韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2015.29.4.661
제 29집 제 4호, 2015. 11. 661-685

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 29, No. 4, Nov. 2015. 661-685

다항식의 해법에 대한 수학교사의 대수 내용지식과 자립연수 가능성 탐색

신 현 용 (한국교원대학교)
한 인 기 (경상대학교)†

본 연구는 수학교사의 전문성을 신장시킬 수 있는 구체적인 가능성을 탐색하는 연구로, 다항식의 해법에 대한 수학교사의 대수 내용지식을 선정하고, 선정된 내용지식을 바탕으로 수학교사의 자립연수를 위한 학습 자료를 개발하였다. 개발된 학습 자료는 수학교사들에게 제공되었으며, 학습 자료가 자립연수에서 활용 가능한지, 수학교사들이 이해 가능한지 등에 대해 검사지로 조사하였고, 연수 방법 및 내용에 대해서도 설문을 하였다. 교사들의 대답을 분석한 결과, 개발된 학습 자료는 자립연수의 활용 가능성, 교사들의 이해 가능성, 연수 방법에 대해 긍정적인 결과를 얻었다.

Ⅰ. 서론

수학자에게 필요한 수학과 수학교사에게 필요한 수학이 같을 수는 없을 것이다. 박한식(1998, p.25)은 수학교사를 위한 수학을 개념화하면서 '그 나라의 수학교육의 현실에 따라서 교원양성대학에서 학교수학에 대한 보다 철저한 연구-이것을 수학교사를 위한 수학 또는 교직수학이라고 한다면-의 취급여부를 결정해야 할 것'이라고 하였다. 그 후 우리나라에서는 수학교사를 위한 수학, 예비 수학교사를 위한 수학에 대한 논의가 폭넓게 진행되고 있다. 특히 수학교사 임용시험에 대한 많은 관심 속에서 예비 수학교사에게 필요한 수학 교과의 내용지식에 대해서는 일정 수준에서 의미있는 논의가 이루어졌다(특히 한국교육과정평가원(2008)에서는 수학 교사 자격 기준 개발과 평가 영역 상세화 및 수업 능력 평가에 대한 연구보고서를 통해, 예비 수학교사들에게 요구되는 수학 교과내용의 범위와 수준에 대한 기준을 제시하였다).

한편 수학교사를 위한 수학은 PCK(Pedagogical Content Knowledge)와 연결될 수 있다. PCK는 최근에 교과교육학 분야에서 폭넓게 논의되고 있는 연구 영역인데, 최승현·황혜정(2008, p.570)은 '교사의 수업 전문성의 핵심은 수학을 지도하는데 요구되는 적절한 교과내용 지식과 이를 다루는데 요구되는 방법적 지식, 상황 지식, 그리고 학생 이해 지식 등의 부문별 지식이 결합되어 나타나는 교사의 종합적인 실천지인 내용 교수 지식(Pedagogical Content Knowledge)'라고 하였다. 즉 PCK의 개념은 수학 교과내용 지식, 교수 방법적 지식, 수학교육을 둘러싼 상황에 대한 지식, 학생의 수학 교과 이해에 대한 지식 등을 포함하며, 수학교사의 전문성을 신장시키는 필요조건임을 주장하였다. 한편 송근영·방정숙(2013)은 교수학적 내용지식, 내용 교수 지식 등을 PCK로, 수학 내용지식을 SMK(Subject Matter Knowledge) 개념으로 세분화시켜 나타냈다. 수학교사에게 필요한 수학을 PCK 또는 SMK의 범주로 개념화하는 것은 그러한 수학 내용지식이 중등학교 수학교육의 개선, 교사의 전문성 신장 등에 중요한 역할을 한다는 것을 간접적으로 드러내고 있다고 할 수 있다.

수학교사의 내용지식에 대한 연구는 크게 두 방향으로 진행될 수 있을 것이다. 첫 번째 방향은 순수수학(일반적으로 대학교 수준 이상에서 다루어지는 고등수학을 의미함)으로부터 출발하여 학교수학의 본질, 학교수학의

---

* 접수일(2015년 10월 12일), 심사(수정)일(2015년 10월 22일), 게재확정일(2015년 10월 26일)
* ZDM분류 : U15
* MSC2000분류 : 97U99
* 주제어 : 다항식의 해법, 수학교사, 대수 내용지식, 자립연수
† 교신저자 : inkiski@gnu.ac.kr

배경, 학교수학의 이론적 근거 등을 밝히는 연구이며, 두 번째 방향은 학교수학으로부터 출발하여 순수수학과의 연결성을 확인하면서 학교수학의 이론적 폭과 깊이를 확장하는 연구이다. 두 연구 방향 모두 수학교사에게 필요한 수학 내용지식 연구에서 의미있는 결과를 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

많은 국내 연구들(이종학, 2014; 이승훈·조완영, 2013; 강영란·조정수·김진환, 2012 등)은 두 번째 연구 방향과 관련하여 진행되어 왔으며, 첫 번째 연구 방향에 관련하여서는 연구가 다양하게 이루어지지는 못했다. 특히 수학교사에게 필요한 내용지식을 선정하여, 그것을 교사들이 직접 학습할 수 있는 수준으로 구체화시킨 학습 자료를 개발하고, 학습 자료의 활용 가능성을 조사한 연구는 거의 없는 실정이다.

본 연구는 첫 번째 연구 방향과 관련된다. 본 연구에서는 다항식의 해법에 대한 수학교사의 대수 내용지식을 선정할 것이며, 선정된 내용지식은 수학교사들이 이용할 수 있는 학습 자료 수준으로 구체화될 것이다. 이때 학습 자료의 구성 및 조직은 교수 중심의 강의 자료가 아니라, 수학교사들의 조별 토론학습을 통한 자립연수 가능성에 중점을 두고 개발할 것이다. 그리고 학습 자료가 중등학교 수학교사들을 대상으로 자립연수에 적합한지, 수학교사들이 이해할 수 있는 내용과 수준인지에 대해 확인할 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 다항식의 풀이

다항식의 풀이는 수학사에서도 오랜 역사를 가지고 있으며, 중등학교 수학교과서에서도 주변 현상의 수학화 또는 수학의 활용과 관련하여 중요하게 다루어지고 있다. 특히 우리나라 수학 교육과정은 대수적인 성격이 강하므로 다항식, 방정식의 풀이는 수학 교육과정 전반에 걸쳐 핵심적인 위치를 차지하고 있다. 다항식, 방정식의 풀이와 직접적으로 관련된 중등학교 수학에 제시된 주제들은 <표 Ⅱ-1>과 같다.

<표 Ⅱ-1> 다항식, 방정식의 풀이와 관련된 중등학교 수학 내용

학교 급 또는 학년	대수학 내용
중학교 1학년	·수와 연산: 정수와 유리수의 연산 ·문자와 식: 일차방정식 ·도형의 기초: 작도와 합동
중학교 2학년	·결합법칙 등 다양한 연산법칙 ·지수와 거듭제곱 ·다항식의 연산 ·연립방정식의 풀이
중학교 3학년	·제곱근과 무리수 ·인수분해
고등학교 수학 Ⅰ	·다항식의 차수, 다항식의 인수분해 ·나눗셈정리, 기약다항식

고등학교의 ‘수학 Ⅱ,’ ‘미적분학,’ ‘기하와 벡터,’ ‘확률과 통계’에서도 다양한 연산, 대응(함수), 벡터의 연산, 직선과 원의 방정식 등에서 <표 Ⅱ-1>에 제시된 주제들과 연결된 내용들을 찾을 수 있다.

한편, 일차다항식 $3x+2$를 푼다는 것은 일차방정식 $3x+2=0$의 해 $-\frac{2}{3}$를 구하는 것이며, 이차다항식, 삼

차다항식, 사차다항식 등에 대해서도 유사하게 생각할 수 있다. 예를 들어, 삼차다항식 x^3-3x-4를 푸는 것은 삼차방정식 $x^3-3x-4=0$의 해를 구하는 것이다. 실제로 $x^3-3x-4=0$을 풀면, 세 개의 해 $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega^2$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega^2+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega$를 구할 수 있다(이때 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 이다).

다항식의 풀이에 관련된 중등학교의 수학교과서의 내용을 살펴보면, 어떻게 식을 변형시켜 근을 얻게 되는지를 중심으로 방정식의 해법을 다루고 있다. 그러나 정수 계수인 일차방정식 $ax+b=0$의 해는 $x=-\dfrac{b}{a}$와 같이 유리수로 표현되며, 유리수 계수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해는 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$와 같이 유리수와 무리수, 즉 실수로 표현된다는 것 자체에 대해서는 깊은 논의가 이루어지지 않는다. 이것은 다항식의 가해성(solvability)과 연결되므로, 대수학적으로는 의미있는 논의가 될 것이다. 유리수를 계수로 가지는 일차다항식, 이차다항식, 삼차다항식, 사차다항식의 근과 관련하여, 다음을 생각할 수 있다.

·유리계수 일차다항식 $ax+b$를 생각하자. 다항식의 계수인 유리수에 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈만을 사용하여 얻을 수 있는 수 전체의 집합을 R_0이라고 하자. 그러면 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$는 덧셈과 곱셈에 관하여 체이므로 $R_0=\mathbb{Q}$이며, 이 일차다항식의 근은 $R_0=\mathbb{Q}$에 속한다.

·유리계수 이차다항식 ax^2+bx+c를 생각하자. R_0에 속하는 수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 또는 제곱근만을 사용하여 얻을 수 있는 수 전체의 집합을 R_1이라고 하자. 그러면 이 이차다항식의 근은 R_1에 속한다.

·유리계수 삼차다항식 ax^3+bx^2+cx+d를 생각하자. R_1에 속하는 수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 또는 세제곱근만을 사용하여 얻을 수 있는 수 전체의 집합을 R_2라 하자. 그러면 이 삼차다항식의 근은 R_2에 속한다.

·유리계수 사차다항식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$를 생각하자. R_2에 속하는 수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 또는 제곱근만을 사용하여 얻을 수 있는 수 전체의 집합을 R_3라 하고, R_3에 속하는 수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 또는 제곱근만을 사용하여 얻을 수 있는 수 전체의 집합을 R_4라 하면, 이 사차다항식의 근은 R_4에 속한다.

어떤 다항식의 모든 근이 위의 과정을 유한 번 반복하여 표현될 수 있을 때, 그 다항식을 가해다항식이라고 한다. 이 경우에는 제곱근과 세제곱근 외에 오제곱근 등 다른 거듭제곱근도 사용할 수 있다. 네제곱근 등은 제곱근의 제곱근으로 나타낼 수 있으므로 거듭제곱근은 소수거듭제곱근만을 뜻하는 것으로 할 수 있다.

한편, 살펴본 다항식의 근들은 일정한 알고리즘에 의하여 구할 수 있다. 일차다항식 $ax+b$의 근은 $x=-\dfrac{b}{a}$이며, 이차다항식 ax^2+bx+c의 근은 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이다. 삼차다항식과 사차다항식의 근도 일정한 절차에 따라 구할 수 있다. 가해다항식의 근을 구하는 알고리즘을 근의 공식이라 부른다.

일반적으로 다음의 표현들은 같은 의미로 사용된다: 다항식을 풀 수 있다; 다항식의 근의 공식이 존재한다; 다항식을 거듭제곱근을 사용하여 풀 수 있다(solvable by radicals); 가해다항식이다.

2. 수학교사의 추상대수학 내용지식에 대한 선행 연구 분석

국내에서 수학교사의 수학 내용지식에 관련된 연구들이 2000년대 초반부터 지금까지 이루어지고 있다. 이 연구들에서는 수학교사에게 필요한 추상대수학, 해석학, 수학교육학, 수학사, 확률과 통계, 이산수학, 기하학 등 분

야의 내용지식을 정선하고, 해당 영역의 교재, 교수-학습 자료 및 방법 등을 제안하였다. 이들 중에서 추상대수학에 관련된 것으로는 신현용(2003), 한인기·신현용(2003), 이기석(2003), 박혜숙·김서령·김완순(2005), 신현용·이강섭·한인기·류익승(2005), 한국교육과정평가원(2008) 등을 들 수 있다. 이 연구들 중에서 추상대수학 내용지식의 선정에 관련된 연구를 살펴보자.

