

Performance Comparison of Estimation Methods for Dynamic Conditional Correlation

Jiho Lee^a · Byeongchan Seong^{a,1}

^aDepartment of Applied Statistics, Chung-Ang University

(Received August 21, 2015; Revised September 15, 2015; Accepted September 26, 2015)

Abstract

We compare the performance of two representative estimation methods for the dynamic conditional correlation (DCC) GARCH model. The first method is the pairwise estimation which exploits partial information from the paired series, irrespective to the time series dimension. The second is the multi-dimensional estimation that uses full information of the time series. As a simulation for the comparison, we generate a multivariate time series similar to those observed in real markets and construct a DCC GARCH model. As an empirical example, we constitute various portfolios using real KOSPI 200 sector indices and estimate volatility and VaR of the portfolios. Through the estimated dynamic correlations from the simulation and the estimated volatility and value at risk (VaR) of the portfolios, we evaluate the performance of the estimations. We observe that the multi-dimensional estimation tends to be superior to pairwise estimation; in addition, relatively-uncorrelated series can improve the performance of the multi-dimensional estimation.

Keywords: multivariate volatility model, DCC GARCH model, ARCH, conditional heteroscedasticity, pairwise estimation, KOSPI 200

1. 서론

최근 수십 년 동안 주식시장을 포함하는 금융시장에서 위험(risk)을 측정하기 위한 변동성에 대한 관심이 지속되어 왔다. 이는 변동성이 블랙-숄츠(Black-Scholes) 모형 등을 통한 파생상품 가격 결정이나 VaR(value at risk) 계산에서 필수 불가결한 요소이기 때문일 것이다. 이러한 변동성은 시간의 흐름에 따라서 변하는 값으로서 주로 조건부 이분산(conditional heteroskedasticity)을 통하여 모형화된다. 변동성 측정을 위한 대표적인 모형으로는 Engle (1982)의 ARCH(autoregressive conditional heteroskedasticity) 모형 및 이를 일반화한 모형인 Bollerslev (1986)의 GARCH(generalized ARCH) 모형을 들 수 있으며, 이들 모형은 금융시장의 비대칭성을 반영하기 위하여 Nelson (1991)의 EGARCH(exponential GARCH) 모형, Glosten 등 (1993)의 GJR-GARCH 모형, Ding 등 (1993)의 APARCH 모형 등으로 발전해 왔다.

This research was supported by the Chung-Ang University Excellent Student Scholarship in 2014 and Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (No. 2012R1A1A2008006).

¹Corresponding author: Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, 221, Heukseok-dong, Dongjak-gu, Seoul 156-756, Korea. E-mail: bcseong@cau.ac.kr

더불어, 금융시장의 규모가 커짐에 따라 자산 배분(asset allocation)이나 포트폴리오 위험 관리에서 위험 회피(hedge)를 위한 자산 간의 변동성 및 상호관계를 파악하는 것은 중요한 문제이다. 따라서, 자산 간의 동태적 상관관계수(dynamic correlation) 추정을 위한 다변량 GARCH 모형에 대한 연구가 지속적으로 진행되어 왔으며 조건부 분산-공분산 행렬의 형태에 따라 Bollerslev 등 (1988)의 VEC 및 diagonal VEC 모형, Engle와 Kroner (1995)의 BEEK 모형, Bollerslev (1990)의 CCC(constant conditional correlation) 모형, Engle (2002)의 DCC(dynamic conditional correlation) 모형의 형태로 발전해 왔다. DCC (또는 DCC-GARCH) 모형은 분산 및 공분산을 순차적으로 추정하는 방법으로서 고차원 모형의 추정도 가능하게 하는 모수 절약적 구조를 가지고 있으며, 포트폴리오 위험관리를 위한 변동성 추정 및 VaR 계산에 널리 이용되고 있다.

DCC 모형은 계산의 편의상 대표적으로 두가지 방법으로 동태적 상관계수를 추정한다. 첫 번째 방법은, 쌍별(pairwise) 상관계수 추정에 근거하여 계산하는 것이다; 예를 들면, Schwert (2010), Kim (2014)와 Dajcman과 Festic (2012)을 참고하여라. 이 방법은 고차원에서의 추정을 위해서 편리하지만, 쌍별 상관계수가 다른 시계열 변수에 의해서 영향을 받지 않음을 가정한다. 두 번째 방법은, 분석에 포함된 모든 시계열 변수에 근거하여 동태적 상관계수를 추정하는 다차원 추정법이다; 예를 들면, Orskaug (2009)와 Tsay (2010)을 참고하여라. 이 방법은 고차원으로의 확장이 상대적으로 어려우나, 여러 변수들의 상호관련성을 모형에 포함시킬 수 있다는 장점이 있다.

