

# Kinetic BGK 기법을 이용한 Navier-Stokes 유동 해석자의 천이 영역 적용성 연구

조 민 우, 양 태 호, 권 오 준\*

한국과학기술원 기계항공공학부 항공우주공학과

## A FEASIBILITY STUDY OF A NAVIER-STOKES FLOW SOLVER USING A KINETIC BGK SCHEME IN TRANSITIONAL REGIME

M.W. Cho, T.H. Yang and O.J. Kwon\*

Department of Aerospace Engineering, School of Mechanical and Aerospace Engineering, KAIST

*In the present study, a flow solver using a kinetic BGK scheme was developed for the compressible Navier-Stokes equation. The kinetic BGK scheme was used to simulate flow field from the continuum up to the transitional regime, because the kinetic BGK scheme can take into account the statistical properties of the gas particles in a non-equilibrium state. Various numerical simulations were conducted by the present flow solver. The laminar flow around flat plate and the hypersonic flow around hollow cylinder of flare shape in the continuum regime were numerically simulated. The numerical results showed that the flow solver using the kinetic BGK scheme can obtain accurate and robust numerical solutions. Also, the present flow solver was applied to the hypersonic flow problems around circular cylinder in the transitional regime and the results were validated against available numerical results of other researchers. It was found that the kinetic BGK scheme can similarly predict a tendency of the flow variables in the transitional regime.*

**Key Words :** 전산유체역학(Computational Fluid Dynamics), Navier-Stokes 방정식(Navier-Stokes Equations), BGK 모델(BGK Model), Kinetic BGK 기법(Kinetic BGK Scheme), 천이 영역(Transitional Regime)

### 1. 서 론

중·고고도 영역에서 극초음속으로 비행하는 미사일의 공력 특성을 계산하기 위해서는 연속체 영역부터 희박기체 영역에 이르는 넓은 범위의 유동을 정확하고 효율적으로 모사해야 한다. 공력 분야에서 연속체 영역의 유동을 해석하는 경우 오일러 방정식, Navier-Stokes 방정식을 이산화하는 다양한 수치 기법들이 주로 사용되며 이러한 수치기법들은 거시적인 관점에서 유동을 모사한다. 거시적인 관점에서 유동을 모사하는 기존의 수치기법들은 기체 유동의 미시적인 특성을 고려하지 않기 때문에 상대적으로 대기가 희박한 유동 영역을 정확하

게 해석하는 것이 어렵다. 미시적인 관점에서 유동을 모사하는 대표적인 수치기법으로 직접모사법(DSMC:Direct Simulation Monte Carlo)이 있으며, 희박기체 영역의 유동을 해석하는 경우 그 성능을 잘 발휘하는 것으로 알려져 있다. 하지만 직접모사법은 수치 계산 시 사용되는 시간 간격이 기체 입자의 충돌 시간보다 짧아야 하며, 계산 격자의 크기가 기체 입자의 평균 자유 경로보다 작아야 하는 제한조건이 있으므로 밀도가 높은 유동 영역에서는 많은 계산 시간이 소요되는 단점이 있다. 따라서 천이 영역의 유동을 정확하고 효율적으로 모사하려면 거시적인 관점에서 유동을 모사하는 수치기법과 미시적인 관점에서 유동을 모사하는 직접모사법이 아닌 다른 방법으로 접근해 볼 필요성이 존재한다.

Prendergast and Xu[1], Xu[2]이 제시한 Kinetic BGK 기법을 이용한 해석자는 볼츠만 방정식을 단순화한 BGK(Bhatnagar-Gross-Krook)모델[8]을 이용하여 수치적 이산화하는 방법으로 기체 입자들의 비평형 상태를 능동적으로 고려하면서

Received: August 17, 2015, Revised: September 21, 2015,  
Accepted: September 21, 2015.

\* Corresponding author, E-mail: ojkwon@kaist.ac.kr

DOI <http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2015.20.3.54>

© KSCFE 2015

Navier-Stokes 방정식을 계산한다. 최근까지 Prendergast and Xu[1], Xu[2]이 제시한 초기의 Kinetic BGK 해석자를 바탕으로 연속체 영역뿐만 아니라 천이 영역 유동 해석에 적용하기 위한 수치적인 시도가 이루어지고 있다. 한 예로 Fossati et al.[3]이 벽면에서 흡수되거나 방사되는 분자의 비율을 능동적으로 고려하고, 벽면 경계에서 속도 slip과 온도 jump 현상을 모사하는 방법으로 Kinetic BGK 해석자의 성능을 개선하여 천이 영역 유동 문제를 해석하였다.

본 연구는 Kinetic BGK 기법을 이용한 Navier-Stokes 유동 해석자를 개발하였으며, 연속체 영역 및 천이 영역에 해당하는 유동 문제를 풀이하였다. 연속체 영역의 층류 유동 해석을 통해서 개발한 해석자의 정확성을 살펴보고, 연속체 영역의 극초음속 유동 해석을 통해 해석자의 강건성을 확인하고자 하였다. 또한 천이 영역의 극초음속 유동 해석을 통해 천이 영역의 유동에 대한 Kinetic BGK 기법의 활용 가능성을 연구하고자 하였다.