신현용 외(2003)는 추상대수학 강좌에서 다루어야 하는 내용으로, 군, 환, 벡터 공간의 정의와 예, 부분군, 부분환, 부분 공간, Lagrange 정리, 정규부분군, 이데알, 군준동형사상, 환준동형사상, 선형사상, 직합, 순환군, 단항이데알정역, 군과 환의 만남, 가해군, 극대이데알과 유한체의 구성, 확대체와 작도 가능성, 분해체, Galois 군, Galois 확대체, Galois 이론의 기본 정리, 다항식의 가해성의 내용을 제시하였다. 이 연구는 국내에서는 처음으로 예비 수학교사들이 학습할 추상대수학 내용지식의 범위와 수준을 체계적으로 분석, 논의하여 제안하였다는 점에서 가치를 둘 수 있을 것이다.

한편 한인기·신현용(2003)은 러시아의 수학교사 양성을 위한 국가 수준 교육과정을 분석하여, 추상대수학 분야에서 예비 수학교사들에게 군·환·체의 개념, 대수적 체계, 잉여환, 복소수체, 체위의 다항식환, 나머지정리, 연립일차방정식, 행렬과 행렬식, 벡터 공간, 유클리드 공간, 선형 변환과 이들의 행렬, 고유벡터와 선형변환의 고유치, 부분군, 부분군에 의한 잉여류, 상군, 부분환, 이데알, 상환, 주이데알 정역, 유클리드 정역, 유일인수분해정역, 다변수다항식, 대칭다항식, 복소수체의 대수적 닫힘성, 실수체에서 기약다항식, 체의 확장, 대수적 확대체와 유한확대체, 자와 컴퍼스를 이용한 작도 문제의 주제가 다루어진다는 것을 소개하였다.

<표 II-2> 현대대수학 I 과 현대대수학 II 의 내용(이기석, 2003)

<table>
<tr><th colspan="2">현대대수학 I</th><th colspan="2">현대대수학 II</th></tr>
<tr><th>제1부</th><th>제2부</th><th>제1부</th><th>제2부</th></tr>
<tr><td>·군·환, 벡터공간의 정의와 예
·부분구조: 군·환, 벡터공간의 부분구조
·정규부분군, 이데알, 부분벡터공간
·상(quotient)구조: 군·환, 벡터공간의 상구조
·군·환 준동형사상, 동형사상
·체의 정의와 예, 유한체
·체위의 다항식환: 나눗셈 알고리듬, 기약다항식, 동치류의 정의와 연산</td><td>·직적
·유한아벨군
·실로우 정리
·공액
·유한아벨군의 구조
·유클리드 정역
·주이데알정역
·이차수, ·유리수체
·다항식환의 유일 인수분해 정역
·중국인의 나머지정리</td><td>·역수, ·원분다항식
·$\mathbb{Q}[x]$: 유리수 계수 다항식환, 단순확대체
·대수적 확대체
·정규확대체, 분해체
·갈루아군, 가해군
·대칭군, 교대군
·교대군의 단순성
·갈루아대응
·갈루아이론의 기본 정리
·갈루아 규준</td><td>·표수
·유한체
·분리성
·정규확대체
·갈루아이론의 기본 정리
·작도 가능성</td></tr>
</table>

이기석(2003)은 갈루아이론을 중심으로 현대대수학의 교재를 재구성할 것을 주장하면서, 현대대수학 I 과 현대대수학 II 에서 다루어야 하는 내용들을 <표 II-2>와 같이 제시하였다. 이때 현대대수학 I 은 제1부와 제2부로 나뉘는데, 제1부에서는 군·환·체, 벡터공간의 기본 개념을 다루며, 제2부는 심화학습을 하고자 하는 경우에 필요한 내용으로 제안하였다. 한편 현대대수학 II 도 제1부와 제2부로 나누었는데, 제1부에서는 기초체의 표수가 0인 경우의 갈루아이론을 다루고, 제2부에서는 일반적인 경우의 갈루아이론을 다루면서 심화학습의 경우에 필요한 경우로 제안하였다. 현대대수학의 교재를 갈루아이론을 중심으로 구성하자는 이기석(2003)의 관점에 대해서는 이의가 많지 않을 것이나, 기초체의 표수가 0이 아닌 경우까지를 교사양성과정에서 다루는 데에는 연구가 좀 더 필요할 것으로 생각된다.

<표 Ⅱ-3> 한국교육과정평가원(2008)에서 제시한 추상대수학의 평가영역

영역	내용 요소
군	군의 개념과 기본 성질, 부분군, 치환군, 순환군, 잉여류와 라그랑주의 정리, 준동형과 인자군, 대칭군과 교대군, 직적과 직합, 유한아벨군, 실로우 정리 및 유한군의 구조
환	환의 개념과 기본 성질, 부분환, 아이디얼, 정역, 체, 극대와 소아이디얼, 잉여환, 유클리드 정역, 주아이디얼 정역, 유일 인수분해 정역, 다항식환, 기약다항식, 아이젠슈타인의 판정법, 정역의 분수체, 표수
체	확대체, 단순 확대, 대수적 확대, 분해체, 분리체, 유한체, 작도가능성, 갈루아이론

한국교육과정평가원(2008)에서 제시한 수학교사 자격기준 개발에서는 추상대수학에서 <표 Ⅱ-3>의 내용을 필수적인 평가영역으로 규정하고 있다. 이 연구에서 제시한 평가 내용 요소들을 살펴보면, 신현용 외(2003)와 이기석(2003)에서 제시한 내용 영역과 크게 다르지 않다는 것을 알 수 있다. 세 연구 모두에서 대학교의 추상대수학 교과에서는 갈루아이론까지를 다루도록 하였는데, 이것은 추상대수학의 본질, 추상대수학의 역사 등을 고려하면 타당한 주장이라고 할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 이러한 연구들을 바탕으로 다항식 해법에 대한 수학교사의 내용지식을 선정할 때에, 수학교사들이 갈루아군의 계산, 갈루아이론의 심도있는 이해를 하고, 이를 바탕으로 다항식의 해법에 대한 수학적인 이해가 가능하도록 할 것이다.

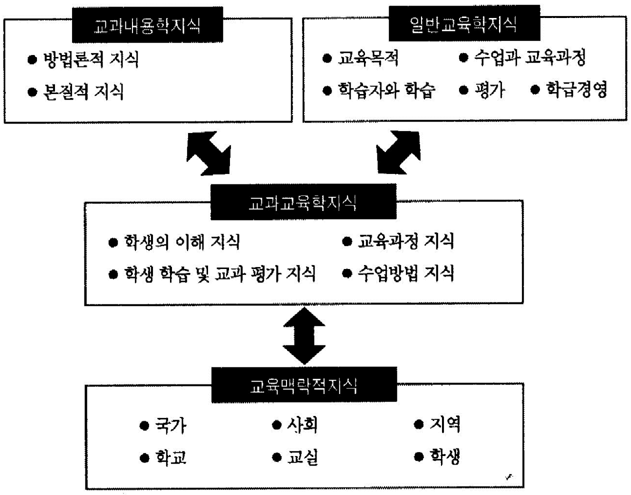
3. 수학교사의 재교육 및 연수

수학교사의 재교육 및 연수는 중등학교 수학교육의 질적 수준을 향상시키는 중요한 도구 중의 하나이다. 현재 전국 시도 교육청, 대학교에서 수학교과에서 다양한 재교육 프로그램과 연수 프로그램이 운영되고 있다. 그리고 수학교육학 연구에서도 수학교사의 전문성 신장을 위한 재교육 및 연수의 내용과 방법에 대해서 폭넓은 논의가 진행되고 있다.

권오남·박정숙·박지현·조형미(2014), 김남희(2014), 한국과학창의재단(2010) 등은 수학교사의 전문성 신장을 위해 재교육 및 연수의 중요성을 강조하면서 수학교사 재교육 및 연수 프로그램을 제안하고, 구체적인 실행 방안을 제시하였다. 이 연구들은 수학 교과교육학의 관점에서 교사 공동체, 교수 방법 등에 초점을 맞추어 진행되었다.

한국과학창의재단(2010)은 [그림 Ⅱ-1]에서 보는 것과 같이, 교사지식의 구성요소에 교과내용학 지식, 일반 교육학지식을 포함하는 교사지식의 구성요소 모형을 제시하였다. 이 모형을 보면, 일반교육학적 지식만으로 또는 수학 교과내용학적 지식만으로는 수학교사의 전문성 신장을 기대하기 어렵다는 것을 알 수 있다. 그러므로 교육학적 관점에서 또는 수학 교과내용학적 관점에서 다양하게 수학교사의 전문성 신장을 위한 재교육 및 연구 방안, 프로그램을 개발하는 것은 가치로운 일이 될 것이다.

국내의 수학교육학 연구들을 분석하면, 교과내용학의 관점에서 전공수학의 내용을 학교수학과 관련시켜 수학교사의 전문성을 신장시키려 시도했던 연구는 찾아보기 힘들다. 본 연구는 교과내용학의 관점에서 수학교사에게 필요한 다항식의 해법에 대한 대수 내용지식을 선정하고, 이 내용지식을 바탕으로 조별 자립연수를 위한 학습자료를 개발하고, 개발된 자료들이 수학 교사들의 자립연수에 적합한지를 확인할 것이다. 본 연구의 조별 자립연수는 자기주도적 조별 토론학습과 전체 토론으로 구성되며, 교수자가 중심이 되어 연수과정을 조직하는 것이 아니라 연수자가 학습과정과 토론과정의 중심이 된다.



[그림 II-1] 교사지식의 구성요소(한국과학창의재단, 2010, p.16)

Ⅲ. 연구방법

1. 다항식 해법에 대한 수학교사의 대수 내용지식 및 자립연수 자료의 개발

다항식 해법에 대한 수학교사의 대수 내용지식 개발은 대수 내용지식의 선정과 수학교사 자립연수를 위한 학습자료 개발로 구성된다. 대수 내용지식을 선정하기 위해 첫째, 관련된 문헌들(이기석, 2003; 박혜숙·김서령·김완순, 2005; 신현용, 2003; 신현용 외, 2003; 신현용·이강섭·한인기·류익승, 2005; 한인기·신현용, 2003 등)을 분석하여 선행연구들에서 수학교사에게 필요한 대수 내용지식을 조사하였고, 둘째 수학교사 자격 기준개발에 제시된 대수 내용지식을 분석하였고(한국교육과정평가원, 2008), 셋째 예비교사의 추상대수학 교재들(김응태·박승안, 2011; 신현용, 2007; Fraleigh, 2009 등)을 분석하였고, 넷째 중등학교 수학 교육과정 및 수학교과서의 대수 영역을 분석하였다.

이러한 문헌 분석을 통해 중등학교 수학교사에게 필요한 다항식 해법에 관련된 대수 내용지식을 추출하였으며, 추출된 대수 내용지식에 대해 전문가 협의를 하였고 이를 통해 대수 내용지식을 선정하였다. 대수 내용지식 선정에 관련된 전문가 협의를 위해 예비교사의 수학교육을 담당하는 사범대학의 추상대수학 전문가 1인, 추상대수학의 내용지식에 대한 이해가 깊은 수학교육학 전문가 1인, 사범대학에서 수학교육학을 강의하는 수학교육학 전문가 1인, 수학교사 1인, 총 4인의 전문가를 선정하였다.

전문가 협의에서는 추상대수학의 핵심 개념들, 수학교사에게 필요한 추상대수학의 교과내용 지식의 범위와 깊이, 추상대수학과 중등학교 학교수학의 연계성, 본 연구진에 의해 추출된 대수 내용지식의 주제들, 구체적인 내용들의 타당성 등에 대한 논의가 이루어졌다.

본 연구에서는 전문가 협의를 통해 얻어진 논의 결과를 반영하여, 다항식 해법에 대한 최종적인 대수 내용지식을 선정하였다. 선정된 다항식 해법에 대한 대수 내용지식의 주제들은 <표 Ⅲ-1>과 같다. 본 연구에서는 <표 Ⅲ-1>의 선정된 대수 내용지식의 주제들을 상세화하여, 각 주제별 구체적인 학습내용, 학습내용의 범위와 수준을 제시하였고, 각 주제별 학습목표를 제시하였다(Ⅳ장의 연구 결과에 제시되어 있음). 그리고 학습 주제별로 토

의주제 및 과제를 제시하였다. 각 주제별 구체적인 내용들도 전문가들의 의견을 반영하여 수정, 보완하는 과정을 거쳤다.