본 논문에서는 DCC 모형의 대표적 두 가지 추정방법을 시뮬레이션 및 실증분석을 통하여 그 효율성을 비교한다. 본 논문은 총 5장으로 구성되어 있으며 2장에서 DCC 모형 및 추정방법을 설명하고, 3장에서는 동태적 상관관계 추정방법의 비교를 위한 시뮬레이션을 진행한다. 4장에서는 KOSPI 200 섹터지수를 활용하여 포트폴리오를 형성하고 이를 통한 변동성 및 VaR 계산을 이용하여 두 추정방법을 비교하였다. 마지막 5장에서는 결과를 정리하였다.

2. DCC 모형 및 추정 방법

2.1. DCC 모형

Engle의 DCC 모형은 CCC 모형으로부터 확장된 모형으로서 간결성과 일반성을 갖추고 있으며, 다변량 시계열 간 동태적 상관관계를 분석할 때 아주 유용한 모형이며 다음과 같다;

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.1)$$

r_t 는 N 차원 시계열 벡터이고, $\mu_t = E(r_t|F_{t-1})$ 는 과거의 정보 F_{t-1} 이 주어졌을 때 r_t 의 조건부 기대값이며, ε_t 는 t 시점에서의 충격으로 아래와 같이 표현될 수 있다;

$$\varepsilon_t = H_t^{\frac{1}{2}} z_t, \quad z_t \sim \text{IID}(0, I). \quad (2.2)$$

여기서, H_t 는 조건부 분산-공분산 행렬로서 $H_t = \text{Cov}(\varepsilon_t|F_{t-1})$ 이며, z_t 는 평균이 0이고 분산-공분산 행렬로서 $(N \times N)$ 차원의 항등행렬 I 를 가지는 확률벡터이다. 이때, H_t 는 아래 식과 같이 분해될 수 있다;

$$H_t = D_t R_t D_t. \quad (2.3)$$

D_t 는 시변하는 조건부 표준편차의 $(N \times N)$ 차원의 대각행렬로 $D_t = \text{diag}(\sigma_{11,t}, \sigma_{22,t}, \dots, \sigma_{NN,t})$ 로 나타낼 수 있다. 여기서 $\sigma_{ii,t}^2$ 는 개별 시계열 변수의 조건부 분산이며, GARCH(p, q) 모형으로 설명되며

다음과 같다;

$$\sigma_{ii,t}^2 = \omega_i + \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} \varepsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{ij} \sigma_{ii,t-j}^2, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

R_t 는 동태적 조건부 상관관계를 나타내는 $(N \times N)$ 차원의 행렬이며 아래와 같이 분해 가능하다;

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}} Q_t \text{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.5)$$

동태적 상관계수 행렬 R_t 를 구하기 위해 Engle (2002)에서는 아래의 식 (2.6)과 같은 DCC(p, q) 모형을 제안하였으며 여기서 Q_t 는 조건부 상관관계의 움직임을 표현하는 방정식이다;

$$Q_t = \left(1 - \sum_{i=1}^q a_i - \sum_{j=1}^p b_j\right) \bar{Q} + \sum_{i=1}^q a_i s_{t-i} s_{t-i}^T + \sum_{j=1}^p b_j Q_{t-j}. \quad (2.6)$$

단, $\bar{Q} = \sum_{t=1}^T s_t s_t^T / T$ 는 $s_t = D_t^{-1}(r_t - \mu_t)$ 의 비조건부 분산-공분산 행렬이며, 행렬 Q_t 의 양정부호성(positive definiteness)과 정상성(stationarity)을 위하여 다음과 같은 조건을 부여한다;

$$a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad b_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad \sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j < 1.$$

실제 분석에서 많이 사용되는 DCC(1, 1) 모형의 경우, 식 (2.6)은 다음과 같은 형태를 가진다;

$$Q_t = (1 - a_1 - b_1) \bar{Q} + a_1 s_{t-1} s_{t-1}^T + b_1 Q_{t-1}. \quad (2.7)$$

2.2. 쌍별 추정법

여기서 관심있는 두개의 시계열의 정보만을 이용하여서 동태적 상관계수를 구하는 쌍별 추정법은, $R_t = (\rho_{i,j,t})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N}$ 와 $Q_t = (q_{i,j,t})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N}$ 에 대하여 식 (2.7)을 다음과 같이 변환된 형태로 사용한다;

$$\rho_{i,j,t} = \frac{q_{i,j,t}}{\sqrt{q_{i,i,t} q_{j,j,t}}}, \quad q_{i,j,t} = (1 - a_{i,j} - b_{i,j}) \bar{Q}_{i,j} + a_{i,j} s_{i,t-1} s_{j,t-1} + b_{i,j} q_{i,j,t-1}.$$