## 2. 수치 기법

### 2.1 BGK 모델

기체 입자들의 통계적인 특성을 고려하여 비평형 상태를 해석할 수 있는 볼츠만 방정식을 이용한다. 볼츠만 방정식의 충돌항은 기체 입자들의 충돌 전, 후 상태량의 변화를 고려할 수 있으며, 볼츠만 방정식을 계산하면 기체 분포 함수  $f$ 를 구할 수 있다. 하지만 충돌항이 적분 형태의 복잡한 수식으로 구성되어 있으므로 직접적인 이산화를 통한 수치 해석이 매우 어렵다. 이를 해결하기 위해 충돌항을 단순화한 BGK 모델[8]이 제시되었고 본 연구에서는 이 모델을 이용하여 기체 분포 함수  $f$ 를 계산한다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{g-f}{\tau} \tag{1}$$

### 2.2 BGK 모델과 연속체 지배방정식 사이의 관계

볼츠만 방정식을 단순화한 BGK 모델과 연속체 영역 지배 방정식 사이의 관계를 살펴보고자 한다. BGK 모델을 이용하여 BGK 모멘트 방정식을 구한 다음 오일러 및 Navier-Stokes 방정식을 유도함으로써 BGK 모델을 이용한 Kinetic BGK 기법이 연속체 영역 유동 해석 기법으로 사용하는 것이 타당함을 보이고자 한다.

유동장 내에서 기체 입자들은 서로 충돌을 하게 되며, 충돌 전·후 질량, 운동량, 에너지가 보존되는 물리적인 제한 조건이 적용하면 기체 분포 함수  $f$ 와 평형 상태의 기체 분포 함수  $g$  사이에는 아래의 호환 조건이 존재한다.

$$\int \psi(g-f) d\Xi = \int \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ (u^2+v^2+\xi^2)/2 \end{pmatrix} (g-f) d\Xi = 0 \tag{2}$$

여기서  $d\Xi = du \cdot dv \cdot d\xi$ 로 정의한다.  $u, v$ 는 기체 입자의  $x, y$  방향 속도를 의미하며  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K)$ 는  $K$ 차원 내부속도를 표기하는 벡터로써  $\xi^2 = \sum_{i=1}^K \xi_i^2$ 로 정의된다.  $D$ 차원 유동의 경우, 유동의 유효 자유도를  $n$ 이라 하면 비열비는  $\gamma = (n+2)/n$ 이고  $K = -D + 2/(\gamma - 1)$ 으로 정의할 수 있다. 2차원의 경우  $z$ 방향의 속도는 내부 속도에 포함된다.

BGK 모델에 호환 조건을 적용하여 최종적으로 BGK 모멘트 방정식을 유도할 수 있으며 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} \langle \psi, g \rangle_t + \langle u\psi, g \rangle_x + \langle v\psi, g \rangle_y \\ = \langle u\psi, (g-f) \rangle_x + \langle v\psi, (g-f) \rangle_y \end{aligned} \tag{3}$$

식 (3)의 BGK 모멘트 방정식에서 기체 분포 함수  $f$ 의 상태를 정의하는 방법에 따라 오일러 방정식 또는 Navier-Stokes 방정식 등으로 표현 할 수 있다.

기체 분포 함수  $f$ 의 상태가 평형 상태의 기체 분포 함수  $g$ 와 동일하다고 정의하는 경우 BGK 모멘트 방정식으로부터 오일러 방정식을 유도할 수 있다.

$$\langle \psi, g \rangle_t + \langle u\psi, g \rangle_x + \langle v\psi, g \rangle_y = 0 \tag{4}$$

기체 분포 함수  $f$ 의 상태를 Chapman-Enskog의 급수 전개를 이용하여  $f = g - \tau(g_t + ug_x + vg_y) + O(\tau^2)$ 로 정의하면 BGK 모멘트 방정식에서 Navier-Stokes 방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \langle \psi, g \rangle_t + \langle u\psi, g \rangle_x + \langle v\psi, g \rangle_y \\ = \tau \langle \psi, ug_{xt} + u^2g_{xx} + vg_{yt} + v^2g_{yy} \rangle + O(\tau^2) \end{aligned} \tag{5}$$

위의 유도과정을 통해 볼츠만 방정식의 단순화된 형태인 BGK 모델은 기체 입자들의 통계적인 특성을 고려하여 비평형 상태를 능동적으로 해석할 수 있을 뿐 아니라 오일러 및 Navier-Stokes 방정식을 계산할 수 있는 모델임을 확인하였다.

### 2.3 Kinetic BGK 기법을 적용한 유한 체적법

체적  $\Omega$ 에 대한 Navier-Stokes 방정식의 적분 형태는 다음 식과 같다.

$$\int_{\Omega} \frac{d\vec{q}}{dt} dV + \int_{\partial\Omega} F_{\alpha}(\vec{q}) \cdot d\vec{A} = 0 \quad (6)$$

n유한 체적법은 적분 형태의 유동 지배방정식을 직접 이용할 수 있으므로 본 연구에서 개발한 Kinetic BGK 해석자는 유한 체적법을 기반으로 한다. 격자 구성 방법은 비정렬 격자 기반으로 하되 생성된 격자계에서 Median dual Cell-Vertex 기법을 이용하여 제어 체적을 정의한다. 즉, 격자점 주위에 인접한 모서리 중심들과 격자 도심들을 연결하여 가상의 dual 격자를 생성하고 이를 제어 체적으로 간주하여 기체 발생 과정을 모사한다. 제어 체적의 중심에서의 거시적인 유동 변수들은 내재적(implicit)인 시간 적분법을 이용하여 정보를 갱신한다.

정보를 갱신하는 과정은 크게 두 단계로 구분하여 정의한다. 하나의 제어 체적에서 공간에 따라 유동 변수들의 값을 정의하는 재건 단계와 인접한 제어 체적과의 정보 교환을 통해 유동 변수들의 값을 갱신하는 기체 발생 단계로 구분하였다. 두 단계에 대한 자세한 설명을 아래 항에서 하고자 한다.