<표 Ⅲ-1> 선정된 다항식 해법에 대한 대수 내용지식

주제명	주요 내용 및 핵심어
1. 대수학	다항식의 풀이, 대수학의 기본 정리, 갈루아 이론
2. 수체계	다항식의 풀이와 수체계의 확장
3. 대수적 구조	·수체계(자연수, 정수, 유리수, 자연수, 복소수)의 대수적 구조 ·다항식의 해, 최소확대체
4. 삼차/사차다항식의 풀이	·삼차/사차다항식에서 2차항/3차항을 소거하는 방법 ·근과 계수의 관계, 기본대칭다항식 ·삼차다항식과 대칭군 S_3와의 관계, 삼차다항식의 풀이 ·사차다항식과 대칭군 S_4와의 관계, 사차다항식의 풀이
5. 갈루아 이론	·이차다항식의 갈루아군, 이차다항식은 거듭제곱근으로 풀림 ·삼차다항식의 갈루아군, 삼차다항식은 거듭제곱근으로 풀림 ·사차다항식의 갈루아군, 사차다항식은 거듭제곱근으로 풀림 ·구체적인 삼차/사차다항식을 통해 갈루아 이론의 의미를 이해 ·갈루아군이 S_5인 오차다항식
6. 다항식의 풀이와 작도가능성	·작도가능성 문제의 대수적 성격 ·작도가능한 수와 거듭제곱근으로 나타낼 수 있는 수 ·정다각형 작도가능성 문제의 대수적 성격; ·정n각형의 작도가능성
7. 다항식 풀이의 역사적 발달 과정	·이차방정식의 풀이에 관련된 역사적 사실들 ·다항식의 해결에서 디오판토스의 연구 ·16세기 대수학 연구의 특징; ·17세기의 다항식 풀이에 관한 연구들 ·18세기 다항식 풀이에 대한 오일러의 업적 ·19세기 다항식의 풀이에 관한 새로운 접근: 라그랑주와 코시, 루피니와 아벨, 갈루아, 갈루아군의 계산, 정규부분군
8. 학교수학과 대수적 구조	·자연수 집합과 반군; ·범자연수 집합과 모노이드 ·$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$의 대수적 구조 ·확대체($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$); ·확대체와 벡터공간 ·근과 계수와의 관계에서 대칭성; ·판별식
9. 대수학의 응용	·정수론에서 대수학적 접근의 유용성; ·암호학에서 대수학의 역할 ·연립방정식의 풀이에서 대수학적 접근의 유용성 ·부호론에서 대수학의 역할
10. 대수학과 예술	·음악이론에서 대수학의 역할 ·디자인이론에서 대수학의 역할

한편 각 주제별 구체적인 학습내용, 학습내용의 범위와 수준, 학습목표에 근거하여, 본 연구에서는 수학교사의 자립연수를 위한 학습 자료의 초안을 개발하였고, 개발된 학습자료 초안에 대해 전문가 협의를 진행하여 학습자료 초안을 수정, 보완하여 최종 자립연수 자료를 개발하였다. 자립연수 자료 개발을 위한 전문가 협의에서는

대수 교과내용 지식 선정을 위해 협의했던 전문가 4인에 수학교사 2인을 추가하여 이루어졌다. 전문가 협의에서는 자립연수 자료의 체제, 형태, 내용 구성에 대한 논의가 이루어졌으며, 본 연구에서는 전문가 협의 결과를 반영하여 자립연수를 위한 학습 자료의 개발을 완료하였다.

수학교사들의 자립연수에 활용될 수 있는 학습 자료를 개발하므로, 교사들에게 제시될 학습 자료의 형태에 주목하였다. 본 연구에서는 자립연수의 효과를 높이기 위해, 학습 자료의 개발에서는 첫째 다항식의 해법에 대한 대수 내용지식의 설명 및 제시, 둘째 두 수학교사의 가상적인 대화, 셋째 토의주제 및 과제, 넷째 참고문헌이 포함되었다.

다항식의 해법에 대한 대수 내용지식의 설명 및 제시에서는 각 주제별 내용 지식의 개요, 관련된 수학 이론의 설명 및 제시가 중심을 이루며, 중등학교 수학 내용에 대한 다양한 예들도 함께 제시하여 교사들이 대수 내용지식의 이론적 이해의 폭을 넓힐 수 있도록 하였다. 두 수학교사의 가상적인 대화에서는 대수 내용지식에서 중요한 것, 발생 가능한 질문, 이론적 내용에 대한 배경, 수학사에 관련된 이야기가 폭넓게 제시되었다.

본 연구에서는 48쪽 분량의 자립연수를 위한 학습 자료를 개발하였고, 이 자료는 본 논문에는 포함시키지 못했으며, [그림 Ⅲ-1]에 제시된 QR코드로 접근하여 이용할 수 있다.

[그림 III-1] QR코드

2. 다항식 해법에 대한 자립연수 자료의 활용 가능성

개발된 다항식의 해법에 대한 자립연수 자료의 활용 가능성을 확인하기 위해, 본 연구에서는 00대학교 교육대학원에 재학 중인 현직 수학교사 36명을 대상으로 2015년 7월 28일부터 2015년 8월 11일까지 자립연수를 진행하였다. 자립연수는 개발된 학습 자료를 이용한 자기주도적 조별 토론학습과 전체 토론으로 구성된다. 조별 토론학습을 위해 연수자들을 4-5명으로 나누어 조로 만들었으며, 각 조별로 조장을 선정하도록 하였다.

자립연수는 연수자료 및 참고문헌의 제시, <표 Ⅲ-1>에 제시된 각 주제별 조별 토론학습, 전체 수학교사를 대상으로 각 조별 전체발표 및 토론으로 구성되었다. 연수자에게 제시된 참고문헌은 김응태·박승안(2011), 신현용(2011, 2009), 신현용·신혜선·나준영·신기철(2014), 신현용·유익승·문태선·신기철·신실라(2015)이며, 신현용(2016)은 파일로 제공하였다.

각 조별 토론학습은 정해진 주제에 대해 각 조별로 이루어졌으며, 전체발표 및 전체토론에는 연수자들 전체와 담당교수 1인이 함께 참여하였다. 이때 발표하는 조는 미리 준비한 주제에 대해 연수 자료의 내용을 중심으로 발표하였으며, 발표 후에 연수자들의 전체토론이 이어졌다. 전체토론은 하루에 한 주제씩 진행되었다.

전체토론에서는 발표 내용 자체에 대한 논의, 발표 주제에 관련된 다양한 물음들이 제기되었고, 연수자들이 스스로 답을 찾을 수 있도록 담당교수는 전체토론에 개입을 최소화하려고 하였다. 이때 담당교수는 대수 개념상의 오류나 전체토론의 정리 과정에서 부연 설명 등의 역할을 하였다. 전체토론은 각 주제별로 1-2시간 정도로 진행되었다.

한편 자립연수 자료의 활용 가능성과 적합성, 교사들의 이해 가능성을 확인하기 위해, 다항식의 해법에 대한 대수 내용지식에 대한 사전설문, 사후설문, 연수방법에 대한 설문을 시행하였다. 사전설문과 사후설문은 같은 문

항을 사용했으며, 사전설문지와 사후설문지의 문항은 총 7개로 구성되어 있다. 문항 1, 2, 3은 대수학의 개념, 대수학 분야의 유용성에 대한 문항이며, 문항 4, 5, 6, 7은 대수학과 다항식의 풀이의 관련성, 대수학의 개념들을 이용한 작문으로 구성되며, 개발된 자료의 적합성, 이해가능성에 관련된다. 설문 문항은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 Ⅲ-2> 사전설문과 사후설문

설문 문항
1. '대수학' 하면 가장 먼저 무슨 생각이 들며, 무엇이 떠오르는가?
2. 학교에서 수학을 가르칠 때, 학부시절에 수강한 정수론과 선형대수학 또는 추상(현대)대수학 등이 매우 유용하다고 여겨졌습니까? 그렇다면 어떤 점에서 그랬는지, 그렇지 않았다면 그 이유를 기술하시오.
3. 정수론, 선형대수학, 추상(현대)대수학 등이 음악이나 디자인, 또는 암호론이나 부호론 등 정보수학에 활용된다는 것을 알고 있습니까? 알고 있다면 어느 정도 알고 있는지 간략하게 기술하시오.
4. 추상(현대)대수학을 다항식의 풀이와 관련하여 설명하시오.
5. 다음 단어를 모두 사용하여 작문하시오: 군, 체, 벡터공간, 대수적 구조, 삼차다항식의 근의 공식, 사차다항식의 근의 공식, 오차다항식의 근의 공식, 갈루아 이론.
6. 다음 단어를 모두 사용하여 작문하시오: 확대체, 분해체, 갈루아군, 정규확대체, 정규부분군, 상군.
7. 다음 단어를 모두 사용하여 작문하시오: 대수학의 기본정리, 갈루아 이론의 기본정리, 가해다항식, 가해군.

한편, 연수 방법 및 연수 자료에 대한 설문은 5문항으로 구성되어 있으며, 문항 1, 2, 3은 연수 방법에 대한 문항이며, 문항 4, 5는 연수 자료의 활용가능성, 적합성, 이해가능성에 관련된 문항이다. 구체적인 질문은 <표 Ⅲ-3>과 같다.

<표 Ⅲ-3> 연수 방법 및 연수 자료에 대한 설문

설문 문항
1. 지금까지의 연수 방법의 좋은 점은 무엇입니까?
2. 지금까지의 연수 방법의 좋지 않은 점은 무엇입니까?
3. 현장 교사에게 유익한 대수학 연수로서 제안할 수 있는 강좌는 무엇입니까?
4. 연수 자료는 모둠원과 함께 읽고 논의하기에 적절합니까?
5. 동료 교사에게 추천할만한 자료입니까?

Ⅳ. 결과 및 논의

1. 다항식 해법에 대한 수학교사의 대수 내용지식

본 연구에서는 문헌연구, 전문가 협의를 통해, 다항식 해법에 대한 최종적인 대수 내용지식을 선정하였으며, <표 Ⅲ-1>에서 선정된 대수 내용지식의 주제들을 개략적으로 제시하였다. 이 주제들의 내용, 범위, 토의주제 및 과제를 자세히 살펴보자.

(1) 대수학

◦대수학의 기본 정리, 갈루아 이론을 통해 다항식의 풀이가 추상대수학의 중요한 주제라는 것을 안다.

대수학의 기본 정리에서는 다항식의 근의 존재성을 다루며, 추상대수학(또는 현대대수학)의 갈루아 이론은 다항식의 근의 형태에 관한 것으로 거듭제곱근을 사용하여 근을 구할 수 있는가 여부를 조사한다. 군이나 체 등의

개념들도 다항식의 풀이 과정에서 나오게 되기 때문에, 다항식의 풀이가 추상대수학의 중심축이라 할 수 있다.

(2) 수체계

◦다항식의 풀이 관점에서 수체계의 확장을 이해한다.

다항식 $x-2$의 근은 자연수 체계 $\mathbb{N}$에 존재하지만, 다항식 $x+2$의 근은 자연수 체계 $\mathbb{N}$에 존재하지 않으므로, $x+2$의 근이 존재하기 위해서는 수체계는 정수 체계 $\mathbb{Z}$로 확장되어야 한다. 다항식 $3x-2$의 근을 위해서는 유리수 체계 $\mathbb{Q}$, 이차다항식 x^2-2의 근을 위해서는 무리수를 포함하는 실수 체계 $\mathbb{R}$, 이차다항식 x^2+1의 근을 위해서는 복소수 체계 $\mathbb{C}$로 확장되어야 한다.

[토의주제 및 과제] 다항식의 풀이 관점과는 별도로, 수체계에 관해 다음을 조사하여라.

① 유리수 전체 집합의 조밀성과 가부번성; ② 실수 전체 집합의 완비성과 비가부번성

(3) 대수적 구조

◦수체계(자연수, 정수, 유리수, 자연수, 복소수)의 대수적 구조를 안다.

◦다항식의 해와 관련하여 최소확대체의 의미를 알고, 이를 구할 수 있다.

자연수 집합 $\mathbb{N}$은 덧셈에 대한 반군의 구조를 가지며, 0과 자연수 집합 $W=\{0\}\cup\mathbb{N}$은 덧셈에 관하여 모노이드의 구조를 가진다. 정수의 집합 $\mathbb{Z}$는 덧셈에 관하여 군의 구조를 가지며, 덧셈과 곱셈에 관하여는 환의 구조를 가진다. 유리수 집합 $\mathbb{Q}$, 실수 집합 $\mathbb{R}$, 복소수 집합 $\mathbb{C}$는 모두 덧셈과 곱셈에 관하여 체의 구조를 가진다.

