Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 20 No. 11, pp. 105-110, November 2015

www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2015.20.11.105

A Marriage Problem Using Threshold Algorithm

Sang-Un Lee *

Abstract

This paper deals with a newly proposed algorithm for stable marriage problem, which I coin threshold algorithm. The proposed algorithm firstly constructs an $n \times n$ matrix of the sum of each sex's preference over the members of the opposite sex. It then selects the minimum value from each row and column to designate the maximum value of the selected as the sum threshold p_{ij}^{*}. It subsequently deletes the maximum preference ${}_{\max}p_{ij}$ from a matrix derived from deleting $p_{ij} > p_{ij}^{*}$, until $|c_i| = 1$ or $|c_j| = 1$. Finally, it undergoes an optimization process in which the sum preference is minimized. When tested on 7 stable marriage problems, the proposed algorithm has proved to improve on the existing solutions.

▸ Keywords : Marriage Problem, Matching, Preference, Threshold Value

• First Author: Sang-Un Lee, Corresponding Author: Sang-Un Lee
*Sang-Un Lee (sulee@gwnu.ac.kr), Dept. of Multimedia Engineering, Gangneung-Wonju National University
• Received: 2015. 08. 07, Revised: 2015. 09. 10, Accepted: 2015. 09. 24.

I. Introduction

결혼 문제 (marriage problem, MP)는 n 명의 남성 (m_1, $m_2,\cdots,m_n$)과 n명의 여성 ($w_1,w_2,\cdots,w_n$)이 있고, 각자가 선호하는 이성의 순위가 주어졌을 때, n 쌍의 매칭을 찾는 문제로 최소 가중치 이분 매칭 (minimum weight bipartite matching) 또는 완전 매칭 (perfect matching)이라 한다[1,2].

MP는 간선의 가중치 (edge weight)가 주어지는 경우와 가중치가 없는 (unweighted) 경우로 구분된다. 본 논문은 간선 가중치 (선호도)가 주어진 경우를 고려한다. 간선 가중치가 주어진 경우는 안정된 결혼 문제 (stable marriage problem, SMP)라 하며, 이는 결혼 관계가 깨지지 않는 가장 안정적인 (stable) n쌍을 결정하는 문제이다.

주어진 그래프 $G=(V,E)$에 대해, SMP의 해 (solution)를 구하는 알고리즘으로는 일반적으로 수행 복잡도 $O(|V|^2|E|)$의 Gale-Shapley 알고리즘 (GSA)[3,4]이 널리 알려져 있다.

GSA는 남성-최선, 여성-최악 방식을 적용하여 한 남성이 자신이 가장 선호하는 여성을 선택하면, 지명된 여성은 자신이 가장 싫어하는 남성이라 할지라도 더 이상 자신을 선호(지명)한 남성이 없으면 어쩔 수 없이 수동적으로 받아들이는 방식이다. 단, 2명 이상의 남성이 자신을 지명한 경우에만 자신이 보다 선호하는 남성을 선택할 권리를 가진다. 이런 방식을 채택한 관계로 남성 관점에서는 최선 (최적)의 선택이 될 수 있지만 여성 관점에서는 최악의 선택이 될 수 있어 양측 모두를 만족시키는 균형점을 찾지 못할 수도 있는 단점을 갖고 있다.

본 논문은 안정된 결혼 문제에 대해 기존에 잘 알려진 GSA에 비해 양측을 모두 만족시키는 보다 향상된 균형점의 해를 찾을 수 있는 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 SM 문제에 대한 해를 구하는 GSA를 고찰한다. 3장에서는 각 행과 열의 최소치 중에서 최대치인 한계치 (threshold value)를 적용하는 한계 알고리즘 (threshold algorithm, TA)을 제안한다. 4장에서는 다양한 문제들에 적용하여 제안된 알고리즘의 적용성을 평가해 본다.

II. Related Works and Problems

n 명의 남성 $m_i,(i=1,2,\cdots,n)$와 n명의 여성 $w_j,(j=1,2,\cdots,n)$가 있고, 각각은 선호도 p_{ij} or p_{ji}를 갖고 있다. 이 경우, 안정된 결혼 문제는 최소 가중치 합 (최우선 선호도 순위)의 이분 매칭 해를 구하는 문제이다. 이는 2개의 $K_{n,n}$인 완전 이분 그래프 (complete bipartite graph)로 표현될 수 있다. 이 문제의 해를 구하는 대표적인 방법으로 GSA[3,4]가 있으며, 수행 복잡도 (횟수)는 $O(|V|^2|E|)$이다.