### 2.3.1 재건 단계(Initial Reconstruction Stage)

정보 교환은 제어체적 경계면에서 정의된 플럭스  $F_{\alpha}(\vec{q})$ 를 이용하여 계산되며 이를 계산하기 위해서는 경계면에서 유동 변수들의 값을 정의하여야 한다. 경계면에서의 유동 변수들은 제어체적 중심( $x_{\alpha}, y_{\alpha}$ )에 저장된 유동 변수들 값을 기준으로 거리에 따른 기울기를 고려하여 계산하였다.

$$\vec{q}_{\alpha}(x, y) = \vec{q}(x_{\alpha}, y_{\alpha}) + \nabla \vec{q}_{\alpha} \cdot \Delta r \quad (7)$$

제어체적 중심에서의 1차 미분된 유동 변수들을 계산하기 위해 선형 최소제곱방법(Least square method)을 사용하였다. 또한 충격파가 발생하여 구배가 크고 불연속면이 발생하는 영역에서 비 물리적인 진동을 막기 위해서 Venkatakrishnan's 제한자를 적용하였다.

### 2.3.2 기체 발생 단계(Gas Evolution Stage)

기체 운동론에 따르면 격자 경계를 통과하는 미시적인 유동 변수들을 이용하여 기체 분포 함수의 형태를 모사할 수 있으며 이를 이용하여 플럭스  $F_{\alpha}(\vec{q})$ 를 계산할 수 있다[2].

$$\begin{aligned} F_{\alpha}(\vec{q}) &= (F_{\rho}, F_{\rho U}, F_{\rho V}, F_E)^T \\ &= \int u_n \psi f_{\alpha} du_n du_t d\xi \\ \psi &= \left( 1, n_x u_n + t_x u_t, n_y u_n + t_y u_t, \frac{u_n^2 + u_t^2 + \xi^2}{2} \right)^T \end{aligned} \quad (8)$$

비정렬 격자계 기반이므로 제어체적 경계면에서 속도의 법선 벡터( $u_n$ )와 접선 벡터( $u_t$ )를 이용하여 속도 성분  $u, v$ 를 정의하였다.

기체 분포 함수  $f_{\alpha}$ 를 정의하면 플럭스 값은 식 (8)을 통해 계산할 수 있음을 알 수 있다. 기체 분포 함수  $f_{\alpha}$ 를 계산하기 위해서 Kinetic BGK 모델을 이용한다. Kinetic BGK 모델을 이용하여  $f_{\alpha}$ 를 계산하면 아래의 식으로 정리할 수 있다[2].

$$\begin{aligned} f_{\alpha} &= f(\vec{x}_{\alpha}, t, \vec{u}_{\alpha}, \vec{\xi}) \\ &= \frac{1}{\tau} \int g(\vec{x}_{\alpha} - \vec{u}_{\alpha}(t-t'), t', \vec{u}_{\alpha}, \vec{\xi}) e^{-(t-t')/\tau} dt' \\ &\quad + e^{-(t-t_0)/\tau} f_0(\vec{x}_{\alpha} - \vec{u}_{\alpha}(t-t_0), t_0, \vec{u}_{\alpha}, \vec{\xi}) \end{aligned} \quad (9)$$

즉 기체 분포 함수  $f_{\alpha}$ 는 평형상태 기체 분포함수  $g$ 와 초기 비평형상태 기체 분포함수  $f_0$ 로 구성되어 있다. 격자 경계에서의 분포함수  $g$ 와  $f_0$ 는 격자 경계 좌우에서 계산된 평형상태의 기체 분포함수에 공간 및 시간 기울기를 고려하여 정의할 수 있다. 여기서 평형상태 기체 분포 함수  $g$ 는 맥스웰 분포 함수를 따르는 외재적인 함수로 정의하여 사용한다.

$$g = \rho \left( \frac{\theta}{\pi} \right)^{\frac{K+2}{2}} e^{-\theta(u-U)^2 + (v-V)^2 + \xi^2} \quad (10)$$

위 식에서  $U, V$ 는 거시적인 속도 성분이며  $u, v$ 는 미시적인 입자의 속도 성분이다. 또한  $\xi$ 는 내부 입자 속도 성분들을 나타내고  $\theta$ 는 분자 질량과 온도에 대한 함수로 다음 식과 같이 정의된다.

$$\theta \equiv \frac{m}{2kT} = \frac{1}{2R_{specific}T} \quad (11)$$

본 연구에서 개발한 Kinetic BGK 해석자에서는 계산의 효율성을 높이기 위해서 Chae et al.[4]이 제시한 기체 분포 함수를 식 (12)와 같이 적용하였다. 이는 Xu[2]가 제시한  $g$ 와  $f_0$ 의 초기 형태에서 공간 및 시간 기울기를 수정한 형태이다.

$$g = \begin{cases} g_{middle} (1 + \bar{a}_L(x_{\alpha} - x_{ci})) \\ g_{middle} (1 + \bar{a}_R(x_{\alpha} - x_{ci})) \end{cases} \quad (12)$$

$$f_0 = \begin{cases} g_{left} \\ g_{right} \end{cases}$$

위 식에서  $g_{left}$ 와  $g_{right}$ 는 제어체적 경계를 기준으로 왼

쪽과 오른쪽에서의 평형상태 기체 분포 함수를 의미하며  $g_{middle}$  은 제어체적 경계에서 형성된 새로운 평형상태 기체 분포 함수를 의미한다.

