equations dealing in school mathematics, but the systematics experience of general theory of algebraic equations by the didactical organization, and should be understood the connections between knowledges related to the solutions of the equation in a viewpoint of the mathematical history.

* ZDM Classification : D34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key words : equation, symmetry, resolvent, the relationship between roots and coefficients
† Corresponding author