Hunt[5]에서 인용된 그림 1의 $n=4$인 안정된 결혼문제 SM_1에 GSA를 적용하여 보자. GSA는 남성 최적 청혼-여성 최악 수락 알고리즘으로, m_1은 w_1에게 청혼하고, m_2는 w_2에게 청혼한다. 여기서 w_1과 w_2는 자신을 가장 선호하는 남성이 1명이므로 자신이 가장 선호하는지 여부와 상관없이 무조건 청혼을 수락한다. 다음으로, m_3가 w_1에게 청혼하면 w_1 입장에서는 m_1과 m_3 2명이 자신에게 청혼한 상태로 자신이 보다 선호하는 m_1의 청혼을 수락하고, m_3의 청혼은 거절한다. m_3는 다시 2번째로 선호하는 w_4에게 청혼하면 w_4는 이를 수락한다. 다음으로 m_4가 가장 선호하는 w_4에게 청혼하면 w_4는 m_3와 m_4 중 자신이 보다 선호하는 m_3의 청혼을 수락하고, m_4의 청혼을 거절한다. m_4는 다시 2순위 선호도인 w_3에게 청혼하면, w_3은 아직까지 독신으로 m_4의 청혼을 수락한다. 따라서 $(m_1,w_1),(m_2,w_2),(m_3,w_4),(m_4,w_3)$의 쌍이 맺어진다. 이 결과 선호도 합 $z=2+4+3+6=15$를 얻는다.

남성의 여성 선호도	여성의 남성 선호도	해
$m_1: w_1,w_2,w_3,w_4$ $m_2: w_2,w_1,w_3,w_4$ $m_3: w_1,w_4,w_3,w_2$ $m_4: w_4,w_3,w_1,w_2$	$w_1: m_1,m_2,m_3,m_4$ $w_2: m_4,m_3,m_2,m_1$ $w_3: m_1,m_2,m_3,m_4$ $w_4: m_3,m_4,m_1,m_2$	$(m_1,w_1): 1+1=2$ $(m_2,w_2): 1+3=4$ $(m_3,w_4): 2+1=3$ $(m_4,w_3): 2+4=6$

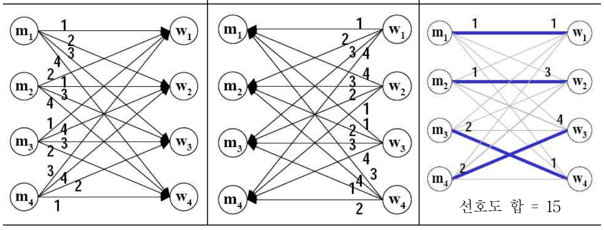

Fig. 1. SM_1 problem

만약 (m_1,w_1)과 (m_2,w_2) 짝을 맺은 상태에서 w_1이 m_1보다 m_2를 보다 선호하고, m_2도 w_2보다는 w_1을 보다 선호하면 (m_2,w_1) 쌍이 형성되어 $(m_1,-)$과 $(-,w_2)$는 파혼하게 된다. 이를 "불안정한 (unstable)" 상태라 한다. 위에서 얻은 결과가 "안정된 (stable)" 매칭 결과인지 여부는 그림 2에서 알 수 있다. 그림 2에서 $(m_1,w_1),(m_2,w_2),(m_3,w_4),(m_4,w_3)$의 선호도 값 (p_{ij},p_{ji})에 대해, 행에 대해 p_{ij}보다 큰 선호도를 삭제하고, 열에 대해 p_{ji}보다 큰 값을 삭제하여 선택된 선호도 값 (p_{ij},p_{ji})를 이동시킬 수 없으면 안정된 결과이다. 그림 2의 결과 선택된 4 쌍의 어느 쌍도 다른 쌍으로 이동이 불가능하다. 따라서 이 결과는 안정되었다고 한다.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{array} & \begin{bmatrix} (1,1) & (2,4) & (3,1) & (4,3) \\ (2,2) & (1,3) & (3,2) & (4,4) \\ (1,3) & (4,2) & (3,3) & (2,1) \\ (3,4) & (4,1) & (2,4) & (1,2) \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{array} & \begin{bmatrix} (1,1) & (-,-) & (-,1) & (-,-) \\ (-,-) & (1,3) & (-,2) & (-,-) \\ (1,-) & (-,2) & (-,3) & (2,1) \\ (-,-) & (-,1) & (2,4) & (1,-) \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{array} & \begin{bmatrix} (1,1) & (-) & (-) & (-) \\ (-) & (1,3) & (-) & (-) \\ (-) & (-) & (-) & (2,1) \\ (-) & (-) & (2,4) & (-) \end{bmatrix} \end{array}$$

Fig. 2. Stable determination for SM_1 problem

이와 같이 GSA는 항상 안정된 해를 얻을 수 있다. 그러나

GSA는 남성은 최선의 선택을, 여성은 최악의 수락을 하는 방법으로, 남성과 여성 양쪽을 모두 충족시키는 평형 점 (equilibrium point)을 찾을 수 없다. 즉, 특정 데이터에 대해서는 GSA로 구한 결과보다 좋은 결과를 추가로 얻을 수 있으며, GSA는 최적해를 얻지 못할 수도 있다.