따라서, 로그우도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$L_{i,j} = -\frac{1}{2} \sum_t \left(\log [1 - \rho_{i,j,t}^2] + \frac{s_{i,t}^2 + s_{j,t}^2 - 2\rho_{i,j,t} s_{i,t} s_{j,t}}{[1 - \rho_{i,j,t}^2]} \right). \quad (2.8)$$

2.3. 다차원 추정법

r_t 를 구성하는 N 차원 시계열 정보를 모두 사용하는 다차원 추정법은, 임의의 두 시계열 변수의 동태적 조건부 상관계수 추정을 위하여 식 (2.7)을 모든 쌍별 상관계수의 추정에 동일하게 사용한다; 즉, 모든 i 와 j 의 쌍에 대하여 동일한 $a_{i,j}$ 와 $b_{i,j}$ 를 사용한다. 따라서, 로그우도함수는 다음과 같이 표현될 수 있으며 쌍별 추정법의 식 (2.8)과 같이 더 간단한 형태로 표현할 수 없다;

$$L = -\frac{1}{2} \sum_t \left[\log |R_t| + s_t^T R_t^{-1} s_t \right].$$

쌍별 추정법과 달리, 해당되는 두개의 시계열 이외의 다른 시계열 정보가 로그우도함수 내의 R_t 의 행렬 식 및 역행렬 계산을 통하여 동태적 상관계수 추정에 영향을 미치는 것이다.

3. 시뮬레이션

본 장에서는 다변량 시계열을 3개의 자산 A, B, C의 수익률 $r_t = (r_{A,t}, r_{B,t}, r_{C,t})^T$ 로 가정하고 2장에서 설명된 쌍별 추정법과 다차원 추정법의 정확성을 비교한다. 즉, 3개의 자산 중에서 관심의 대상이 되는 2개의 자산만을 이용하여 쌍별 추정한 경우(A-B, A-C 또는 B-C)와 이에 대응하여 추가적으로 나머지 자산 정보까지 이용하는 다차원 추정한 경우(A-B-[C], A-[B]-C, 또는 [A]-B-C)가 동태적 상관계수 추정의 정확도에 어떤 영향을 미치는지를 시뮬레이션을 통하여 살펴보고자 한다.

시뮬레이션은 R 패키지인 rmgarch의 함수 dccsim를 사용하였으며, 3차원 정규분포를 가정하였으며 개별 자산의 변동성은 GARCH(1, 1)으로 모형화하였다. 식 (2.4)를 위한 GARCH 모수들은 일반 주식시장의 특성 및 변동성 집중현상을 반영하기 위하여 $\alpha_{i1} + \beta_{i1}$ 의 값이 1에 근접하도록 다음과 같이 설정하였다;

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.003 \\ 0.005 \\ 0.001 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.08 \\ 0.03 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \beta_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90 \\ 0.85 \\ 0.95 \end{pmatrix}.$$

식 (2.6)에서 DCC(1,1)의 모수값 또한 주식시장의 강한 지속성을 나타내기 위해서 $a_1 = 0.05$ 와 $b_1 = 0.93$ 으로 $a_1 + b_1$ 의 값이 1에 가깝게 설정하였다. 추가적으로, 자산 간의 비조건부 상관계수 구조가 동태적 상관계수 추정에 미치는 차이를 살펴보기 위하여 3가지의 다른 형태로 설정하였다. 3개의 자산 A, B, C 간에 강한 상관관계를 가지는 경우인 R_{01} , A와 B의 두 자산간에만 강한 상관관계가 있는 경우인 R_{02} , 모든 자산간에 상관관계를 없는 R_{03} 를 고려하였다.

$$R_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.0 \\ 0.8 & 1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{03} = \begin{pmatrix} 1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1 \end{pmatrix}.$$

위와 같은 세가지 비조건부 상관관계를 각각 이용하여 1000개의 관측치를 생성하였으며, 2장에서 설명된 DCC 모형의 두가지 추정법을 사용하여 동태적 조건부 상관계수($\hat{\rho}_t, t = 1, \dots, 1000$)를 추정하였다. 이를 토대로 실제 상관계수(ρ_t)와의 차이를 측정하여 MSE(mean squared error)를 계산하였으며, 동일한 실험을 500번 반복함으로써 $MSE_i (i = 1, \dots, 500)$ 을 구하였다.