$g_{middle}$  을 결정하는 거시적 유동 변수들은 격자 경계를 기준으로 왼쪽과 오른쪽에서의 평형상태 기체 분포 함수  $g_{left}$  와  $g_{right}$  를 이용하여 계산할 수 있다[2]. 위 식에서 공간에 대한 기울기를 나타내는  $\bar{a}_L$ ,  $\bar{a}_R$  은 제어체적 경계면에서 재구성된 거시적 유동 변수와 제어체적 중심에서 경계면까지의 거리( $\Delta s$ )를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$\int g_{left} \bar{a}_L \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ u_t \\ \frac{(u_n^2 + u_t^2 + \xi^2)}{2} \end{pmatrix} du_n du_t d\xi = \frac{1}{\Delta s} \begin{pmatrix} \rho_{ci} - \rho_{Lc} \\ (\rho U_n)_{ci} - (\rho U_n)_{Lc} \\ (\rho U_t)_{ci} - (\rho U_t)_{Lc} \\ (\rho \epsilon)_{ci} - (\rho \epsilon)_{Lc} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\int g_{right} \bar{a}_R \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ u_t \\ \frac{(u_n^2 + u_t^2 + \xi^2)}{2} \end{pmatrix} du_n du_t d\xi = \frac{1}{\Delta s} \begin{pmatrix} \rho_{ci} - \rho_{Rc} \\ (\rho U_n)_{ci} - (\rho U_n)_{Rc} \\ (\rho U_t)_{ci} - (\rho U_t)_{Rc} \\ (\rho \epsilon)_{ci} - (\rho \epsilon)_{Rc} \end{pmatrix}$$

식 (9)에서 평형상태 기체 분포함수  $g$ 와 초기 비평형상태 기체 분포함수  $f_0$ 의 계수는 시간과 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다. 즉 CFL 시간 간격  $\Delta t$ 와 특성 충돌 시간  $\tau$ 이 플럭스 계산에 직접적인 영향을 미친다. 특성 충돌 시간  $\tau$ 는 동점성 계수  $\nu$ 와 압력  $p$ 를 이용하여 정의한다.

$$\tau = \frac{\nu \rho}{p} \quad (14)$$

본 연구에서는 충격파와 같이 유동의 구배가 크고 불연속면이 발생하는 문제를 정확하게 모사하기 위해 식 (14)를 변형하여 특성 충돌 시간을 정의하였다. 격자 크기에 비례하는 수치 점성항을 인위적으로 추가하여 시간 전진을 수행하고 유동의 구배가 크고 불연속면이 발생하는 부분을 능동적으로 모사하기 위해서 압력 구배에 의존하는 항을 이용하여 다음

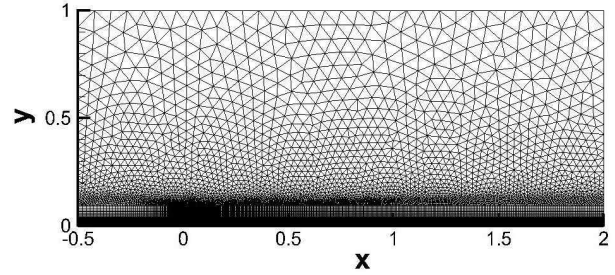


Fig. 1 Computational Meshes

식과 같이 특성 충돌 시간을 정의한다.

$$\tau = \frac{\nu \rho}{p} + \Delta t \cdot \min \left( 1, 5 \frac{|p_L - p_R|}{|p_L + p_R|} \right) \quad (15)$$

BGK 모델은 Prandtl 수가 1.0인 Navier-Stokes 방정식으로 유도된다. 본 연구에서 해석한 유동의 경우 화학반응이 없는 공기는 Prandtl 수가 0.72이며, 아르곤 기체는 0.67이다. 따라서 Prandtl 수에 대한 능동적인 고려가 가능하도록 에너지 플럭스 항을 수정하여 적용하였다[4].

$$F_E^{new} = \frac{1}{Pr} F_E^{old} + \left( \frac{1}{Pr} - 1 \right) \times \left[ \int u_n \left\{ \frac{1}{2} \bar{a}_5 (u_n^2 + u_t^2 + \xi^2) \right\} g_0 du_n du_t d\xi \right] \quad (16)$$

### 3. 수치해석 결과

#### 3.1 연속체 영역의 층류 평판 점성 유동 해석

연속체 영역의 2차원 층류 평판 점성 유동 계산을 통해서 Kinetic BGK 기법의 수치적인 특성 및 해석자의 정확성을 검증하였다. Kinetic BGK 기법은 기존의 수치 기법과 달리 플럭스 값을 갱신하는 과정에서 고유한 수치적인 특성이 나타난다. 즉 유동을 거시적으로 해석하는 기존의 수치기법이 대류 플럭스와 점성 플럭스로 구분하여 유동장의 플럭스를 계산하는 반면 Kinetic BGK 기법은 기체 분포 함수  $f_\alpha$ 를 이용하여 플럭스를 계산하기 때문에 대류 및 점성 플럭스를 동시에 계산하는 수치적인 특성이 있다. 또한 Kinetic BGK 기법을 이용한 해석자가 평판에서 점성의 영향을 정확히 모사할 수 있는지 확인하고자 하였다.

계산에 사용된 유동 조건은 자유류의 Mach 수는 0.15, Knudsen 수는  $1.5480 \times 10^{-5}$ , Reynolds 수는 14,370인 단원자 기체로 가정하였다. Fig. 1에서는 경계층 유동을 정확하게 계산하기 위해 30개의 프리즘 층을 분포시켰으며, 각 프리즘 층