이러한 GSA의 단점을 보완하면서, 최적의 평형 점을 찾는 방법으로 Lee[6]는 선호도 우선순위를 부여하여 최대치를 선택하는 방법을, Lee[7]는 행에서 최소 상호 호감도 합을 선택하고, 중복 선택된 열에 대해 해를 개선할 수 있는 값을 이동시키는 방법을, Lee[8]는 최대 비선호도 합을 삭제하는 방법을 제안하였다.

이들 연구 결과의 공통점은 GSA와 마찬가지로 최종적으로 선택된 선호도의 최대치를 사전에 결정할 수 없어 최악의 선호도 합으로 확장 (점점 더 불안정한, 파혼될 가능성이 보다 높은)될 수도 있는 문제점을 갖고 있다.

3장에서는 이들 알고리즘의 단점을 해결하는 방법으로 최종적으로 결정될 선호도의 최대치를 사전에 한계치 (threshold value)로 결정하고 이 값 이하들로 n쌍을 보다 간단히 선택하는 전혀 새로운 방법을 제안한다.

III. Threshold Stable Marriage Algorithm

본 장에서는 선호도 합 행렬에 대해, 행과 열의 최소치들을 선택하고, 선택된 값들 중 최대치를 한계치 p_{ij}^*로 설정하여 n쌍을 결정하는 기준으로 사용한다. 다음으로, 각 행과 열의 선호도가 1개씩만 선택되었으면 2개 이상 선택된 행과 열의 축소된 행렬에 대해 최대치 $_{\max}p_{ij}$ 부터 삭제하면서 행과 열이 1개씩 존재하도록 한다. 만약, 축소된 행렬이 2×2인 경우, $p_{i_1j_1}+p_{i_2j_2} > p_{i_2j_1}+p_{i_1j_2}$와 $p_{i_2j_1} \le p_{ij}^*, p_{i_1j_2} \le p_{ij}^*$이면 $p_{i_1j_1} \rightarrow p_{i_2j_1}$, $p_{i_2j_2} \rightarrow p_{i_1j_2}$로 결정한다. 본 알고리즘을 개선된 한계 알고리즘 (thresh algorithm, TA)이라 하며, 다음과 같이 수행된다.

Step 1. 남성의 여성 선호도와 여성의 남성 선호도 합 행렬값 p_{ij}를 구한다.

Step 2. 수행 복잡도 $O(n)$

(1) i행 $(i=1,2,\cdots,m)$의 $_{\min}p_i$ 선택, $_{\max\min}p_i$ 저장.

(2) j열$(j=1,2,\cdots,n)$의 $_{\min}p_j$ 선택, $_{\max\min}p_j$ 저장.

(3) 한계치 $p_{ij}^* = {}_{\max}\{_{\max\min}p_i, {}_{\max\min}p_j\}$결정, 행렬에서 $p_{ij} > p_{ij}^*$ 삭제.

(4) $|p_i|=1$나 $|p_j|=1$에 대해

$|p_i|=1$, 동일 열 $|p_j| \ge 2$이면 최소 증가 p_{ij} 복구.

$|p_j|=1$, 동일 행 $|p_i| \ge 2$이면 최소 증가 p_{ij} 복구.

만약, 복구된 $p_{ij} > p_{ij}^*$이면 $p_{ij}^* \leftarrow p_{ij}$로 갱신.

(5) $m<n$ 행렬인 불균형 문제는 $_{\max}p_{ij}$ 또는 $|p_i|=1$나 $|p_j|=1$가 중복된 행이나 열의 $_{\max}p_{ij}$를 포함한 $n-m$ 열 삭제.

Step 3. 축소된 행 개수가 $|i|=m$일 때까지 수행: 수행 복잡도$O(n)$

(1) $|p_i|=1$또는 $|p_j|=1$이 존재하면 해당 p_{ij}를 제외한 행이나 열의 비용 삭제, 해당 행과 열을 제외시킨 축소된 행렬을 얻음.

만약, $|p_i|=0$또는 $|p_j|=0$이 존재하면 미 선택된 행과 열의 p_{ij} 복구. $p_{ij} > p_{ij}^*$이면 $p_{ij}^* \leftarrow p_{ij}$ 갱신.