[토의주제 및 과제]

① 반군과 모노이드의 구조는 군의 구조와 무엇이 다른지 조사하여라.

② 유리수체 $\mathbb{Q}$에 무리수 $\sqrt{2}$를 첨가하여 최소로 확장한 체, 즉 최소확대체는 $\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$임을 증명하고, 그 과정에서 '분모의 유리화'의 중요성에 대하여 논의하여라.

③ 실수체 $\mathbb{R}$에 $i=\sqrt{-1}$을 첨가하여 최소확대체는 $\mathbb{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{R}\}$임을 증명하고, 그 과정에서 '분모의 실수화'의 중요성에 대하여 논의하여라.

(4) 삼차/사차다항식의 풀이

1) 항의 소거

◦삼차/사차다항식에서 2차항/3차항을 소거하는 방법을 안다.

16세기에 삼차다항식과 사차다항식의 근을 구하는 방법이 알려졌다. 이를 위해, 삼차다항식 x^3+ax^2+bx+c에 $x=X-\dfrac{a}{3}$로 치환하여 2차항을 소거하고, 사차다항식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$에 $x=X-\dfrac{a}{4}$로 치환하여 3차항을 소거할 수 있다.

[토의주제 및 과제] 삼차다항식과 사차다항식 각각에서 특정한 항을 소거하는 방법을 이차다항식에 적용하면 이차다항식의 근의 공식을 얻을 수 있다는 것을 확인하여라.

2) 근과 계수의 관계

◦근과 계수의 관계에서 기본대칭다항식을 얻을 수 있다.

[토의주제 및 과제] 근과 계수의 관계에서 대칭의 역할에 관하여 논의하여라.

3) 삼차다항식의 풀이

◦일반적인 삼차다항식을 대칭군 S_3와 연계하여 풀 수 있다.

대칭군 S_3와 연계하여 삼차다항식을 푼다. 삼차다항식 x^3+ax^2+bx+c의 세 근을 α, β, γ라고 하자. 집합 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$의 대칭군은 $S_3=\{1,(12),(13),(23),(123),(132)\}$이다. $s=\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma$와 $t=\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma$를 생각하자. S_3의 모든 원소가 ω를 고정(fix)시킨다고 하면, S_3의 원소 각각에 관하여 $s^3=(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)^3$은 두 개의 값 s^3, t^3을 취한다. 실제로, 세 개의 대칭 1, (123), (132) 중 어느 것을 적용하여도 $s^3=(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)^3$와 $t^3=(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)^3$은 변하지 않고, 나머지 대칭 (12), (13), (23) 중 어느 것이라도 s^3에 적용하면 t^3이 되고, t^3에 적용하면 s^3이 된다. 따라서 s^3+t^3와 s^3t^3 의 값은 S_3 중 어느 것을 적용하여도 변하지 않는다. 이것은 s^3+t^3와 s^3t^3는 다항식 x^3+ax^2+bx+c의 세 근 α, β, γ에 관한 대칭다항식이라는 것을 의미한다. 따라서 s^3+t^3와 s^3t^3의 값은 다항식 x^3+ax^2+bx+c의 계수 a, b, c의 다항식으로 표현된다. 실제로, $s^3+t^3=-2a^3+9ab-27c$, $s^3t^3=(a^2-3b)^3$이다. 이차다항식 $(X-s^3)(X-t^3)=X^2+(2a^3-9ab+27c)X+(a^2-3b)^3$의 두 근이 s^3, t^3이므로 $st=a^2-3b$가 되도록 s, t를 구할 수 있다.

이제, α, β, γ에 관한 다음 일차연립방정식 $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-a \\ \alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma=s \\ \alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma=t \end{cases}$을 생각한다. 이를 행렬로 표현하면,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a \\ s \\ t \end{bmatrix}$이며 이로부터 $\alpha=\dfrac{-a+s+t}{3}$, $\beta=\dfrac{-a+\omega^2 s+\omega t}{3}$, $\gamma=\dfrac{-a+\omega s+\omega^2 t}{3}$이다. 여기서 s와 t는 a, b, c와 그들의 적절한 거듭제곱근으로 나타낼 수 있으므로, 다항식 x^3+ax^2+bx+c의 세 근 α, β, γ는 다항식 x^3+ax^2+bx+c의 계수 a, b, c와 그들의 거듭제곱근, ω, ω^2 등으로 나타내어진다.

이제 x^3-3x-4를 풀자. $s^3+t^3=108$, $s^3t^3=3^6=729$이며, 이차다항식 $X^2-(s^3+t^3)X+s^3t^3=X^2-108X+729$을 풀면, $s^3=54+27\sqrt{3}$, $t^3=54-27\sqrt{3}$이다. 그러므로 다음을 알 수 있다.

$$s=\sqrt[3]{54+27\sqrt{3}},\ \sqrt[3]{54+27\sqrt{3}}\,\omega,\ \sqrt[3]{54+27\sqrt{3}}\,\omega^2,$$
$$t=\sqrt[3]{54-27\sqrt{3}},\ \sqrt[3]{54-27\sqrt{3}}\,\omega,\ \sqrt[3]{54-27\sqrt{3}}\,\omega^2$$

$st=9$이므로 $s=\sqrt[3]{54+27\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[3]{54-27\sqrt{3}}$로 택하면, $\dfrac{s}{3}=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$이고 $\dfrac{t}{3}=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$이므로 $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -a \\ s \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \\ \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega^2+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega \\ \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega^2 \end{bmatrix}$이 성립한다. 즉 삼차다항식 x^3-3x-4의 세 근은 $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega^2+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,\omega+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\,\omega^2$이다.

[토의주제 및 과제] 신현용(2016)을 참고하여 다항식 x^3-3x-4를 다른 방법으로 풀고, 두 풀이법의 공통점을 비교하여라.

4) 사차다항식의 풀이

◦일반적인 사차다항식을 대칭군 S_4와 연계하여 풀 수 있다.

[토의주제 및 과제] 신현용(2016)을 참고하여 다항식 $x^4+2x+\dfrac{3}{4}$을 다른 방법으로 풀고, 두 풀이법의 공통점을 비교하여라.

(5) 갈루아 이론

1) 이차다항식

◦이차다항식의 갈루아군은 S_2의 부분군이며 S_2는 가해군이므로, 이차다항식은 거듭제곱근으로 풀린다는 것을 이해한다.

2) 삼차/사차다항식

◦삼차다항식의 갈루아군은 S_3의 부분군이며 S_3는 가해군이므로, 삼차다항식은 거듭제곱근으로 풀린다는 것을 이해한다.

◦사차다항식의 갈루아군은 S_4의 부분군이며 S_4는 가해군이므로, 사차다항식은 거듭제곱근으로 풀린다는 것을 이해한다.

삼차다항식 x^3+ax^2+bx+c의 세 근을 α, β, γ라고 하면 $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$는 S_3의 정규부분군 $A_3=\{1,\ (123),\ (132)\}$에 의하여 변하지 않는다. 여기서 $((\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma))^2$는 x^3+ax^2+bx+c의 판별식이다.

[토의주제 및 과제] 유리계수 삼차다항식 $f(x)$의 판별식을 D라고 할 때, 다음을 증명하고, 그 방법을 토의하여라.

① $D>0$이기위한 필요충분조건은 $f(x)$가 세 개의 서로 다른 실근을 가진다.

② $D=0$이기위한 필요충분조건은 $f(x)$가 세 개의 실근을 가지고 그 중에 두 근은 같다.

③ $D<0$이기위한 필요충분조건은 $f(x)$가 한 개의 실근과 두 개의 서로 다른 허근을 가진다.

사차다항식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$의 네 근을 α, β, γ, δ라고 하면 $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$는 A_4에 의하여 변하지 않는다. 마찬가지로, A_4의 정규부분군 V_4와 V_4의 정규부분군 $\{1,(12)(34)\}$에 의하여 불변인 원소를 계산할 수 있다.

3) 삼차/사차다항식의 풀이와 갈루아 이론

◦다항식 x^3-3x-4와 $x^4+2x+\dfrac{3}{4}$을 이용하여 갈루아 이론의 의미를 이해한다.

삼차다항식 x^3-3x-4의 갈루아군은 S_3이고, S_3는 정규부분군 A_3를 가진다. 상군 S_3/A_3는 위수가 2인 순환군이고, $A_3/1\simeq A_3$는 위수가 3인 순환군이다. 갈루아이론에 의하면 x^3-3x-4의 풀이는 $Y^2=B$꼴의 이차방정식 하나와 $Y^3=A$꼴의 삼차방정식 하나의 풀이로 귀착된다. 여기에서 삼차다항식 x^3-3x-4의 계수는 유리수체 $\mathbb{Q}$와 ω로 생성되는 체 $F=\mathbb{Q}(\omega)$의 원소로 이해한다.

[토의주제 및 과제] $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)=-18i$임을 계산하여 i가 A_3에 의하여 불변임을 확인하여라. 또, $\omega\in F$임을 이용하여, i가 A_3에 의하여 불변이기 위한 필요충분조건은 $\sqrt{3}$이 A_3에 의하여 불변임을 설명하여라.

사차다항식 $x^4+2x+\dfrac{3}{4}$의 갈루아군은 S_4이고, S_4는 정규부분군 A_4를 가지며, A_4는 정규부분군 V_4를 가지고, V_4는 정규부분군 $\{1,(12)(34)\}$를 가진다. 상군 S_4/A_4는 위수가 2인 순환군이고, A_4/V_4는 위수가 3인 순환군이며, $V_4/\{1,(12)(34)\}$와 $\{1,(12)(34)\}/1\simeq\{1,(12)(34)\}$ 모두 위수가 2인 순환군이다.

갈루아 이론에 의하면 $x^4+2x+\frac{3}{4}$의 풀이는 $Y^2=B$꼴의 이차방정식 세 개와 $Y^3=A$꼴의 삼차방정식 하나의 풀이로 귀착된다. 이때 사차다항식 $x^4+2x+\frac{3}{4}$의 계수는 $F=\mathbb{Q}(\omega)$의 원소로 이해한다.

[토의주제 및 과제] 다항식 $x^4+2x+\frac{3}{4}\in F[x]$의 경우에 i가 A_4에 의하여 불변임을 확인하고, $\omega\in F$임을 이용하여 i가 A_4에 의하여 불변이기 위한 필요충분조건은 $\sqrt{3}$이 A_4에 의하여 불변임을 설명하여라.

4) 오차다항식의 풀이와 갈루아 이론
◦갈루아군이 S_5인 오차다항식이 있다는 것을 안다.

(6) 다항식의 풀이와 작도가능성
◦작도가능성의 문제는 대수적인 문제임을 이해한다.
◦작도가능한 수와 거듭제곱근을 사용하여 나타낼 수 있는 수의 차이를 이해한다.
◦정다각형의 작도가능성 문제는 대수적인 문제임을 이해한다.
◦자연수 $n(n\geq 3)$에 대하여 정n각형의 작도가능성을 판단할 수 있다.
[토의주제 및 과제]
① 오일러 함수에 관하여 조사하여라.
② 정n각형이 작도가능성과 페르마소수와의 관계에 대하여 조사하여라.

(7) 다항식 풀이의 역사적 발달 과정
◦이차방정식의 풀이에 관련된 역사적 사실들을 이해한다.
◦자연수 계수 다항식의 해결에 대한 디오판토스 연구의 가치를 이해한다.
◦16세기가 대수학 역사의 중요한 시기임을 이해한다.
◦17세기에 이루어진 다항식의 풀이에 관한 연구들을 안다.
◦다항식의 풀이에 대한 오일러의 업적을 이해한다.

19세기에 다항식 풀이의 역사적 발달과 관련하여, 라그랑주와 코시, 루피니와 아벨, 갈루아 이론을 다루게 된다. 라그랑주와 코시는 다항식의 풀이에서 대칭성에 주목하여, 다항식의 풀이에 관한 새로운 접근을 하였다.