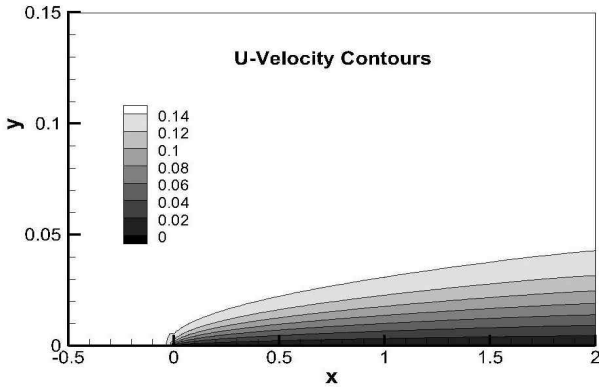


Fig. 2 U-Velocity Contours

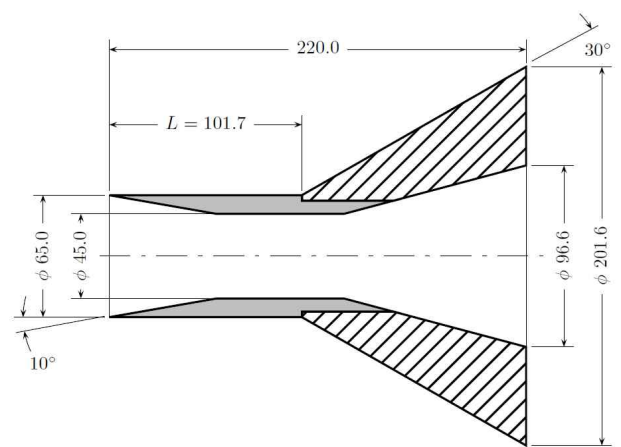


Fig. 4 Flare Hollow Cylinder Section View

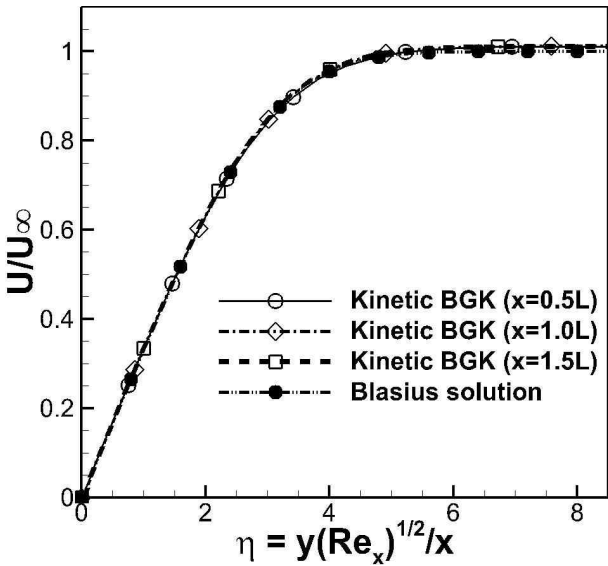


Fig. 3 Comparison of U-velocity in the boundary layer

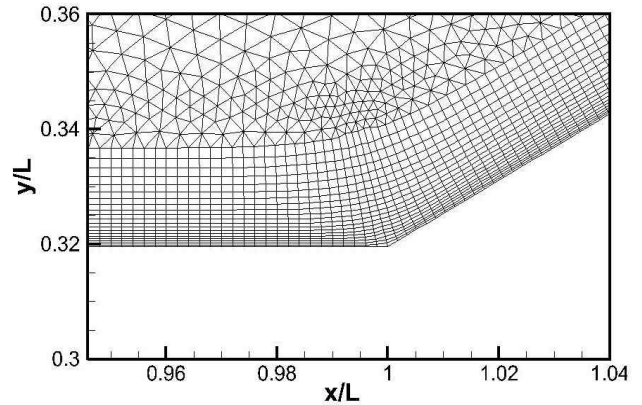


Fig. 5 Computational Meshes

의 높이는 1.1배로 증가한다. 나머지 영역에 대해서는 삼각형 격자를 이용했으며, 계산에 사용된 격자 수는 21,442개, 노드 수는 17,612개이다. Fig. 2에서 평판이 시작되는 0의 위치부터 점성의 영향을 받아 경계층이 발달하여 속도 프로파일이 변하는 것을 보여준다. Fig. 3에서 평판의 위치에 대한 평판에 수직인 속도 값과 Blasius의 상사해(similarity solution)를 통해 얻어진 값과 비교하였으며 잘 일치함을 알 수 있다. 이를 통해 기체 분포 함수  $f_{\alpha}$ 를 이용하여 대류 및 점성 플럭스를 구분하지 않고 동시에 계산하는 경우에도 점성의 영향을 정확히 묘사하는 수치적인 특성을 확인할 수 있었다. 또한 Kinetic BGK 기법을 이용한 해석자가 연속체 영역의 층류 점성 유동에서 정확한 해를 예측한다는 것을 검증할 수 있었다.

3.2 연속체 영역에서의 극초음속 점성 유동 해석

앞서 3.1절에서는 개발된 Kinetic BGK 해석자가 연속체 영

역의 층류 점성 유동에서 유동 변수들을 정확하게 예측하고 있음을 확인하였다. 3.2절에서는 연속체 영역에서 극초음속 점성 유동을 해석함으로써 개발된 Kinetic BGK 해석자의 강건성을 검증해보고자 하였다.

Fig. 4는 플레어(flare) 형상의 중공(hollow) 실린더 단면을 보여주고 있으며, 이를 모델로 선정하여 주변 유동장을 계산하였다. 계산에 사용된 유동 조건은 Mach 수가 12.4, Knudsen 수는  $8.264 \times 10^{-4}$ 이며 단원자 기체로 가정하였다. 이는 연속체 영역에 해당하는 극초음속 점성 유동이다. Fig. 5에서 표현된 계산 격자는 경계층 유동을 정확하게 계산하기 위해 20개의 프리즘 층을 분포시켰으며, 각 프리즘 층의 높이는 1.1배로 증가한다. 나머지 영역에 대해서는 삼각형 격자를 이용했으며, 계산에 사용된 격자 수는 65,084개, 노드 수는 45,094개 이다. 본 모델을 이용하여 타 연구자가 수행한 실험치[5] 및 직접모사법(DSMC)[6]의 결과를 참조 값으로 설정하여 비교하였다. Fig. 6, Fig. 7은 압력계수 및 Mach 수에 대한 등고선을 나타냈으며 Fig. 8에서는 중공 실린더 표면의 압력 계수