Table 3.1은, 500번의 반복 실험을 통하여 계산된 MSE들의 평균과 표준편차를 보여주고 있으며, 또한 쌍별 추정법을 기준으로 다차원 추정법에 의해서 감소된 MSE 값의 비율을 나타낸다. 비조건부 상관관계의 형태와 관계없이 쌍별 추정법(A-B, A-C 또는 B-C)은 대응되는 다차원 추정법(A-B-[C], A-[B]-C, 또는 [A]-B-C)에서 더 작은 MSE 값의 평균 및 표준편차를 가지고 있다. 즉, 다차원 추정법이 더 정확하고 신뢰성있는 동적 상관계수를 추정한다고 볼 수 있다. 다차원 추정법을 통하여 감소된 MSE값의 비율을 살펴보면, 예를 들면 R_{01} 의 경우에 A와 B 간의 동태적 조건부 상관계수의 추정은 쌍별 추정에 비해 A-B-[C]의 다차원 추정일 때 평균 MSE가 33.96% (= 18/53) 감소하였으며, R_{03} 의 경우에는 39.68% (= 123/310)로 감소하였다. 이를 통하여 볼 때, 특정 자산의 쌍에 관계없이 3개의 자산간의 상관관계가 없는 R_{03} 의 경우에 가장 개선된 결과를 보여주었으며, 상대적으로 상관관계가 없는(또는 낮은) 자산을 추가할수록 MSE가 더 줄어들었다.

Figure 3.1은 Table 3.1에서 2행(자산 A와 B)과 3행(자산 A와 B에 자산 C가 추가로 고려된 경우)을 계산하기 위하여 사용된 MSE_i 들에 대하여 히스토그램을 그린 것이다. 모든 세가지 비조건부 상관관계에 있어서 추가적인 자산을 이용하는 경우의 히스토그램이 추가적 자산을 이용하지 않은 경우보다 0에

Table 3.1. Averaged MSE (mean squared error) of the pairwise versus multi-dimensional estimations for the dynamic correlation according to three types of unconditional correlation ($\times 10^{-3}$)

Assets considered	Type of unconditional correlation		
	R_{01}	R_{02}	R_{03}
A-B	0.53 (0.55)	0.51 (0.54)	3.10 (2.68)
A-B-[C]	0.35 (0.38)	0.31 (0.39)	1.87 (1.77)
Reduction ratio	33.96%	39.22%	39.68%
A-C	0.47 (0.43)	0.47 (0.50)	3.03 (2.52)
A-[B]-C	0.32 (0.33)	0.32 (0.37)	1.76 (1.55)
Reduction ratio	31.91%	31.91%	41.91%
B-C	0.45 (0.42)	0.46 (0.47)	3.10 (2.63)
[A]-B-C	0.32 (0.32)	0.31 (0.35)	1.82 (1.60)
Reduction ratio	28.89%	32.61%	41.29%

Note: Values in parenthesis denote standard errors.

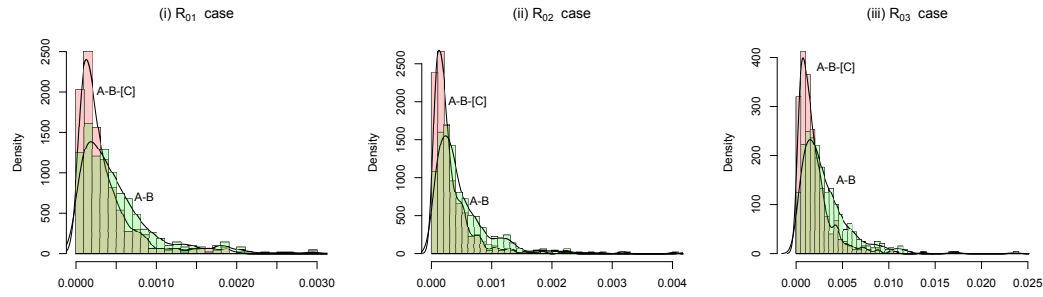


Figure 3.1. Histograms of MSEs according to three types of unconditional correlations for the assets considered: A-B versus A-B-[C].

더 가깝게 분포하고 있으며 분포의 퍼짐 또한 좁게 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 즉, 다차원 추정법의 상대적 정확성과 신뢰성을 재확인해 주고 있다. 500번의 각 실험에서 쌍별 추정과 다차원 추정에 의한 MSE 값의 비율을 통하여 볼 때 나머지 경우에도 위와 동일한 결과를 보여 주었으며 지면 관계상 그 결과 보고는 생략한다.