아벨 이전에 루피니는 일반적인 오차다항식은 거듭제곱근을 사용하여 풀 수 없다고 주장하였으나, 그의 증명은 수학계에서 인정받지 못했다. 한편 아벨은 다음에 주목하였다. 이차다항식 $x^2+bx+c\in\mathbb{Q}[x]$의 근 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$, $\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$에서 $\frac{b^2-4c}{4}$를 R로 나타내면 $-\frac{b}{2}+R^{\frac{1}{2}}$, $-\frac{b}{2}-R^{\frac{1}{2}}$이 된다. 즉 이차다항식의 근은 $p+R^{\frac{1}{2}}$인 꼴이다. $x^3+qx+r\in\mathbb{Q}[x]$의 근 $\sqrt[3]{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}}$에서 $-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}$을 R로 나타내면 $R^{\frac{1}{3}}-\frac{9}{q^2}\left(\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right)R^{\frac{2}{3}}$이 되므로, x^3+qx+r의 근은 $R^{\frac{1}{3}}+p_2R^{\frac{2}{3}}$인 꼴로 표현된다. 이때 p와 R는 다항식 x^3+qx+r의 계수인 q, r과 어떤 유리수의 제곱근에 의해 생성되는 체의 원소이다. 아벨은 소수 차수, 예를 들어 오차다항식이 거듭제곱근을 사용하여 풀리면 그 근은

위와 같은 특별한 형태를 취한다는 것을 증명하였다. 그리고 오차다항식의 경우에 그러한 형태의 해가 존재하면 모순에 이른다는 것을 보였다.

갈루아에 대해 살펴보자. 아벨이 거듭제곱근을 사용하여 풀 수 없는 오차다항식이 있다는 것을 증명하였지만, 갈루아는 더 나아가 어떤 오차다항식이 거듭제곱근으로 풀 수 있는지를 판별할 수 있는 이론을 제시하였다. 갈루아이론은 다항식의 가해성의 문제를 확대체의 문제로 기술하고 이를 대칭의 문제 즉, 군론의 문제로 귀착시켰다. 갈루아 이론에 의한 가해성 판별 절차를 살펴보자.

1단계. 거듭제곱근을 사용하여 풀 수 있는지를 판별하고자 하는 오차다항식 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$가 주어진다.

2단계. 다항식 $f(x)$의 모든 근을 품는 최소확대체 즉, $f(x)$의 분해체 K를 생각한다.

3단계. $f(x)$의 갈루아군 $G(K/\mathbb{Q})$를 계산한다.

4단계. $G(K/\mathbb{Q})$가 S_5 또는 A_5와 동형이면 다항식 $f(x)$은 거듭제곱근을 사용하여 풀 수 없고, 그렇지 않으면 거듭제곱근을 사용하여 풀 수 있다.

한편, 유리계수 다항식 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$에 대하여 갈루아 이론은 다음을 말한다.

- 일차다항식의 갈루아군은 자명한 군 $\{e\}$이므로 일차다항식은 자명하게 풀린다.
- 이차다항식의 갈루아군은 S_2이거나 S_2의 부분군이다. S_2는 가환군이므로 이차다항식은 쉽게 풀린다.
- 삼차다항식의 갈루아군은 S_3이거나 S_3의 부분군이다. 갈루아군이 S_3이 아닌 S_3의 부분군이면 가환군이므로 주어진 다항식은 쉽게 풀린다. 그러나 갈루아군이 S_3이면 쉽게 풀리지 않는다. S_3가 비가환군이기 때문이다. 그러나 S_3는 정규부분군 A_3를 가지고 있고, $A_3\simeq\mathbb{Z}_3$와 A_3에 의한 상군 $S_3/A_3\simeq\mathbb{Z}_2$는 모두 가환군이므로 모든 삼차다항식은 거듭제곱근을 사용하여 풀린다.
- 사차다항식의 갈루아군은 S_4이거나 S_4의 부분군이다. 갈루아군이 S_4가 아닌 S_4의 부분군으로서 가환군이면 주어진 다항식은 쉽게 풀리지만 가환군이 아니면 주어진 다항식은 쉽게 풀리지 않는다. 그러나 S_4는 정규부분군 A_4을, A_4는 정규부분군 $V_4=\{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$을, V_4는 정규부분군 $N=\{1,(12)(34)\}$을 가지고 있기 때문에 모든 사차다항식은 거듭제곱근을 사용하여 풀린다. 이때 $S_4/A_4\simeq\mathbb{Z}_2$, $A_4/V_4\simeq\mathbb{Z}_3$, $V_4/N\simeq\mathbb{Z}_2$, $N\simeq\mathbb{Z}_2$이다. 따라서 갈루아군이 S_4인 사차다항식은 $\mathbb{Z}_3$에 해당하는 $Y^3=A$ 꼴의 삼차방정식 하나와 $\mathbb{Z}_2$에 $Y^2=B$ 꼴의 이차방정식 세 개를 푸는 경우로 귀착된다.
- 오차다항식의 갈루아군은 S_5인 경우가 있다. 예를 들어 $2x^5-5x^4+5\in\mathbb{Q}[x]$이다. 대칭군 S_5은 정규부분군을 A_5만 가지고, A_5는 단순군으로서 자명하지 않은 정규부분군을 가지지 않는다. 이것이 오차다항식 $2x^5-5x^4+5\in\mathbb{Q}[x]$은 거듭제곱근을 사용하여 풀리지 않는 이유이다.

[토의주제 및 과제] 다음에 대한 적절한 이유를 제시하되, 서로 비교하며 논의하여라.

① 작도가능성의 논의는 유리수체 $\mathbb{Q}$에서 시작한다.

② 일반적으로 복소수의 작도가능성은 논의하지 않고 실수만을 살핀다.

③ 유리 계수 다항식에 관한 갈루아 이론을 설명할 때, $\mathbb{Q}$에 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$를 첨가한 확대체 $F=\mathbb{Q}(\omega)$ 계수를 가지는 것으로 생각한다.

(8) 학교수학과 대수적 구조

◦ 자연수 전체의 집합은 덧셈과 곱셈 각각에 대해 반군의 구조를 가짐을 이해한다.

◦ 범자연수 전체의 집합은 모노이드의 구조를 가짐을 안다.

◦ 수학에서 중요한 집합인 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$의 대수적 구조를 안다.

◦ $\mathbb{C}$ 는 $\mathbb{R}$ 의 확대체이고, $\mathbb{R}$ 는 $\mathbb{Q}$ 의 확대체임을 이해한다.
◦ 확대체는 벡터공간임을 안다.
◦ 근과 계수와의 관계에서 대칭성의 역할을 이해한다.
◦ 판별식은 근의 형태에 관한 정보를 준다는 것을 이해한다.
[토의주제 및 과제] 중학교에서 '(음수) × (음수) = (양수)'를 가르치는 다양한 방안을 논의하여라.

(9) 대수학의 응용
◦ 정수론 연구에서 대수학적 접근의 유용성을 이해한다.
◦ 정보보호를 연구하는 암호학에서 대수학의 역할을 이해한다.
◦ 연립방정식을 푸는 과정에서 대수학적 접근의 유용성을 이해한다.
◦ 정보통신을 연구하는 부호론에서 대수학의 역할을 이해한다.
[토의주제 및 과제]
① 원시근에 관하여 조사하여라.
② 다음을 확인하여라: 가환군 $\mathbb{Z}_m^*$이 순환군이기 위한 필요충분조건은 법 m에 관한 원시근이 존재하는 것이고 이는 다시 m이 2, 4, p^k, $2p^k$ 중 하나와 같은 꼴일 때이다. 이때 p는 홀수 소수이고 k는 자연수이다.
③ '전화로 동전던지기' 프로토콜이 무엇인지 조사하여라.
④ 추상대수학 관점에서 다음 용어에 관해 조사하여라: 역행렬, 정칙행렬, 행렬식, 일차연립방정식의 풀이, 일반선형군 $GL_n(\mathbb{R})$, 특수선형군 $SL_n(\mathbb{R})$.
⑤ 선형부호론의 다음 용어에 관해 조사하여라: 전문, 부호화, 부호어, 복호, 오류, 오류탐지, 오류수정.

(10) 대수학과 예술
◦ 음악이론에서 대수학의 역할을 안다.
◦ 디자인이론에서 대수학의 역할을 안다.

2. 자립연수 자료의 활용 가능성 탐색

(1) 사전설문지와 사후설문지의 결과 분석
1) 1번 설문 문항의 답변 분석
'대수학'하면 가장 먼저 무슨 생각이 들며, 무엇이 떠오르는가에 대한 사전설문지의 답변을 살펴보자.

<표 Ⅳ-1> 설문문항 1에 대한 대답

대답의 핵심어	사전설문지에 답한 수학교사의 수	사후설문지에 답한 수학교사의 수
방정식(다항식)과 풀이	17	30
군·환·체	12	12
체계	11	5
수와 연산	6	2
갈루아(이론)	6	22
문자	3	4

사전설문지에 있는 교사들의 응답의 핵심어는 방정식과 근, 군·환·체, 수체계와 연산, 갈루아(이론)였다. 이때 '방정식이 생각나고, 방정식의 풀이, 군, 환, 체 등이 떠오릅니다'라고 대답한 교사의 경우에는 <표 Ⅳ-1>에서 핵심어로 방정식과 근, 군·환·체로 대답한 교사의 수에 각각 포함시켰다. 결국 교사 한 명이 복수의 키워드를 말한 경우에는 <표 Ⅳ-1>에 중복하여 계산되었다. <표 Ⅳ-1>에서 보듯이, 교사들은 대수학을 방정식, 군·환·체, 체계, 수와 연산, 갈루아, 문자 등과 관련지어 생각하고 있음을 알 수 있다. 특히 사전설문지에서 교사들의 대답은 매우 단편적이고 짧았으며, 대부분 1줄-2줄 정도로 간단히 답변을 적었다.

다항식의 풀이와 갈루아 이론이 떠오릅니다.
다항식의 풀이과정에서 수체계의 확장이 이루어졌고, 군이나 체 등의 개념도 모두
다항식의 풀이 과정에서 나왔다는 것을 알게되었기 때문입니다
또한 5차다항식의 가해성에 관한 논의인 갈루아 이론이 아니었다면 대수적 구조도
필요하지 않았을 것입니다 따라서 '대수학' 또는 '추상대수학'이라 하면
다항식의 풀이와 갈루아 이론이 핵심이라고 할 것입니다

[그림 Ⅳ-1] 사후설문지의 문항 1에 대한 교사의 대답

한편 사후설문지에서도 대수학에 대한 핵심어로 다항식과 풀이, 갈루아이론, 군·환·체, 체계, 문자, 수와 연산의 순서로 답하였다. 특히 사후설문지에서는 다항식과 풀이, 갈루아이론, 군·환·체의 대수적 구조 등의 핵심어를 개별적으로 나열하기보다는 이들 핵심어들을 서로 연결시켜 기술하는 경향이 많았다([그림 Ⅳ-1]에 사후설문지 답안의 하나가 제시되어 있음). 이것은 본 연구에서 개발된 자료가 대수 개념들의 단편적인 전달보다는 개념들 사이의 유기적인 연결, 관련성이 강조되어 있으며, 수학교사들로 하여금 대수 개념들에 대한 유기적인 스키마를 형성하는데 도움을 주었다고 할 수 있을 것이다.

2) 2번 설문 문항의 답변 분석

2번 설문 문항에서는 정수론, 선형대수학, 추상(현대)대수학이 중등학교 수학교육에 유용한지를 물었다. 사전설문지에서 10명의 수학교사가 정수론, 선형대수학, 추상대수학이 중등학교 수학교육에 유용하게 생각하지 않는다고 대답했으며, 나머지 26명의 교사는 부분적으로 또는 전체적으로 유용하다고 대답했다. 유용한 이유로는 중등학교 수학내용에 대한 전체적인 개괄을 하여 전문성 신장에 도움을 주거나 특정 주제의 교수-학습을 위해 배경지식이 되거나 학생의 흥미 유발에 도움을 준다고 답하였다.

지난번 답변했을때는 유용하지 않았다고 기술했습니다. 중학교
1, 2학년만 가르치다보니 그렇게 적게 되었는데요, 지금은 매우 유용하다고
생각합니다. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$가 유리수체와 $\sqrt{2}$를 포함하는 최소의 체임을 증명하던
날부터 생각이 아주 바뀌었고. 분모의 유리화를 지도할 때도 가볍게 여겨서는
안되겠다는 다짐을 했습니다. 이차방정식의 근의 공식을 지도할 때에도
이전과는 다른 관점으로, 행복하게 지도할 수 있을 듯합니다.