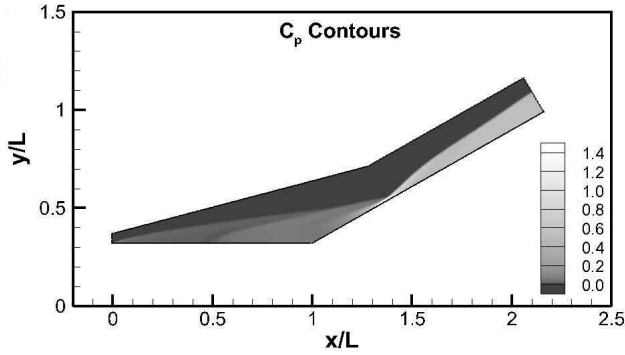


Fig. 6  $C_p$  Contours

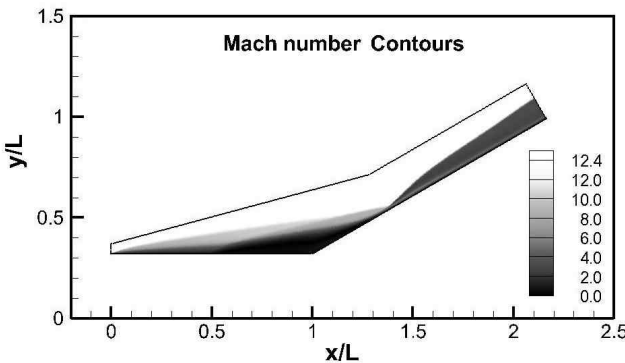


Fig. 7 Mach number Contours

값에 대하여 참조해와 본 연구에서 개발한 Kinetic BGK 해석자를 이용하여 계산한 값을 그래프로 비교하여 표현하였다. 위치에 따른 압력 계수에서 실험치[5] 및 직접모사법[6]을 이용한 결과 값보다 Kinetic BGK 해석자를 이용한 결과 값이 최대 압력 계수 값을 다소 크게 예측하지만 최대 압력의 위치는 정확히 포착하고 있으며 전체적인 경향을 유사하게 예측함을 확인할 수 있었다. 이를 통해 연속체 영역의 층류 점성 유동뿐만 아니라 극초음속 유동에 대해서도 Kinetic BGK 기법을 이용한 해석자가 강건함을 보이며, 유동 변수들의 전체적인 경향을 유사하게 예측함을 확인할 수 있었다.

### 3.3 천이 영역에서의 극초음속 점성 유동 해석

실린더를 모델로 선정하여 실린더 주변의 천이 영역에서의 극초음속 점성 유동을 해석함으로써 개발된 Kinetic BGK 해석자의 적용 범위를 살펴보고자 한다. 두 가지 경우의 문제를 해석하였으며 Table 1에 유동 조건을 정리하였다. Mach 수는 모두 5.48이며 Knudsen 수는 0.025, 0.3이고 모두 단원자 아르곤(Argon) 기체가 고르게 채워져 있다고 가정하였다. 아르곤 기체 입자의 평균 자유 행로( $\lambda$ )와 동점성 계수( $\nu$ ) 사이의 관계식( $\nu = 5 \sqrt{2\pi RT} \lambda / 16$ )을 이용하면 Mach 수( $M$ ), Knudsen

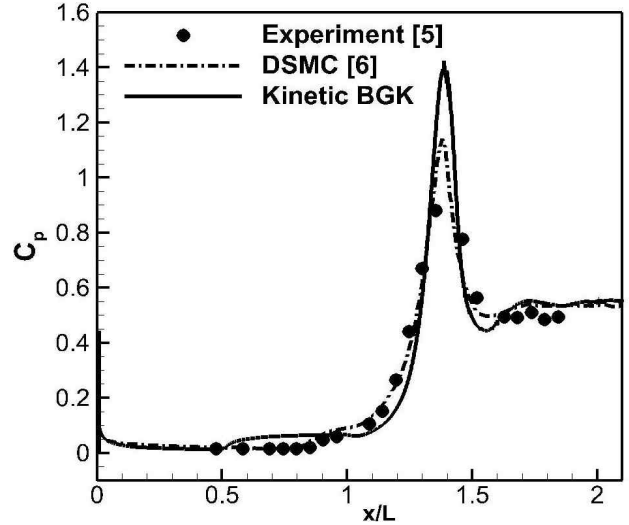


Fig. 8 Comparison of Surface Pressure Coefficient

수( $Kn$ ), Reynolds 수( $Re$ ) 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$Re = \frac{16}{5} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{M}{Kn} \tag{17}$$

직접모사법(DSMC)[7]과 Fossati et al.[3]이 제시한 Kinetic BGK 해석자, 그리고 Yang and Kwon[9]이 제시한 Kinetic BGK 해석자를 이용한 수치해석 결과 값을 참조 값으로 설정하여 본 연구의 해석 결과와 비교하였다. Fossati et al.[3]이 제시한 Kinetic BGK 해석자의 특징은 벽면에서 흡수되거나 방사되는 분자의 비율을 능동적으로 고려하고, 벽면 경계에서 속도 slip과 온도 jump 현상을 모사하는 방법으로 Prendergast and Xu[1], Xu[2]이 제시한 초기의 Kinetic BGK 해석자를 수정하여 천이 영역을 더 정확히 해석하고자 하였다. 본 연구에서 개발한 Kinetic BGK 해석자의 경우 Yang and Kwon[9]이 제시한 Kinetic BGK 해석자에서 Prandtl 수에 대한 능동적인 고려가 가능하도록 에너지 플럭스 항을 수정하였다.