위의 결과들을 종합할 때, DCC 모형의 동태적 상관계수 추정시에 쌍별 추정보다 다차원 추정이 더 정확한 결과를 보여주며 다차원 추정을 위해서는 상대적으로 상관관계가 낮은 자산을 추가적으로 고려하는 것이 더 개선된 결과를 보여줌을 확인하였다. 이는 비조건부 상관계수의 값이 클수록 동태적 상관계수 추정에 편의(bias)가 존재한다는 Aielli (2013)의 결과에 비추어 볼 때 일치된 결과로 볼 수 있다.

4. 실증분석

4.1. 자료

실증분석에 사용된 데이터는 KOSPI 200 섹터지수이며, 이 지수는 KOSPI 200 지수 구성종목을 8개 산업군별로 재분류하여 산출한 주가지수이다. 건설/기계(CM), 조선/운송(ST), 철강/소재(SM), 에너지/화학(EC), 정보통신(IT), 금융(FI), 필수소비재(CS), 자유소비재(CD)로 총 8개의 섹터로 구성되어 있다. 본 연구에서는 편의상 조선/운송(ST), 철강/소재(SM), 정보통신(IT), 금융(FI), 자유소비

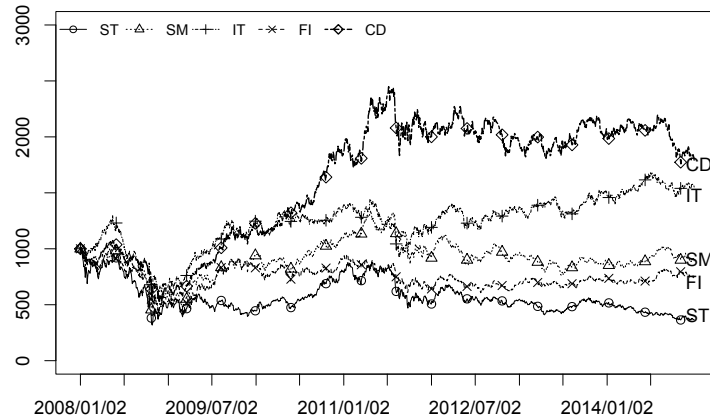


Figure 4.1. Time series plot of KOSPI 200 five sector indices.

재(CD)의 5개의 섹터지수에 한정하여 2008년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지 총 1,740개의 관측값을 이용하였다. 이 중에서 2013년 5월 31일까지의 자료는 모형적합을 위하여 사용하였고 이후의 자료는 rolling window 방법을 이용하여 예측의 성능을 평가하기 위하여 사용하였다 (Xu와 Chan, 2012). 참고로 이 자료는 한국거래소(www.krx.co.kr)를 통해서 얻을 수 있다.

Figure 4.1은 5개의 섹터지수의 시계열 그림이다. 전반적으로 5개 지수는 세계금융위기(global financial crisis) 기간인 2008년도에 감소하는 패턴을 보여준다. 그리고 2009년부터 이전 상태로 점차 회복하고 있다가 2011년 후반기에 유럽채무위기(European debt crisis) 기간에 다시 감소한다. 그 이후에는 2014년 말까지 모든 섹터지수가 전반적으로 불안정한 변동(volatilite dynamics)를 보이고 있다. 5개 섹터지수들은 각각 정상(stationary) 시계열이 아님을 확인하였고 따라서 이후 분석에서 로그 차분 수익률 $r_{i,t} = 100 \times \ln(p_{i,t}/p_{i,t-1})$ 을 사용하였다; 단, $p_{i,t}$ 는 t 시점의 i 번째 섹터의 지수이며 i 는 각 섹터를 나타낸다. 각 수익률들은 모두 음의 부호를 가지는 왜도와 8 이상의 큰 첨도값을 보였으며, JB(Jarque-Bera) 검정, Ljung-Box 검정 및 ARCH-LM 검정을 통하여 5개의 수익률 각각에서 급침분포(leptokurtic distribution)의 형태 및 1차 자기상관성, 조건부 이분산성을 확인할 수 있었다. 이와 같은 사전 분석을 바탕으로 비대칭성 모형을 포함하는 단변량 GARCH 모형들의 적합하고 그 적합 결과를 정보량(BIC) 기준으로 비교하였으며, 그 결과 모든 수익률에 AR(1)-GJR-GARCH(1,1) 모형을 단변량 모형으로 적합하였다.