[그림 Ⅳ-2] 사후설문지의 문항 6에 대한 교사의 대답

사후설문지에서는 3명의 교사가 유용하게 생각하지 않는다고 대답했으며, 나머지 교사들은 정수론, 선형대수

학, 추상(현대)대수학이 중등학교 수학교육에 유용하다고 답하였다. 사전설문지에서는 유용하지 않다고 답했던 교사들 중에서 7명의 교사가 유용하게 생각하는 것으로 변화되었다. [그림 Ⅳ-2]는 그러한 변화를 경험한 한 교사의 대답이다. 특히 사후설문지에서 주목할 것은 '유용하다'는 답변에 그 이유가 구체적으로 기술되어 있는 경우가 많았다는 것이다. [그림 Ⅳ-2]에서도 분모의 유리화나 이차방정식의 근의 공식처럼 구체적인 중등학교 교과내용을 추상대수학의 내용과 연결을 기술하면서, 그 유용성을 표현하였다.

3) 3번 설문 문항의 답변 분석

3번 설문 문항에서는 정수론, 선형대수학, 추상대수학이 음악, 디자인, 암호론, 부호론 등에 활용되는 것을 아는지 물었다. 사전설문지에서 5명의 수학교사가 정수론, 선형대수학, 추상대수학이 음악, 디자인, 정보과학에 활용되는 것을 모른다고 대답했으며, 나머지 교사들은 암호, 음악이론의 화성학, 테셀레이션, 피타고라스 음계, 황금비, 프렉탈, 미술의 원근법 등에 활용되는 것은 알고 있지만, 자세한 내용을 알지는 못한다고 대답했다.

사후설문지에서는 1명의 교사가 응답하지 않았고, 나머지 응답자들은 정수론, 선형대수학, 추상대수학이 음악, 디자인, 암호론, 부호론 등에 활용된다고 답하였다. 특히 사전설문지와 비교했을 때, 사후설문지에서는 활용되는 이유를 구체적으로 기술하고 있다는 점이 주목할 만하다. [그림 Ⅳ-3]은 사후설문지에 대한 한 교사의 대답이다. 사후설문지에서는 많은 교사들이 주로 음악, 디자인, 암호의 예를 통해, 정수론, 선형대수학, 추상대수학이 다양한 분야에 활용된다고 기술하였다.

전자서명기법이 보편적으로 활용되고 있는데 그 중 RSA-전자서명 기법은 정수론에 등장하는
페르마-오일러 정리에 기반을 두고 있으며 벡터공간의 구조는 정보통신 이론에 유용하다.
음악과 디자인에서는 '대칭'을 빼고 생각할 수 없다. 이는 군론과도 깊은 연관이 있다.
평균율을 기반을 둔 악기를 이해하기 위해서는 유한가환환 $\mathbb{Z}_{12}$을 기초로 하는 다양한
대수적 기법을 필요로 한다. 디자인의 경우도 띠 타입은 7개뿐이고 벽지의 타입은
17개 밖에 없다는 사실이 기본적인 군론으로 증명된다.

[그림 Ⅳ-3] 사후설문지의 문항 3에 대한 교사의 대답

4) 4번 설문 문항의 답변 분석

4번 설문 문항에서는 추상대수학을 다항식의 풀이와 관련하여 설명하도록 요구하였다. 사전설문지에서 8명의 수학교사가 다항식의 풀이를 수체계 확장과 관련하여 설명하였다. [그림 Ⅳ-4]는 설문 응답 중 하나이다.

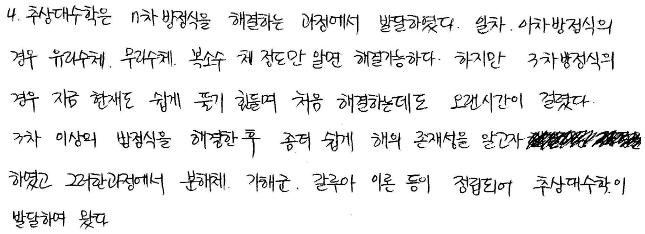
4. 다항식은 일차. 이차 … 계속 존재하며 $x+1=0$ 의 해는 쉽게 찾을
수 있습니다. 하지만 $x^2+4x+9=0$ $x^3+8x^2-4x+3=0$ 등은 대수적
구조를 $\mathbb{R}$이 아닌 다른 범위로 확장하면 해결할 수 있는데 이런 대수적 구조를
배우는 것이 추상(현대) 대수학이라고 생각합니다.

[그림 Ⅳ-4] 사전설문지의 문항 4에 대한 교사의 대답

[그림 Ⅳ-4]에서는 수체계 확장의 필요성이 다항식의 풀이와 연계하여 다른 교사들에 비해 비교적 잘 기술되

었다. 그러나 추상대수학의 궁극적인 의의는 '임의의 차수 다항식의 풀이가 가능한가'라는 것은 기술되지 못하였다. 그리고 오차다항식의 풀이는 일차, 이차, 삼차 다항식의 풀이와 완전히 다르다는 생각이 드러나지 않았다.

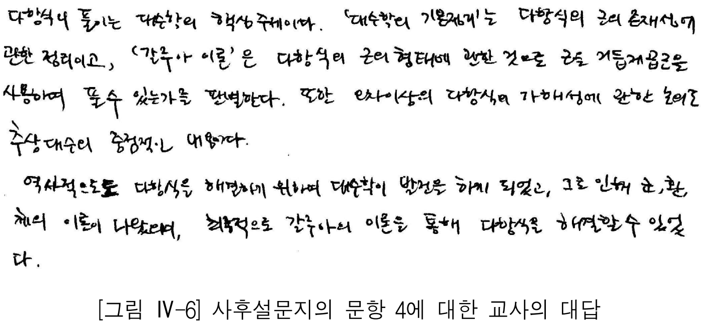
한편 [그림 Ⅳ-4]와 같이 답한 수학교사는 사후검사지에서는 [그림 Ⅳ-5]와 같이 대답하였다(필체를 비교하여 같은 교사에 의해 작성된 설문지임을 확인하였음).


4. 추상대수학은 n차 방정식을 해결하는 과정에서 발달하였다. 일차, 이차방정식의 경우 유리수체, 무리수체, 복소수 체 정도만 알면 해결가능하다. 하지만 3차방정식의 경우 지금 현재도 쉽게 풀기 힘들며 처음 해결하는데도 오랜시간이 걸렸다. 3차 이상의 방정식을 해결한 후 좀더 쉽게 해의 존재성을 알고자 하였고 그러한과정에서 분해체, 가해군, 갈루아 이론 등이 정립되어 추상대수학이 발달하여 왔다

[그림 Ⅳ-5] 사후설문지의 문항 4에 대한 교사의 대답

[그림 Ⅳ-4]와 [그림 Ⅳ-5]를 비교해 보면, 본 연수 후에 이 교사는 다항식 풀이를 통한 수체계 확장뿐만 아니라, 삼차이상의 다항식의 풀이, 다항식 해의 존재성, 분해체, 가해군, 갈루아이론 등을 다항식의 풀이와 관련시켜 기술하고 있음을 알 수 있다.

사전설문지와 사후설문지의 결과를 비교했을 때 가장 두드러진 변화는 사전설문지에서는 8명의 수학교사가 수체계 확장을 기술하는 것이 전부였다면, 사후설문지에서는 9명의 교사는 수체계의 확장과 삼차이상의 다항식의 풀이에 대해 기술했고, 나머지 교사들은 삼차이상의 다항식의 풀이에 대해 기술하였다는 것이다. [그림 Ⅳ-6]은 삼차이상의 다항식의 풀이에 대해 기술한 사후설문지의 한 답변 내용이다. [그림 Ⅳ-6]에서는 다항식의 가해성, 다항식의 근의 형태, 갈루아 이론 등을 통해 대수학을 설명하고 있다.


다항식의 풀이는 대수학의 핵심주제이다. '대수학의 기본정리'는 다항식의 근의 존재성에 관한 정리이고, '갈루아 이론'은 다항식의 근의 형태에 관한 것으로 근을 거듭제곱근을 사용하여 풀수 있는가를 판별한다. 또한 5차이상의 다항식의 가해성에 관한 논의도 추상대수의 중점적인 내용이다.

역사적으로도 다항식을 해결하기 위하여 대수학이 발전을 하게 되었고, 그로 인해 군, 환, 체의 이론이 나왔으며, 최종적으로 갈루아의 이론을 통해 다항식을 해결할 수 있었다.

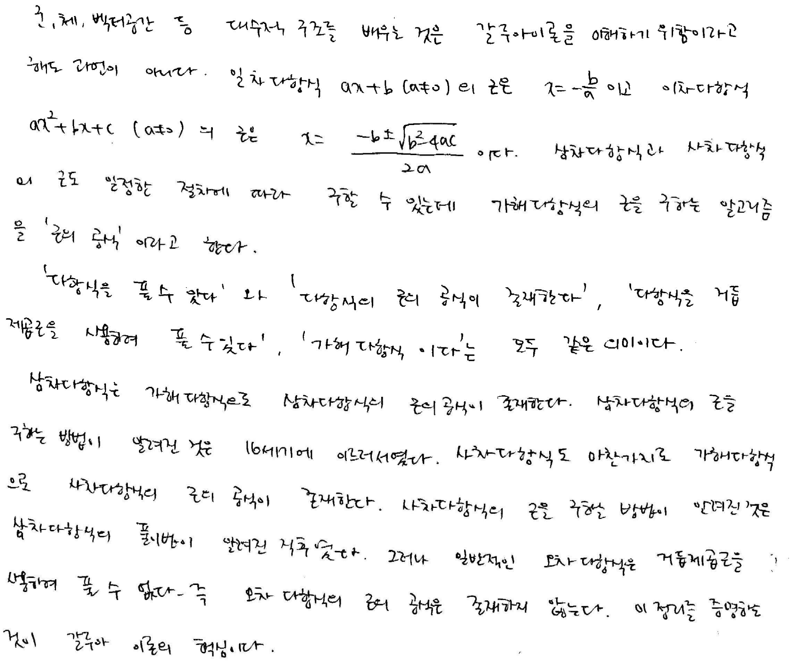
[그림 Ⅳ-6] 사후설문지의 문항 4에 대한 교사의 대답

5) 5번, 6번, 7번 설문 문항의 답변 분석

5번, 6번, 7번 설문 문항에서는 추상대수학의 개념들을 이용하여 작문을 하도록 요구하였다. 단순히 개념을 외우는 것을 벗어나, 얼마나 개념들의 의미를 유의미하게 알고 있는지를 파악할 수 있는 문항들이다. 이 문항들에서는 제시된 개념들을 모두 사용하여 작문하도록 하였는데, 대부분의 교사들은 답변을 적지 않았거나 조건을 충족시키는 답변을 제시하지 못했다. 5번 설문 문항에 대해 5명의 교사가 문제의 조건을 만족시키는 답안을 제시하였고, 6번 설문 문항에 대해 3명의 교사가 문제의 조건에 근접하는 답안을 제시하였으며, 7번 설문 문항에

대해 1명의 교사가 문제의 조건에 근접한 답안을 제시하였다.

한편 사후설문지에서는 5번, 6번, 7번 설문 문항에 대한 대답을 모든 교사들이 기술하였다. 사전설문지에서 5번 설문에 대해 5명의 교사가, 6번 설문에 대해 3명의 교사가, 7번 설문에 대해 1명의 교사가 답한 것과 비교한다면 커다란 변화라고 할 수 있을 것이다.

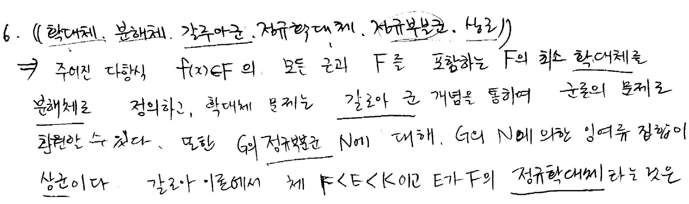

군, 체, 벡터공간 등 대수적 구조를 배우는 것은 갈루아이론을 이해하기 위함이라고 해도 과언이 아니다. 일차다항식 $ax+b$ $(a\neq0)$의 근은 $x=-\frac{b}{a}$이고 이차다항식 ax^2+bx+c $(a\neq0)$의 근은 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이다. 삼차다항식과 사차다항식의 근도 일정한 절차에 따라 구할 수 있는데 가해다항식의 근을 구하는 알고리즘을 '근의 공식'이라고 한다.