(2) 2×2행렬이 아닌 경우, $|p_i|=1$또는 $|p_j|=1$이 없으면 $_{\max}p_{ij}$ 삭제. (단, 복구된 p_{ij}는 $_{\max}p_{ij}$로 취급하지 않음)

만약, $|p_i|=1$이나 $|p_j|=1$이 존재하면 go to (1).

만약, $|p_i|=1$이나 $|p_j|=1$이 없으면 (2) 반복 수행.

(3) 2×2행렬인 경우, $|p_i|=1$또는 $|p_j|=1$이 없고 $p_{i_1j_1}+p_{i_2j_2} > p_{i_2j_1}+p_{i_1j_2}$이면 $p_{i_1j_1}, p_{i_2j_2}$ 삭제, 알고리즘 종료.

SM_1 문제에 대해 TA를 적용한 결과는 그림 3과 같다. 각 행의 최소치는 (2,4,3,3)이며, 각 열의 최소치는 (2,4,4,3)으로 한계치 $p_{ij}^*=4$로 결정된다. 선호도 합 행렬에서 $p_{ij} > p_{ij}^*$를 삭제하면, 2열, 3열과 4행에서 1개씩 선택된다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & & 4 & \\ 4 & 4 & & \\ 4 & & & 3 \\ & & & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & & 4 & \\ & 4 & & \\ 4 & & & \\ & & & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$z=4+4+4+3=15$$

Fig. 3. The Solution of SM_1 Problem Using TA

따라서 $(1,3)=4, (2,2)=4$에 대해서는 $|p_j|=1$이므로 행의 나머지 값들을 삭제하고, 각 열의 $(4,4)=3$은 $|p_i|=1$이므로 열의 나머지 값들을 삭제한다. 이 결과 최종적으로 $(3,1)=4$가 결정되어 $z=4+4+4+3=15$의 해를 얻는다. 제안된 알고리즘은 GSA[3,4]와 동일한 해를 보다 쉽게 구하였음을 알 수 있다.

IV. Applications and Evaluation

본 장에서는 표 1의 7개 안정된 결혼 문제에 제안된 알고리즘을 적용하여 본다. SM_2, SM_3, SM_4는 Irving [9,10]에서, SM_5, SM_6는 Iwama[11]에서, SM_7은 Kim[12]에서, SM_8은 Wikipedia[4]에서 인용되었다.

Table 1. Experimental Data for Stable Marriage Problem

남성 선호도	여성 선호도	해=13
$m_1 : w_1,w_4,w_2,w_3$	$w_1 : m_4,m_1,m_2,m_3$	$(m_1,w_1) : 1+2=3$
$m_2 : w_3,w_2,w_4,w_1$	$w_2 : m_1,m_2,m_4,m_3$	$(m_2,w_2) : 2+2=4$
$m_3 : w_2,w_3,w_4,w_1$	$w_3 : m_2,m_3,m_4,m_1$	$(m_3,w_3) : 2+1=3$
$m_4 : w_4,w_3,w_1,w_2$	$w_4 : m_4,m_3,m_1,m_2$	$(m_4,w_4) : 1+2=3$

	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	(1,2)	(3,1)	(4,3)	(2,4)
m_2	(4,3)	(2,2)	(1,2)	(3,1)
m_3	(4,4)	(1,4)	(2,1)	(3,3)
m_4	(3,1)	(4,3)	(2,4)	(1,2)

→

	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	3	4	7	6
m_2	7	4	3	4
m_3	8	5	3	6
m_4	4	7	6	3

(a) SM_2

남성 선호도	여성 선호도	해=14
$m_1 : w_1, w_4, w_3, w_2$	$w_1 : m_2, m_3, m_1, m_4$	$(m_1, w_4) : 2+1=3$
$m_2 : w_4, w_2, w_1, w_3$	$w_2 : m_2, m_4, m_1, m_3$	$(m_2, w_2) : 2+1=3$
$m_3 : w_2, w_1, w_4, w_3$	$w_3 : m_1, m_4, m_3, m_2$	$(m_3, w_1) : 2+2=4$
$m_4 : w_2, w_3, w_4, w_1$	$w_4 : m_1, m_4, m_2, m_3$	$(m_4, w_3) : 2+2=4$

	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	(1,3)	(4,3)	(3,1)	(2,1)
m_2	(3,1)	(2,1)	(4,4)	(1,3)
m_3	(2,2)	(1,4)	(4,3)	(3,4)
m_4	(4,4)	(1,2)	(2,2)	(3,2)

→

	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	4	7	4	3
m_2	4	3	8	4
m_3	4	5	7	7
m_4	8	3	4	5