4.2. 동태적 상관계수 추정을 통한 포트폴리오의 변동성 추정

실증분석에서 추정법의 평가는, 동태적 상관계수의 참값을 알 수 없기 때문에 그 대안으로서 두 자산에 동일한 가중치를 가지는 포트폴리오를 구성하고 그 변동성(분산)의 추정을 통하여 이루어졌다. 분석의 편의상 고려되는 자산은 3장의 시뮬레이션에서처럼 3차원으로 고려하였으며, 다음과 같은 세가지 섹터 그룹을 고려하였다.

그룹 I: 조선/운송, 철강/소재, 정보통신,

그룹 II: 철강/소재, 정보통신, 금융,

그룹 III: 정보통신, 금융, 자유소비재.

Table 4.1. Comparison of performances of the pairwise versus multi-dimensional estimations for the dynamic correlation with respect to Group I assets: ST, SM, and IT

Pairwise assets	MAD	MSE	R2LOG
ST-SM	1.2174	2.6759	7.8920
ST-SM-[IT]	1.2214	2.6770	7.9204
ST-IT	1.0876	2.2139	7.2155
ST-[SM]-IT	1.0866	2.2036	7.2244
SM-IT	0.9287	1.8538	9.8450
[ST]-SM-IT	0.9239	1.8518	9.7879

Note: The bold numbers denote a superior method between the two estimation methods.

MAD = mean absolute deviation, MSE = mean squared error.

Table 4.2. Comparison of performances of the pairwise versus multi-dimensional estimations for the dynamic correlation with respect to Group II assets: SM, IT, and FI

Pairwise assets	MAD	MSE	R2LOG
SM-IT	0.9287	1.8538	9.8450
SM-IT-[FI]	0.9274	1.8507	9.8357
SM-FI	0.9942	1.9322	7.9201
SM-[IT]-FI	0.9949	1.9311	7.9310
IT-FI	0.8993	1.4867	7.9540
[SM]-IT-FI	0.8959	1.4821	7.9287

Note: See the note for Table 4.1.

MAD = mean absolute deviation, MSE = mean squared error.

각 그룹에서 쌍별 및 다차원 추정법에 의한 동태적 상관계수를 추정하고 이를 이용하여 포트폴리오의 변동성을 계산하였으며, 추정법의 평가 기준으로는 다음과 같은 3가지 손실함수를 이용하였다.

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\sigma^2) &= n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\hat{\sigma}_{t+k}^2 - \hat{h}_{t+k|t} \right)^2, \\ \text{R2LOG} &= n^{-1} \sum_{t=1}^n \log \left(\hat{\sigma}_{t+k}^2 \hat{h}_{t+k|t}^{-1} \right)^2, \\ \text{MAD} &= n^{-1} \sum_{t=1}^n \left| \hat{\sigma}_{t+k}^2 - \hat{h}_{t+k|t} \right|. \end{aligned}$$

여기서, n 은 예측의 총 횟수를, k 는 예측시차를, $\hat{\sigma}_{t+k}^2$ 은 $t+k$ 시점에서의 포트폴리오의 실제 변동성을 나타내며, $\hat{h}_{t+k|t}$ 은 t 시점에서 예측된 $t+k$ 시점에서의 변동성의 추정값을 나타낸다. 따라서, $\hat{h}_{t+k|t}$ 의 계산에 추정된 조건부 상관계수의 정확성이 반영된다. R2LOG는 로그변환된 실제 변동성과 추정된 값의 차이를 나타내며 변동성이 큰 기간과 작은 기간 간의 비대칭성을 고려한 손실함수이다 (Pagan와 Schwert, 1990). MAD(mean absolute deviation)는 이상치가 존재할 때 MSE에 비해 일반적으로 좀 더 로버스트한 결과를 얻을 수 있다고 알려져 있는 손실함수이다 (Marcucci, 2005). $\hat{\sigma}_{t+k}^2$ 의 계산은 예측 시점에서 관찰되는 실현 변동성(realized volatility)의 대체값(proxy)인 $\sum_{i=t+1}^{t+k} (f_i - \bar{f})^2$ 을 사용하였다; 단, f_i 는 포트폴리오의 일별 수익률이며, \bar{f} 는 예측시차 동안 포트폴리오의 일별 수익률의 평균을 나타낸다. 편의상 예측시차를 $k=1$ 을 사용하였다.