'다항식을 풀 수 있다'와 '다항식의 근의 공식이 존재한다', '다항식을 거듭제곱근을 사용하여 풀 수 있다', '가해 다항식이다'는 모두 같은 의미이다.

삼차다항식은 가해다항식으로 삼차다항식의 근의 공식이 존재한다. 삼차다항식의 근을 구하는 방법이 알려진 것은 16세기에 이르러서였다. 사차다항식도 마찬가지로 가해다항식으로 사차다항식의 근의 공식이 존재한다. 사차다항식의 근을 구하는 방법이 알려진 것은 삼차다항식의 풀이법이 알려진 직후였다. 그러나 일반적인 오차 다항식은 거듭제곱근을 사용하여 풀 수 없다. 즉 오차 다항식의 근의 공식은 존재하지 않는다. 이 정리를 증명하는 것이 갈루아 이론의 핵심이다.

[그림 Ⅳ-7] 사후설문지의 문항 5에 대한 교사의 대답

[그림 Ⅳ-7], [그림 Ⅳ-8], [그림 Ⅳ-8]은 5번, 6번, 7번의 사후설문지에 대한 교사들의 응답이다. [그림 Ⅳ-7]에서는 군, 환, 체 등 대표적인 대수적 구조의 의의를 다항식의 풀이 또는 갈루아 이론과 연계하여 잘 이해하고 있는 것으로 생각할 수 있다. 그리고 갈루아 이론과 관련된 역사적 발달 과정도 어느 정도 알고 있는 것으로 생각된다.


6. ((확대체, 분해체, 갈루아군, 정규확대체, 정규부분군, 상군))

⇒ 주어진 다항식 $f(x)\in F$의 모든 근과 F를 포함하는 F의 최소 확대체를 분해체로 정의하고, 확대체 문제는 갈루아 군 개념을 통하여 군론의 문제로 환원할 수 있다. 또한 G의 정규부분군 N에 대해, G의 N에 의한 잉여류 집합이 상군이다. 갈루아 이론에서 체 $F<E<K$이고 E가 F의 정규확대체라는 것은 $G(K/E)$가 $G(K/F)$의 정규부분군이라는 것으로 볼 수 있다.

[그림 Ⅳ-8] 사후설문지의 문항 6에 대한 교사의 대답

[그림 Ⅳ-8]에 기술된 대답에서는 정규부분군과 상군의 역할을 상세하게 설명하지 않은 것으로 보아, 갈루아 이론에 대한 깊이 있는 이해는 부족한 듯하다. 그러나 주어진 다항식으로부터 얻어지는 확대체 열과 그로부터 유도되는 부분군 열의 관계를 이해함으로 갈루아 이론의 핵심 내용은 이해하고 있는 것으로 생각된다.

갈루아 이론의 기본 정리는 다항식의 가해성의 문제를 확대체 문제로 나타내고
확대체의 문제를 군의 문제로 귀착시킨다. 다항식의 가해성 문제는 대수학의
기본정리에 의하여 군의 존재성 문제로 연결되며. 가해군이 존재한다면 다항식
의 해가 존재함을 알 수 있다.

[그림 Ⅳ-9] 사후설문지의 문항 7에 대한 교사의 대답

[그림 Ⅳ-9]에서는 주어진 다항식으로부터 얻어지는 확대체 열과 부분군 열의 관계를 이해함으로 다항식의 가해성에 관한 갈루아 이론의 전체 내용은 이해하고 있다. 그러나 정규부분군과 상군의 역할을 언급하지 않은 것으로 보아, 갈루아 이론에 대한 깊이 있는 이해는 부족한 것으로 생각된다.

살펴본 것과 같이, 사후설문지에 대한 대답이 완성도가 높지는 않지만, 대답한 교사의 수나 내용의 측면에서 사전설문지에 비해 의미있는 변화를 볼 수 있었다.

(2) 연수 방법에 대한 설문지

1) 1번 설문 문항의 답변 분석

1번 설문 문항인 연수방법의 장점에 대한 설문의 답변을 살펴보자. 설문에서 드러난 장점으로는 학습 내용의 효과적 이해, 조원들 간의 유대감 및 생각 공유, 자기주도적 학습, 교수자의 도움 등으로 요약할 수 있다.

학습 내용의 이해와 관련하여서는, 비슷한 배경지식을 가진 교사가 수학 내용을 발표하기 때문에 유사한 눈높이에서 생각하며, 수업에 더 집중할 수 있으며, 발표 내용을 깊이 있게 이해하는데 도움이 되었다고 답하는 교사들이 많았다(15명의 교사가 이러한 대답을 함). [그림 Ⅳ-10]은 한 교사의 답변이다.

조별 발표를 준비하는 과정에서 다른 사람의 생각과 내 생각을 공유하는
과정이 있었고. 발표하는 ~~[illegible]~~ 내용을 들으며. 비슷한 궁금증과
[illegible] 가지고 있다는 것에 놀라움을 느끼는 부분도 있었다.

비슷한 수준의 학습자들이 설명할때. 더 공감을 할수 있다는 생각이 들었다.

[그림 Ⅳ-10] 연수 방법에 대한 설문 문항 1에 대한 교사의 대답

전문적인 수학 지식을 가진 교수가 일목요연하게 교과내용을 설명하는 것이 더 효과적일 것이라고 생각할 수도 있지만, 설문에서 보는 것처럼 비슷한 배경지식과 생각을 가진 동료 교사들의 발표와 설명은 교과내용 지식을 이해하는데 큰 도움이 된다는 것을 알 수 있다. 이때 한 가지 주목할 것은 교사들이 발표 및 설명에서 교수의 역할이다.

10명의 교사가 발표와 토론에서 교수의 도움과 조언의 역할을 긍정적으로 평가하였다. 즉 교사의 주도적인 발표와 토론, 교수의 보완적인 도움과 조언이 유기적으로 결합한다면, 긍정적인 학습 결과를 낼 수 있을 것으로 기대된다. 이때 교수의 도움과 조언의 내용은 다양할 수 있다. 예를 들면 교사들의 발표에서 잘못된 부분을 수정하고, 발표에 대한 피드백을 제공하는 등의 역할을 생각할 수 있을 것이다.

한편 4명의 교사는 발표 준비를 하면서 조원들 사이의 유대감이 공고히 형성된 것을 장점으로 꼽았다. 이를 통해 다른 교사들의 생각을 공유하며, 협동학습을 성공적으로 수행할 수 있었다고 기술하였다. 그리고 연수자인 교사들이 자신의 힘으로 자기주도적인 학습을 할 수 있어서 바람직했다는 의견도 있었다(5명의 교사가 응답함). 결국 교수 중심의 설명과 연수자의 수동적 수용을 벗어나, 연수자 스스로가 적극적으로 학습내용을 탐구하며 토론하고 발표하는 연수는 비록 쉽지는 않았지만, 학습 내용의 이해, 참여 교사들 사이의 유대감 및 상호 이해, 자기주도적 학습의 기회 제공의 측면에서 교사들이 긍정적으로 평가하였다.

2) 2번 설문 문항의 답변 분석

2번 설문 문항인 연수방법의 단점에 대해, 3명의 교사가 발표 준비과정이 힘들었다고 기술하였고, 5명의 교사가 다른 조의 발표 내용이 이해하는데 어려움이 있었다고 하였다. 즉 2번 문항에 대답한 교사들은 조별 학습을 통한 발표의 준비, 발표 및 발표 내용의 이해에서의 어려움을 본 연수 방법의 단점으로 지적하였다. 학습과정에서 발생하는 어려움은 학습내용, 학습방법 자체에 의한 것이라기보다는 미지의 지식을 알아가는 과정에서 발생하는 피할 수 없는 장벽 때문이라 할 수 있을 것이다. 이때 어려움을 극복하도록 도와주는 교수의 역할이 중요하다. 본 연구에서는 전체 토론에서 교수가 함께 참여하여 수학교사들이 자기주도적으로 이러한 장벽을 극복할 수 있도록 도움을 주었다.

한편 2번 문항에 대해 교사들이 단점을 적게 지적한 것은 본 연구에서 시도한 연수가 중등학교에서 많이 논의되는 학습자 중심의 자기주도적 학습, 토론중심의 조별활동을 통한 학습 방법에 근거하기 때문일 것으로 추측된다.

3) 3번 설문 문항의 답변 분석

3번 설문 문항은 현장 교사에게 유익한 대수학 연수로 제안할 수 있는 주제는 무엇인가에 대한 것이다. 12명의 교사가 중등학교 수학내용과 추상대수학의 연결성이라 하였고, 7명의 교사가 대수학과 타분야의 관련 및 적용(예를 들어 음악, 미술 등)이라 하였고, 4명의 교사가 대수학에 관련된 수학사, 3명의 교사가 추상대수학이라고 대답하였다.

설문 결과에서 보는 것과 같이 많은 교사들은 중등학교에서 가르치는 대수의 내용과 대학교에서 배우는 추상대수학 내용의 연결성을 이해하며, 대수학이 음악, 미술 등 다른 분야에 적용되는 것을 이해하여, 이를 바탕으로 중등학교에서 폭넓고 다양하게 수학을 지도하기를 희망하는 것으로 나타났다.

4) 4번 설문 문항의 답변 분석

4번 설문 문항은 연수 자료에 대한 문항으로, 개발된 자료가 조원들과 함께 읽고 논의하기에 적절한가를 물었다. 응답한 모든 교사들이 적절하다고 대답했는데, 몇몇 교사들은 혼자서 공부하기에는 부담스럽다는 의견을 제시하였다. 그리고 대화체로 기술되어 있어서 자료를 읽는데 도움이 되었다는 대답도 있었고, 토의주제 및 과제가 있어서 조별토론을 진행하는데 유익했다는 대답도 있었다.

5) 5번 설문 문항의 답변 분석

5번 설문 문항은 본 연구에서 개발된 자료를 동료 교사에게 권할 만한가에 대한 물음이다. 2명의 교사를 제외하고는 모두 권하고 싶다고 기술하였다. 권하고 싶지 않다고 대답한 교사들은 중학교에 근무 중이어서 권하지 않겠다, 기본 지식이 없이는 다소 어려울 것 같아 고민된다고 하였다.

살펴본 것과 같이, 개발된 다항식 해법에 대한 자립연수 자료는 수학교사의 재교육을 위한 자료로서 충분한 활용 가능성을 가지며, 수학교사들이 긍정적으로 그 가치를 판단하고 있다고 할 수 있을 것이다.

Ⅴ. 결론

본 연구에서는 교과 내용지식의 측면에서 수학교사의 전문성을 신장시킬 수 있는 구체적인 가능성을 탐색하였다. 이를 위해, 첫째 다항식의 해법에 대한 수학교사의 대수 내용지식을 선정하였다. 다항식 해법에 대한 수학교사의 대수 내용지식을 선정하기 위해, 관련 문헌들과 선행연구들을 분석하여 수학교사에게 필요한 대수 내용지식을 조사하였고, 중등학교 수학 교육과정 및 수학교과서의 대수 영역을 분석하여, 학교수학과 대학교에서 다루는 추상대수학 내용의 관련성을 조사하였다. 이를 통해, 수체계, 대수적 구조, 삼차/사차다항식의 풀이, 갈루아 이론, 다항식의 풀이와 작도가능성, 다항식 풀이의 역사적 발달 과정, 학교수학과 대수적 구조, 대수학의 응용, 대수학과 예술의 주제를 선정하였다. 그리고 선정된 학습 주제별로 학습목표, 학습내용, 토의주제 및 과제를 상세하게 기술하여 제시하였다.

둘째, 선정된 다항식의 해법에 대한 대수 내용지식을 바탕으로 수학교사의 자립연수를 위한 학습 자료를 개발하였다. 이 학습 자료의 구성 및 조직은 교수 중심의 강의 자료가 아니라, 수학교사들의 조별 토론학습을 통한 자립연수 가능성에 중점을 두고 개발되었다. 학습 자료에는 다항식의 해법에 대한 대수 내용지식의 설명, 두 수학교사의 가상적인 대화, 토의주제 및 과제, 참고문헌을 포함시켜, 수학교사들이 스스로 학습할 수 있는 가능성을 제시하였다. 그리고 방정식의 풀이에 대한 다양한 예들을 제시하여, 수학 이론과 상응하는 예들을 함께 학습할 수 있도록 하였다. 학습 자료는 48쪽 분량으로 본 논문에는 제시하지 않았으며, 자료에 접속할 수 있는 QR코드를 제시하였다.