(b) SM_3

남성 선호도	여성 선호도	해=23
$m_1 : w_2, w_1, w_3, w_4, w_6, w_5$	$w_1 : m_5, m_1, m_6, m_2, m_3, m_4$	$(m_1, w_1) : 2+2=4$
$m_2 : w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$	$w_2 : m_6, m_2, m_1, m_4, m_3, m_5$	$(m_2, w_2) : 2+2=4$
$m_3 :, w_3, w_4, w_2, w_5, w_1, w_6$	$w_3 : m_1, m_4, m_3, m_6, m_2, m_5$	$(m_3, w_3) : 1+3=4$
$m_4 : w_4, w_1, w_3, w_5, w_6, w_2$	$w_4 : m_2, m_3, m_4, m_5, m_1, m_6$	$(m_4, w_4) : 1+3=4$
$m_5 : w_5, w_1, w_4, w_6, w_3, w_2$	$w_5 : m_3, m_5, m_6, m_4, m_2, m_1$	$(m_5, w_5) : 1+2=3$
$m_6 : w_1, w_6, w_2, w_3, w_5, w_4$	$w_6 : m_4, m_6, m_3, m_1, m_5, m_2$	$(m_6, w_6) : 2+2=4$

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
m_1	(2,2)	(1,3)	(3,1)	(4,5)	(6,6)	(5,4)
m_2	(1,4)	(2,2)	(3,5)	(4,1)	(5,5)	(6,6)
m_3	(5,5)	(3,5)	(1,3)	(2,2)	(4,1)	(6,3)
m_4	(2,6)	(6,4)	(3,2)	(1,3)	(4,4)	(5,1)
m_5	(2,1)	(6,6)	(5,6)	(3,4)	(1,2)	(4,5)
m_6	(1,3)	(3,1)	(4,4)	(6,6)	(5,3)	(2,2)

→

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
m_1	4	4	4	9	12	9
m_2	5	4	8	5	10	12
m_3	10	8	4	4	5	9
m_4	8	10	5	4	8	6
m_5	3	12	11	7	3	9
m_6	4	4	8	12	8	4

(c) SM_4

남성 선호도	여성 선호도	해=23
$m_1 : w_1, w_3, w_2, w_4, w_5$	$w_1 : m_2, m_1, m_3, m_4, m_5$	$(m_1, w_1) : 1+2=3$
$m_2 : w_3, w_1, w_5, w_2, w_4$	$w_2 : m_2, m_1, m_4, m_5, m_3$	$(m_2, w_3) : 1+2=3$
$m_3 : w_2, w_1, w_5, w_4, w_3$	$w_3 : m_1, m_2, m_3, m_5, m_4$	$(m_3, w_5) : 3+2=5$
$m_4 : w_3, w_2, w_4, w_5, w_1$	$w_4 : m_3, m_1, m_4, m_2, m_5$	$(m_4, w_2) : 2+3=5$
$m_5 : w_3, w_4, w_2, w_5, w_1$	$w_5 : m_4, m_3, m_1, m_2, m_5,$	$(m_5, w_4) : 2+5=7$

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
m_1	(1,2)	(3,2)	(2,1)	(4,2)	(5,3)
m_2	(2,1)	(4,1)	(1,2)	(5,4)	(3,4)
m_3	(2,3)	(1,5)	(5,3)	(4,1)	(3,2)
m_4	(5,4)	(2,3)	(1,5)	(3,3)	(4,1)
m_5	(5,5)	(3,4)	(1,4)	(2,5)	(4,5)

→

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
m_1	3	5	3	6	8
m_2	3	5	3	9	7
m_3	5	6	8	5	5
m_4	9	5	6	6	5
m_5	10	7	5	7	9

(d) SM_5

남성 선호도	여성 선호도	해=20
$m_1 : w_1, w_3, w_2, w_4$	$w_1 : m_2, m_4, m_1, m_3$	$(m_1, w_2) : 3+2=5$
$m_2 : w_2, w_4, w_3, w_1$	$w_2 : m_3, m_1, m_2, m_4$	$(m_2, w_1) : 4+1=5$
$m_3 :, w_3, w_1, w_4, w_2$	$w_3 : m_4, m_2, m_3, m_1$	$(m_3, w_4) : 3+2=5$
$m_4 : w_4, w_2, w_1, w_3$	$w_4 : m_1, m_3, m_4, m_2$	$(m_4, w_3) : 4+1=5$

	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	(1,3)	(3,2)	(2,4)	(4,1)
m_2	(4,1)	(1,3)	(3,2)	(2,4)
m_3	(2,4)	(4,1)	(1,3)	(3,2)
m_4	(3,2)	(2,4)	(4,1)	(1,3)

→

	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	4	5	6	5
m_2	5	4	5	6
m_3	6	5	4	5
m_4	5	6	5	4