#### 3.3.1 Knudsen 수가 0.025인 극초음속 점성 유동 해석

경계층 유동을 정확하게 계산하기 위해 10개의 프리즘 층을 분포시켰으며, 각 층의 높이는 1.15배로 증가한다. 나머지 영역에 대해서는 삼각형 격자를 이용했으며, 계산에 사용된

Table 1 Flow conditions

	Mach number	Knudsen number	Reynolds number	Regime
Argon	5.48	0.025	361.26	Transitional
Argon	5.48	0.3	30.105	Transitional

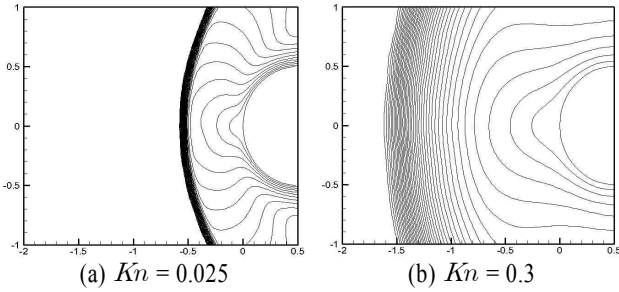


Fig. 9 Mach number Contours at  $M = 5.48$  and  $Kn = 0.025$ (left),  $Kn = 0.3$ (right)

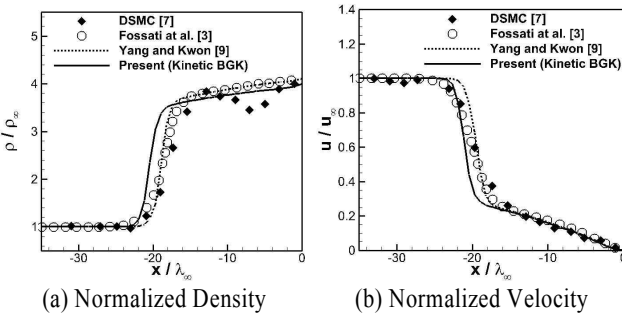


Fig. 10 Stagnation Line Profiles for the Cylinder at  $M = 5.48$  and  $Kn = 0.025$ . Normalized Density(left) and Normalized Velocity(right)

격자 수는 21,938개, 노드 수는 11,610개이다.

Fig. 9의 왼쪽 그림은 Knudsen 수가 0.025일 때 정상해로부터 얻은 Mach 수의 등고선을 나타낸 그림이다. 실린더 앞에서부터 실린더 지름의 50%만큼 떨어진 위치에서 두꺼운 충격파(shock)가 형성됨을 확인할 수 있다. Fig. 10은 stagnation line에서 밀도와 속도 프로파일을 참조해와 본 연구에서 개발한 Kinetic BGK 해석자의 결과 값을 비교한 그림이다. 본 연구에서 개발한 Kinetic BGK 해석자의 결과 값은 참조 값에 비하여 불연속 영역의 두께는 다소 얇게 예측하지만 충격과 전.후의 유동 변수들은 거의 유사하게 예측함을 확인하였다.

### 3.3.2 Knudsen 수가 0.3인 극초음속 점성 유동 해석

Knudsen 수가 0.025인 경우보다 좀 더 희박한 천이 영역에서 Kinetic BGK 해석자의 성능을 확인하고자 Knudsen 수가 0.3인 극초음속 점성 유동 해석을 수행하였다. 경계층 유동을 정확하게 계산하기 위해 10개의 프리즘 층을 분포시켰으며, 각 층의 높이는 1.15배로 증가한다. 나머지 영역에 대해서는 삼각형 격자를 이용했으며, 계산에 사용된 격자 수는 23,744개, 노드 수는 12,290개이다.

Fig. 9의 오른쪽 그림은 Knudsen 수가 0.3일 때 정상해로부터 얻은 Mach 수의 등고선을 나타낸 그림이다. Knudsen 수가 커짐에 따라 희박기체의 특성이 나타나고 있다. 충격파가 아

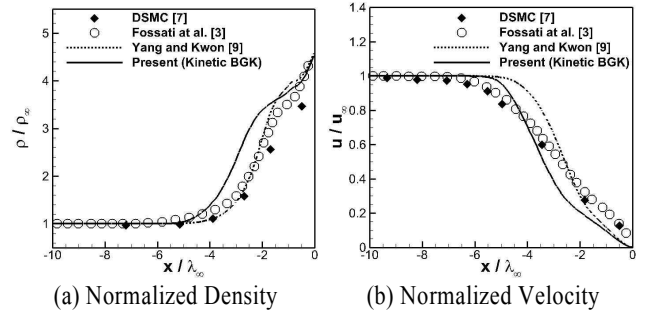


Fig. 11 Stagnation Line Profiles for the Cylinder at  $M = 5.48$  and  $Kn = 0.3$ . Normalized Density(left) and Normalized Velocity(right)

니라 압력, 밀도, Mach 수, 온도 등이 연속적인 구배를 갖고 있는 충격층(shock layer)이 실린더 앞에서부터 실린더 지름의 150%만큼 떨어진 위치까지 완만하게 형성되는 것을 확인할 수 있다. 전체적인 등고선의 모양은 충격파가 있는 경우와 비슷하지만 실린더에 의해서 변화된 유동 변수들이 실린더 전방의 넓은 범위까지 영향을 끼치면서 충격층을 만들고 있다. Fig. 11은 stagnation line에서 밀도와 속도 프로파일을 본 연구에서 개발한 Kinetic BGK 해석자의 결과 값과 참조 값을 비교한 그림이다. 우선 본 연구에서 개발한 Kinetic BGK 해석자는 Yang and Kwon[9]이 제시한 Kinetic BGK 해석자에 비해 충격층 영역을 넓게 예측하고 있다. 이는 아르곤 기체의 Prandtl 수를 고려하도록 개선함에 따라 나타나는 차이로 볼 수 있다. 비록 Yang and Kwon[9]이 제시한 Kinetic BGK 해석자에 비해 충격층을 넓게 예측하지만 직접모사법(DSMC)[7]과 Fossati et al.[3]이 제시한 Kinetic BGK 해석자와 비교하면 충격층이 발생하는 부분에서 유동 변수들의 변화량을 크게 모사하고, 전체 충격층의 두께는 얇게 예측함을 알 수 있다. 하지만 충격층 내부를 포함한 원방 영역에서 유동 변수들은 참조 값과 유사하게 모사하고 있음을 확인할 수 있었다.