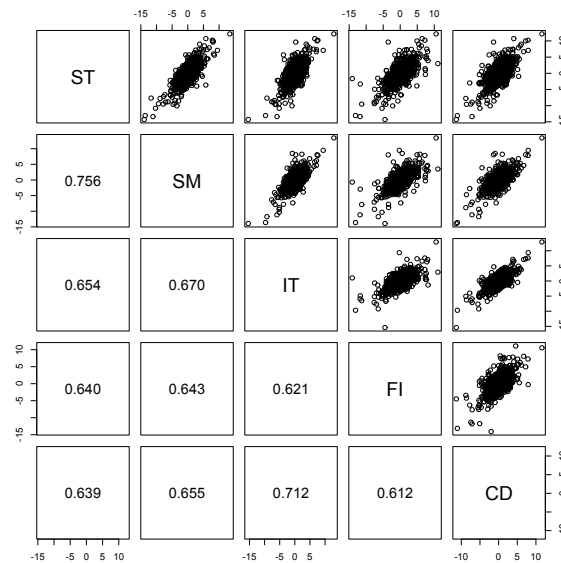
Table 4.1은 그룹 I에 대한 추정 결과를 보여주고 있다. ‘조선/운송’과 ‘철강/소재’로 포트폴리오를 구

Table 4.3. Comparison of performances of the pairwise versus multi-dimensional estimations for the dynamic correlation with respect to Group III assets: IT, FI, and CD

Pairwise assets	MAD	MSE	R2LOG
IT-FI	0.8993	1.4867	7.9541
IT-FI-[CD]	0.8967	1.4847	7.9335
IT-CD	0.9023	1.6324	8.0096
IT-[FI]-CD	0.9104	1.6389	8.0619
FI-CD	0.9127	1.4460	7.9263
[IT]-FI-CD	0.9111	1.4431	7.9182

Note: See the note for Table 4.1.

MAD = mean absolute deviation, MSE = mean squared error.

**Figure 4.2.** Unconditional correlation and scatter plot matrices with respect to KOSPI 200 five sector indices.

성하는 경우, 쌍별 추정이 모든 기준에 있어서 다차원 추정보다 더 정확했으나, ‘조선/운송’과 ‘정보통신’의 포트폴리오 및 ‘철강/소재’와 ‘정보통신’의 포트폴리오의 변동성 추정에서는 R2LOG 기준을 제외한 모든 경우에서 다차원 추정이 더 정확하였다. Table 4.2는 그룹 II에 대한 추정 결과를 보여주고 있다. ‘철강/소재’와 ‘금융’의 포트폴리오를 제외한 모든 포트폴리오는 평가 기준에 관계없이 다차원 추정법이 더 정확한 추정 결과를 보여주었다. Table 4.3은 그룹 III에 대한 추정 결과를 보여주고 있다. ‘정보통신’과 ‘자유소비재’의 포트폴리오의 추정에서만 쌍별 추정이 더 정확하였으며 다른 모든 포트폴리오의 추정에서는 다차원 추정이 더 정확하였다.

Table 4.1부터 Table 4.3까지의 결과로부터 다차원 추정법이 전반적으로 쌍별 추정법보다 더 정확하게 동태적 상관계수를 추정함을 확인할 수 있다. 그러나, 3장의 시뮬레이션 결과와 관련하여, Figure 4.2의 5개 섹터간 비조건부 상관계수 행렬에 비추어 해석할 때, 상관관계가 낮은 자산이 추가될수록 다차원 추정법이 더 좋은 정확성을 보여주는 것을 확인하기는 쉽지 않았다. 이는 5개 KOSPI 200 섹터간에는 강한 양의 상관관계가 존재하기 때문인 것으로 추측된다.

Table 4.4. Comparison of performances of the pairwise versus multi-dimensional estimations in computing VaR of a portfolio based on Group I assets: ST, SM, and IT

Pairwise assets	Failure rate (%)	LR (<i>p</i> -value)	RSE
ST-SM	3.61	1.7447 (0.1865)	2.2705
ST-SM-[IT]	3.35	2.5021 (0.1137)	2.2770
ST- IT	3.35	2.5021 (0.1137)	2.0865
ST-[SM]-IT	3.09	3.4188 (0.0645)	2.0861
SM- IT	4.12	0.6654 (0.4147)	1.8795
[ST]-SM-IT	4.12	0.6654 (0.4147)	1.8707

Note: The bold RSEs denote a superior method between the two estimation methods.

RSE = root of squared error.