(e) SM_6

남성 선호도	여성 선호도	해=21
$m_1 : w_3, w_2, w_5, w_1, w_4$	$w_1 : m_3, m_5, m_2, m_1, m_4$	$(m_1, w_5) : 3+4=7$
$m_2 : w_1, w_2, w_5, w_3, w_4$	$w_2 : m_5, m_2, m_1, m_4, m_3$	$(m_2, w_2) : 2+2=4$
$m_3 : w_4, w_3, w_2, w_1, w_5$	$w_3 : m_4, m_3, m_5, m_1, m_2$	$(m_3, w_4) : 1+3=4$
$m_4 : w_1, w_3, w_4, w_2, w_5$	$w_4 : m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$	$(m_4, w_3) : 2+1=3$
$m_5 : w_1, w_2, w_4, w_5, w_3$	$w_5 : m_2, m_3, m_4, m_1, m_5$	$(m_5, w_1) : 1+2=3$

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
m_1	(4,4)	(2,3)	(1,4)	(5,1)	(3,4)
m_2	(1,3)	(2,2)	(4,5)	(5,2)	(3,1)
m_3	(4,1)	(3,5)	(2,2)	(1,3)	(5,2)
m_4	(1,5)	(4,4)	(2,1)	(3,4)	(5,3)
m_5	(1,2)	(2,1)	(5,3)	(3,5)	(4,5)

→

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
m_1	8	5	5	6	7
m_2	4	4	9	7	4
m_3	5	8	4	4	7
m_4	6	8	3	7	8
m_5	3	3	8	8	9

(f) SM_7

남성 선호도	여성 선호도	해=14
$m_1 : w_1, w_3, w_2, w_4$	$w_1 : m_2, m_1, m_3, m_4$	$(m_1, w_1) : 1+2=3$
$m_2 : w_3, w_4, w_1, w_2$	$w_2 : m_4, m_1, m_2, m_3$	$(m_2, w_4) : 2+1=3$
$m_3 :, w_4, w_2, w_3, w_1$	$w_3 : m_1, m_3, m_2, m_4$	$(m_3, w_3) : 3+2=5$
$m_4 : w_3, w_2, w_1, w_4$	$w_4 : m_2, m_3, m_1, m_4$	$(m_4, w_2) : 2+1=3$

	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	(1,2)	(3,2)	(2,1)	(4,3)
m_2	(3,1)	(4,3)	(1,3)	(2,1)
m_3	(4,3)	(2,4)	(3,2)	(1,2)
m_4	(3,4)	(2,1)	(1,4)	(4,4)

→

	w_1	w_2	w_3	w_4
m_1	3	5	3	7
m_2	4	7	4	3
m_3	7	6	5	3
m_4	7	3	5	8

(g) SM_8

표 1의 실험 데이터에 대해 TA를 적용한 결과는 그림 4와 같다. SM_2는 $p_{ij}^{*}=4$로 결정되고, $|p_j|=1$인 3열의 $(3,3)=3$이 결정되고 행렬의 최대치인 $(2,4)=4$가 삭제되므로 인해 $|p_i|=1$인 $(2,2)=4$와 $|p_j|=1$인 $(4,4)=3$이 선택되고, 이들 값의 나머지 행이나 열 선호도가 삭제되어 최종적으로 $(1,1)=3$이 결정되어 $z=3+4+3+3=13$을 얻었다.