## 4. 결 론

본 연구에서는 천이 영역의 유동을 정확하고 효율적으로 모사하기 위해서 Kinetic BGK 기법을 이용한 비정렬 격자 기반의 Navier-Stokes 유동 해석자를 개발하였다.

개발한 Kinetic BGK 해석자의 연속체 영역에 대한 정확성을 검증하기 위해서 층류 평판 및 플레어 형상의 중공 실린더 주변을 흐르는 점성 유동장을 수치 해석하였다. 경계층의 두께, 최대 압력의 위치를 정확히 예측하는 결과를 보였으며 전체 유동 변수들의 경향을 정확하게 모사하였다. 또한 천이 영역에 대한 Kinetic BGK 해석자의 적용성을 살펴보기 위해 실린더 주변을 흐르는 단원자 아르곤 유동장을 해석하였다.

실린더 전방에서 충격층 발생하는 현상을 모사하였고, 유동 변수들은 타 연구자의 결과와 유사한 경향을 보였지만 충격층의 두께 및 유동 변수들의 기울기에서 차이가 보였다. Fossati et al.[3]이 제시한 Kinetic BGK 해석자의 경우에는 천이 영역의 유동 문제를 정확하게 모사하기 위해서 벽면 경계에서 나타나는 실제 현상을 고려하였고 직접모사법(DSMC)[7]과 유사한 결과를 얻었다. 이 결과를 참고할 때, 천이 영역의 유동 문제를 정확하게 해석하려면 벽면에서 흡수되거나 방사되는 분자의 비율을 능동적으로 계산하고, 벽면 경계에서 속도 slip과 온도 jump 현상을 고려하는 방법을 통해 Kinetic BGK 해석자의 성능을 개선해야 할 것으로 판단하고 향후 추가적인 연구를 진행하고자 한다.

Kinetic BGK 해석자의 성능을 개선하여 천이 영역의 유동 문제를 정확하게 해석할 수 있다면, 연속체 영역과 천이 영역을 동시에 고려해야 하는 극초음속 문제 해석에 Kinetic BGK 해석자가 적용될 수 있을 것으로 기대한다.

## 후 기

본 연구는 2015년도 방위사업청과 국방과학연구소의 기초연구과제(UD1130050CD)와 2015년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단 우주핵심기술 개발사업(No.2011-0020808)의 지원을 받아 수행된 연구이며, 이에 감사드립니다.

## Note

This paper is a revised version of the paper "Numerical Investigation of Kinetic BGK Method for Hypersonic Viscous Flows on Unstructured Meshes" presented at the KSCFE 2015 Spring Annual meeting, Jeju, May 14-15, 2015.

## References

- [1] 1993, Prendergast, K. and Xu, K., "Numerical Hydrodynamics from Gas-Kinetic Theory," *J. Comput. Phys.*, Vol.109, pp.53-66.
- [2] 2001, Xu, K., "A Gas-Kinetic BGK Scheme for the Navier-Stokes Equations and Its Connection with Artificial Dissipation and Godunov Method," *J. Comput. Phys.*, Vol.171, pp.289-335.
- [3] 2013, Fossati, M., Guardone, A., Vigevano, L. and Xu, K., "Kinetic Node-Pair Formulation for Two-Dimensional Flows from Continuum to Transitional Regime," *AIAA J.*, Vol.51, No.4, pp.784-796.
- [4] 2000, Chae, D., Kim, C. and Rho, O.-H., "Development of an Improved Gas-Kinetic BGK Scheme for Inviscid and Viscous Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol.158, pp.1-27.
- [5] 2001, Holden, M.S., "Measurements in Laminar Regions of Shock/Shock and Shock/Boundary Layer Interaction over Cylindrical Leading Edges, Cone/Cone and Hollow Cylinder Flare Configurations for DSMC/Navier-Stokes Code Validation," *RAREFIED GAS DYNAMICS : 22nd International Symposium. AIP Conference Proceedings*, Vol.585, pp.699-706.
- [6] 2004, Wang, W.L., "A Hybrid Particle/Continuum Approach for Nonequilibrium Hypersonic Flows," *Ph. D. Dissertation*, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.
- [7] 1968, Vogenitz, F.W., Bird, G.A., Broadwell, J.E. and Rungaldier, H., "Theoretical and Experimental Study of Rarefied Supersonic Flows about Several Simple Shapes," *AIAA J.*, Vol.6, No.12, pp.2388-2394.
- [8] 1954, Bhatnagar, P.L., Gross, E.P. and Krook, M., "A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems," *Phys. Rev.*, Vol.94, pp.511-525.
- [9] 2014, Yang, T.H. and Kwon, O.J., "Development of a 2-D Gas-Kinetic BGK Solver for Continuum and Transitional Flows on Unstructured Meshes," *Journal of Computational Fluids Engineering*, Vol.19, No.2, pp.49-57.

[1] 1993, Prendergast, K. and Xu, K., "Numerical