셋째, 개발된 학습 자료의 활용 가능성을 확인하기 위해, 수학교사들을 대상으로 실험연구를 진행하였다. 학습 자료와 학습 방법을 설명하기 전에 대수 내용지식에 대한 서술형의 사전검사를 실시하였고, 조별 자립연수 후에 같은 내용의 사후검사를 실시하였다. 그리고 연수 방법 및 연수 자료에 대한 서술형의 설문조사를 실시하였다. 대수 내용지식에 대한 사전검사와 사후검사의 결과를 비교하면, 수학교사들이 개발된 학습 자료를 이용하여 자립연수를 한 후에 '추상대수학' 교과목 자체에 대한 이해, 추상대수학과 다른 학문 영역의 관련성, 다항식의 해법에 대한 전반적인 개요, 추상대수학의 개념들의 의미와 이들의 관련성의 측면에서 깊은 이해를 가지게 되었다는 것을 확인할 수 있다. 특히 다항식의 풀이에 관련된 개념들인 삼차/사차/오차다항식의 근의 공식, 갈루아 이론, 확대체, 분해체, 갈루아군, 대수학의 기본 정리, 갈루아 이론의 기본 정리, 가해다항식, 가해군 등에 관련된 유의미한 학습과 개념망을 가지고 있다는 것을 확인할 수 있었다. 이를 통해 교사들이 중등학교 수학내용과 대학교의 추상대수학 지식사이를 유기적으로 연결할 수 있는 가능성을 가지게 된 것으로 생각된다.

한편 연수 방법 및 연수 자료에 대한 설문조사 결과를 살펴보면, 대부분의 교사들이 자립연수의 내용과 형식에 대해 만족하였다. 특히 강의식 연수가 아니라 토론 중심의 자립연수이었기 때문에, 조별로 비슷한 배경지식을 가진 교사들의 토론이 활성화될 수 있었고, 참여 교사들 사이의 유대감이나 친밀감 형성이 빨랐으며, 서로 공감하는 부분을 찾기가 수월해서 좋았다는 의견이 많았다. 이러한 연수의 단점으로는 연수과정이(발표 준비 과정이) 힘들었다거나 다른 조들의 발표에서 이해하기 어려운 점이 있었다는 의견이 있었다. 설문을 통해 드러난 토론 중심의 자립 연수의 중요한 점은 연수 담당 교수의 역할이다. 본 연구에서 담당 교수는 연수자들이 자립적으로 학습을 진행할 수 있도록 동기부여를 하고, 연수 자료를 개발하고, 조별 토론과 관련하여 교사들의 질문에 대답하며, 전체 토론에서는 토론자들의 일부로 참여하여 논의되는 다양한 교과내용 지식에 관련된 질문들을 함께 이야기했다. 이때 논의 과정의 결정자가 아니라 참여자로서 질문을 제기하기도 하고 반례를 제시하기도 하였다. 그 결과 연수자들 사이의 토론이 더 활발하게 진행되며, 연수자 자신이 발표 및 토론의 책임감을 갖게 되어, 효과적인 자립연수가 진행될 수 있었다.

많은 수학교사들은 본 연구의 과정에서 중등학교 수학내용과 대학교의 고등수학 내용의 단절에 대해서 이야

기를 하였다. 그리고 이러한 문제를 해결할 수 있는 학습 자료의 미흡함을 지적하면서, 본 연구에서 개발된 자료의 가치에 대해 긍정적인 의견을 제시하였다. 아직도 많은 수학교사들은 자신이 중등학교 시절에 익혔던 학습내용, 학습방법으로 현재 자신이 담당하는 학생들을 가르치고 있을 지도 모른다. 수학교육학 연구에서 이러한 단절의 문제에 적극적인 노력을 기울여서, 다양한 주제들에 대해 수학교사 스스로 학습할 수 있는 학습 자료가 개발해야 한다는 것을 제언한다.

참 고 문 헌

강영란・조정수・김진환 (2012). 분수 나눗셈의 문장제에 대한 초등 교사들의 전문화된 내용지식(SCK) 분석, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육논문집>, 26(3), 301-316.

Kang, Y.R., Cho, C.S., Kim, J.W. (2012). Analysis of Elementary Teachers' Specialized Content Knowledge(SCK) for the word problems of fraction division, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education,* 26(3), 301-316.

권오남・박정숙・박지현・조형미 (2014). 공동체 단위 수학교사 연수 프로그램의 개발 및 효과 -함께 만들어가는 수학교사 연수를 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 53(2), 201-217.

Kwon, O.N., Park, J.S., Park J.H. & Cho, H.M. (2014). Designing and implementing professional development program of multi-tiered teacher community: Joint collaboration between teachers and PD program developers, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education,* 53(2), 201-217.

김남희 (2014). 교사 전문성 신장을 위한 수학 교사 연수 실행 -산파법을 적용한 사고 실험 활동을 중심으로-, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, 24(4), 537-554.

Kim, N.H. (2014). Performing Mathematics Teacher Training for a Professional Development-Focusing on thought experiment activities by Socratic method-, *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics: Journal of Educational Research in Mathematics,* 24(4), 537-554.

김응태・박승안 (2011). 현대대수학, 서울: 경문사.

Kim, E.T. & Park, S.A. (2011) *Abstract Algebra,* Seoul: Kyungmoonsa.

박한식 (1998). 수학 교사의 수학, ICMI-EARCOME1 Proceedings, 1, 15-25.

Park, H.S. (1998). Mathematics for Teachers of Mathematics, *ICMI-EARCOME1 Proceedings,* 1, 15-25.

박혜숙・김서령・김완순 (2005). 추상대수학 강좌의 두 가지 접근 방법, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육논문집>, 19(4), 599-620.

Park, H.S., Kim, S.R. & Kim W.S. (2005). Two Approaches to Introducing Abstract Algebra to Undergraduate Students, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education,* 19(4), 599-620.

송근영・방정숙 (2013). 수학과 교사지식에 관한 국내 연구의 동향 분석, 한국학교수학회논문집, 16(1), 265-287.

Song K.Y. & Pang, J.S. (2013). Domestic Research Trends of Teacher Knowledge in Mathematics, *Journal of the Korean School Mathematics,* 16(1), 265-287.

신현용 (2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육 과정 및 교수-학습 방법 개발에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육>, 42(4), 431-452.

Shin, H.Y. (2003). A Study on Development of Curriculum and Teaching-Learning Method for Department of Mathematics Education at Teachers College, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education,* 42(4), 431-452.

신현용 (2007). 한국수학교육학회 수학교사 시리즈 1-추상대수학, 서울: 교우사.

Shin, H.Y. (2007). *Abstract Algebra,* Seoul: Kyowoosa.

신현용 (2009). 한국수학교육학회 수학교사 시리즈 6-정수론, 서울: 교우사.

Shin, H.Y. (2009). *Number Theory,* Seoul: Kyowoosa.

신현용 (2011). 한국수학교육학회 수학교사 시리즈 7-선형대수학, 서울: 교우사.

Shin, H.Y. (2011). *Linear Algebra,* Seoul: Kyowoosa.

신현용 (2016). 대칭: 갈루아의 유언, 서울: 승산.(To be published).

Shin, H.Y. (2016). *Symmetry: Testamentary Letter of Galois*, Seoul: Seungsan.(To be published).

신현용 · 강미광 · 박혜숙 · 신준식 · 이강섭 · 이기석 · 이병수 · 이재학 · 정순모 · 한인기 · 현종익 · 황선욱 (2003). 교사 양성 대학 수학교육과 교육과정 및 교수·학습 방법 개발, 서울: 한국수학교육학회. 연구보고서.

Shin, H.Y., Kang, M.K., Park, H.S., Shin, J.S., Lee, K.S., Lee, K.S., Lee, B.S., Lee, J.H., Jeong, S.M., Han, I.K., Hyun, J.I. & Hwang, S.U. (2003). *Development of Curriculum and Teaching-Learning Method for Department of Mathematics Education at Teachers College*, Seoul: KSME. Research Report.

신현용 · 유익승 · 문태선 · 신기철 · 신실라 (2015). 수학 IN 디자인, 서울: 교우사.

Shin, H.Y., Lew, I.S., Moon, T.S., Shin, K.C. & Shin, S.L. (2015). *Mathematics IN Design*, Seoul: Kyowoosa.

신현용 · 이강섭 · 한인기 · 류익승 (2005). 중등학교 수학교사 양성을 위한 현대대수학 교재 개발 연구, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육>, 44(3), 337-360.

Shin, H.Y., Lee, K.S., Han, I.K. & Lew, I.S. (2005). A Study on Development of Textbook 'Modern Algebra' for Training Mathematics Teacher of Secondary Schools, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 44(3), 337-360.

신현용 · 신혜선 · 나준영 · 신기철 (2014). 수학 IN 음악, 서울: 교우사.

Shin, H.Y., Shin, H.S., La, J.Y. & Shin, K.C. (2014). *Mathematics IN Music*, Seoul: Kyowoosa.

이기석 (2003). (수학교육과) 현대대수학 교재 개발, 한국수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집>, 15, 53-58.

Lee, K.S. (2003). Development of Textbook of Abstract Algebra, J. *Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education,* 15, 53-58.

이승훈 · 조완영 (2013). 수학교사의 이차곡선에 관한 내용지식의 분석, 대한수학교육학회지 <학교수학>, 15(4), 995-1013.

Lee, S.H. & Cho, W.Y. (2013). Analysis of Mathematics Teachers' Mathematical Content Knowledge about Quadratic Curves, *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics: School Mathematics,* 15(4), 995-1013.

이종학 (2014). 산술과 대수 영역의 문장제 문제해결 전략에 대한 초등 예비교사의 내용지식 연구, 한국콘텐츠학회논문지, 14(2), 1083-1099.

Lee, J.H. (2014). The Study on Elementary Preservice Teachers' Content Knowledge in Arithmetic and Algebra Word Problems Solving Strategy, *The Journal of the Korea Contents Association*, 14(2), 1083-1099.

최승현 · 황혜정 (2008). 수학과 내용 교수 지식(PCK)의 의미 및 분석틀 개발에 관한 연구, 한국학교수학회논문집, 11(4), 569-593.

Cho, S.H. & Hwang, H.J. (2008). The Research on Pedagogical Content Knowledge in Mathematics Teaching, *Journal of the Korean School Mathematics*, 11(4), 569-593.

한국과학창의재단 (2010). 과학·수학교사 생애주기 연수체제 구축을 위한 연구, 서울: 한국과학창의재단. 연구보고서.

KFASC (2010). *Lifelong Professional Development System for Inservice Teachers of Science and Mathematics*, Seoul: KFASC. Research Report.

한국교육과정평가원 (2008). 표시과목 '수학'의 교사 자격 기준 개발과 평가 영역 상세화 및 수업 능력 평가 연구, 서울: 한국교육과정평가원. 연구보고 CRE 2008-6-2.

KICE (2008). *Development of Professional Standards for Mathematics Teachers and Evaluation of Teaching Ability*, Seoul:

KICE, Research Report.

한인기・신현용 (2003). 러시아의 수학교사 양성을 위한 국가 수준 교육과정에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육>, 42(5), 595-606.

Han, I.K. & Shin, H.Y. (2003). A Study on the Russian National Curriculum for Training of Mathematics Teachers at Universities, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 42(5), 595-606.

Fraleigh, J.B. (2009). 현대대수학 (강영욱 역), 서울: 피어슨에듀케이션코리아.

Fraleigh, J.B. (2009). *Abstract Algebra* (translated by Kang, Y.U.), Seoul: PearsonEducationKorea.

A Study on Algebraic Knowledge of Mathematics Teachers on Solving Polynomials and Searching Possibility of Self Learning the Knowledge

Hyunyong Shin

Department of Mathematics Education, Korea National University of Education, Cheongju, Chungbuk, Korea

E-mail : shin@knue.ac.kr

Inki Han†

Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University, Gyeongsangnamdo, Korea

E-mail : inkiski@gnu.ac.kr

This study is to search for a program of professional development of mathematics teachers on the viewpoint of content knowledge of mathematics. To do this, we select algebraic subject as content knowledge for solution of polynomials and develop material for group study based on selected subject. We supply the developed material to teachers and discuss the possibility of application and the acceptability of it. For discussion, we collect data through tests and questionnaire. Through analysing the data, we obtain the positive result.

* ZDM Classification : U15

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U99

* Key words : Solution of Polynomial, Algebraic Knowledge, Mathematical Self Learning

† Corresponding author