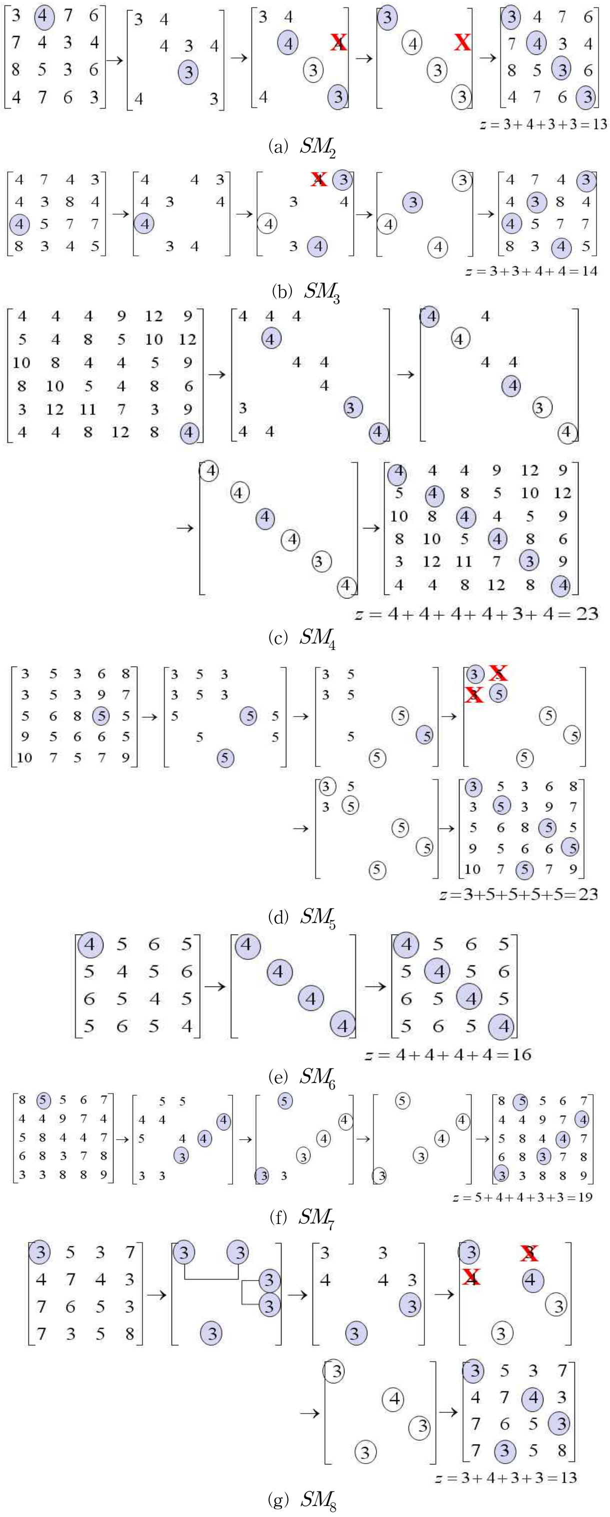

Fig. 4. The Solution of Marriage Problems Using TA

SM_3는 $p_{ij}^* = 4$로 결정되고, $|p_i| = 1$인 $\{3,1\} = 4$가 결정되고 4를 제외한 1열의 나머지 선호도 값들이 삭제된다. 이후, 행렬의 최대치인 $\{1,3\} = 4$가 삭제되므로 인해 $|p_i| = 1$인 $\{1,4\} = 3$과 $|p_j| = 1$인 $\{4,3\} = 4$가 선택되고, 이들 값의 나머지 행이나 열 선호도가 삭제되어 최종적으로 $\{2,2\} = 3$이 결정되어 $z = 3+3+4+4 = 14$를 얻었다.

SM_4는 $p_{ij}^* = 4$로 결정되고, $|p_i| = 1$이나 $|p_j| = 1$인 선호도가 선택되고 이들 선호도의 나머지 행이나 열의 선호도를 산제하는 과정에서 최적 해를 얻었으며, 행렬의 최대치 $_{\max}p_{ij}$를 삭제하는 과정은 수행되지 않았다.

SM_5와 SM_8은 SM_1과 같이 행렬의 최대치 $_{\max}p_{ij}$를 삭제하는 과정이 수행되었으며, SM_6은 단지 $p_{ij}^* = 4$를 선택하여 최적 해를 바로 얻었다. SM_7은 SM_4와 동일한 과정을 수행하여 최적 해를 얻었다. 특이한 점은 SM_8로, $p_{ij} > p_{ij}^*$를 삭제한 결과 1행의 $|p_j| = 1$과 4열의 $|p_i| = 1$이 2개씩 중복 선택되어 추가로 $(2,1) = 4, (2,3) = 4$가 추가되었다. 이후 과정은 SM_2와 동일하게 수행되었다.

TA를 적용한 결과 SM_2, SM_3, SM_4와 SM_5에 대해서는 Irving[9,10]과 Iwama[11]와 동일한 결과를 얻었다. 그러나 SM_6은 최적 해를 20에서 16으로, SM_7은 21을 19로, SM_8은 14를 13으로 개선시켰다. 결국, TA는 8개 데이터들 중에서 5개 데이터(62.5%)에 대해서는 기존 알고리즘과 동일한 성능을, 3개 데이터 (37.5%)에 대해서는 보다 우수한 성능을 갖고 있음을 알 수 있다.

IV. Conclusions

본 논문은 선호도 합 행렬에 대해 단순히 행의 최소치와 열의 최소치들 중에서 최대치인 한계치 p_{ij}^*를 적용하여 안정된 결혼문제의 해를 구하였다. 세부적으로, 제안된 알고리즘은 $p_{ij} \le p_{ij}^*$에 대해 $_{\max}p_{ij}$ 부터 역-삭제하는 방법으로 행과 열에서 중복되지 않게 1개씩 선택하여 안정된 n쌍을 선정할 수 있었다.

제안된 한계 알고리즘을 적용한 결과 8개의 문제 중에서 5개 문제에 대해서는 GSA와 동일한 해를, 나머지 3개 문제에 대해서는 GSA로 구한 해를 개선하는 보다 좋은 결과를 얻었다. 따라서 동일한 결과를 얻은 5개 문제는 이미 GSA로도 최적 해를 구하였기 때문에 아무리 좋은 방법이라도 이 해를 개선할 수는 없는 관계로, 제안 알고리즘과의 성능비교 대상으로 제외시키면, 나머지 3개 데이터에 대해서는 제안된 TA는 남성-최적, 여성-최악의 단측 최적화 기법인 SA에 비해 양측 모두를 만족시키는 균형점을 찾을 수 있는 월등히 좋은 알고리즘임을 알 수 있다.

제안된 알고리즘은 수행 복잡도가 $O(|V|^2|E|)$인 Gale-Shapley 알고리즘[3,4]에 비해 $O(E)$로 빠르게 해를 구할 수 있기 때문에 결혼문제의 최적 해를 구하는 알고리즘으로 적용할 수 있을 것이다.

SMP와 유사한 개념으로 할당문제 (assignment problem, AP)가 있다. 이는 n 지역의 물류창고에서 n 지역의 판매점까지 물품을 배송하는 비용 c_{ij}가 $n \times n$이 있는 경우 각 물류창고가 하나의 판매점으로만 물품을 배송할 경우 최소의 배송비용을 찾고자 한다면 $n \times n$개중 각 행과 각 열에 각각 1개씩만 선택하여야 한다. 이 문제에 대해서는 헝가리안 알고리즘 (Hungarian algorithm)[13]이 적용되고 있지만 $O(n^3)$ 복잡도를 갖고 있으며, 선을 그리는 방법에 있어서 명확한 기준을 제공하지 못하고 있다. 따라서 본 논문에서 제안된 한계 알고리즘을 적용하면 AP에 대해서도 헝가리안 알고리즘에 비해 보다 간단히 해를 찾을 수 도 있을 것이다. 추후 한계 알고리즘을 AP에 적용할 수 있는지를 연구할 계획이다.

REFERENCES

[1] T. Szabó, "Graph Theory," Institute of Technical Computer Science, Department of Computer Science, ETH, 2004.
[2] M. X. Goemans, "18,433 Combinatorial Operation: Lecture Notes on Bipartite Matching," Massachusetts Institute of Technology, 2007.
[3] J. T. Eyck, 'Algorithm Analysis and Design," http://www.academic.marist.edu/~jzbv/algorithms/TheStableMarriageProblem.htm, 2008.
[4] Wikipedia, "Stable Marriage Problem,," http://en.wikipedia.org/wiki/Stable_marriage_problem, Wikimedia Foundation Inc., 2010.
[5] W. Hunt, "The Stable Marriage Problem," Lane Department of Computer Science and Electrical Engineering, West Virginia University, 2004.
[6] S. U. Lee, “Marriage Problem Algorithm Based on the Most Preferred Rank Selection Method,” Journal of IIBC, Vol. 14, No. 3, pp. 111-117, Jun. 2014.
[7] S. U. Lee, “A Marriage Problem Algorithm Based on Duplicated Sum of Inter-Preference Moving Method,” Journal of KSCI, Vol. 20, No. 5, pp. 107-112, May 2015.
[8] S. U. Lee, “Marriage Problem Algorithm based on the Maximum Dispreference Sum-Delete Method,” Journal of IIBC, Vol. 15, No. 3, pp. 149-154, Jun. 2015.
[9] R. W. Irving, "Stable Matching Problems with Exchange Restrictions," Journal of Combinatorial Optimization, Vol. 16, pp. 344-360, 2008.

[10] R. W. Irving, "The Man-Exchange Stable Marriage Problem," Department of Computing Science, Research Report, TR-2004-177, University of Glasgow, UK., 2004.
[11] K. Iwama, "Stable Matching Problems," http://www.lab2.kuis.kyoto-u.ac.jp/~iwama/papers/isaac2006-3.ppt, 2006.
[12] J. H. Kim, "MAT 2106-02 Discrete Mathematics: Combination Theory within the framework of Marriage Problem," Department of Mathematics, Yousei University, Korea, 2001.
[13] H. W. Kuhn, "50 Years of Integer Programming 1958-2008: From the Early Years to the State-of-the-Art, Chapter 2. The Hungarian Method for the Assignment Problem," Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp 29-47, Nov. 2009.

Authors

Sang Un Lee received the B. Sc. degree in avionics from the Korea Aerospace University in 1997. He received the M. Sc. and Ph. D. degrees in Computer Science from Gyeongsang National University, Korea, in 1997 and 2001, respectively. He is currently Professor with the Department of Multimedia Science, Gangneung-Wonju National University, Korea. He is interested in software quality assurance and reliability modeling, software engineering, software project management, neural networks, and algorithm.