4.3. VaR에 의한 예측 성과 비교

VaR란 ‘정상적인 시장조건 하에서 주어진 신뢰수준 $(1 - \alpha)\%$ 에서 보유기간 동안에 발생 가능한 포트폴리오의 최대 손실액’으로 정의되며, DCC 모형 하에서 추정된 조건부 분산-공분산 행렬 \hat{H}_t 와 가중치 벡터 w 를 이용하여 아래와 같이 추정할 수 있다;

$$\text{VaR}_t = w^T \hat{\mu}_t + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{w^T \hat{H}_t w}. \quad (4.1)$$

단, w 는 포트폴리오를 구성하는 자산들의 가중치 벡터이고, $\Phi^{-1}(\cdot)$ 는 표준정규분포의 누적분포함수의 역함수이다. VaR 추정의 정확성은, 주어진 표본 내에서 예측된 VaR의 초과횟수비율인 실패율(failure rate)을 이론적인 값과 비교하는 LR 검정과 VaR가 실제 수익률을 얼마나 가깝게 예측하는가를 평가할 수 있는 RSE(root of squared error) 지표로 평가(기업은 장래에 발생할 것으로 예측되는 대손에 대비하여 재정의 안정을 위해 대손충당금을 쌓게 된다. 만약 VaR값이 너무 높게 추정된다면 외부의 충격이 발생했을 때 실제 손실액이 VaR값을 넘어가게 되고 이로 인해 기업은 파산할 가능성이 생긴다. VaR값이 너무 낮게 추정된다면 충격흡수에는 유리할 수 있으나 반대로 대손충당금으로 인해 기업 성장에 걸림돌이 되어 잠재적 손실이 발생한다. 따라서 VaR값과 실제값의 차이를 나타내는 RSE 지표를 이용하여 VaR 모형이 더 효율적인 모형인지 평가하는 기준으로 사용할 수 있다.)할 수 있다 (Şener 등, 2012);

$$\text{RSE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T^*} (w^T r_t - \text{VaR}_t)^2}{T^*}}. \quad (4.2)$$

단, r_t 는 실제 수익률이며, T^* 는 표본의 예측기간 2013년 6월 1일부터 2014년 12월 30일까지의 길이로서 $T^* = 388$ 로 계산된다.

본 절에서는 4.2절에서 정의된 3개의 자산 그룹에 대하여 동일한 포트폴리오를 구성하고 신뢰수준 95%의 VaR을 평가하는 함으로써 쌍별 추정과 다차원 추정을 비교한다.

Table 4.4는 그룹 I에 대한 VaR의 평가 결과이다. 먼저 모든 쌍별 및 다차원 추정은 LR 검정에 의해서 추정된 VaR의 실패율과 이론적 값이 일치한다라는 결론을 내렸으며(유의수준=5%), RSE 측면에서 ‘조선/운송’과 ‘철강/소재’의 포트폴리오의 경우를 제외한 나머지 두 개의 포트폴리오에서 다차원 추정이 더 정확한 결과를 보여 주었다. 이는 4.2절의 Table 4.1에서 MAD 기준과 동일한 결과이다.

Table 4.5과 Table 4.6은 각각 그룹 II와 그룹 III에 대한 VaR의 평가 결과이다. LR 검정에 의해서 VaR의 추정은 쌍별 및 다차원 추정에서 모두 이론적 값과 일치하였다. RSE 기준에서는, ‘철강/소재’와 ‘금융’의 포트폴리오와 ‘정보통신’과 ‘자유소비재’의 포트폴리오에서 쌍별 추정이 더 정확한

Table 4.5. Comparison of performances of the pairwise versus multi-dimensional estimations in computing VaR of a portfolio based on Group II assets: SM, IT, and FI

Pairwise assets	Failure rate (%)	LR (<i>p</i> -value)	RSE
SM-IT	4.12	0.6654 (0.4147)	1.8795
SM-IT-[FI]	4.12	0.6654 (0.4147)	1.8776
SM-FI	4.38	0.3256 (0.5683)	1.9334
SM-[IT]-FI	4.38	0.3256 (0.5683)	1.9363
IT-FI	4.90	0.0087 (0.9255)	1.8292
[SM]-IT-FI	4.90	0.0087 (0.9255)	1.8248

Note: See the note for Table 4.4.

RSE = root of squared error.

Table 4.6. Comparison of performances of the pairwise versus multi-dimensional estimations in computing VaR of a portfolio based on Group III assets: IT, FI, and CD

Pairwise assets	Failure rate (%)	LR (<i>p</i> -value)	RSE
IT-FI	4.90	0.0087 (0.9255)	1.8292
IT-FI-[CD]	4.90	0.0087 (0.9255)	1.8257
IT-CD	3.35	2.5021 (0.1137)	1.8634
IT-[FI]-CD	3.35	2.5021 (0.1137)	1.8745
FI-CD	3.61	1.7447 (0.1865)	1.8789
[IT]-FI-CD	3.61	1.7447 (0.1865)	1.8757

Note: See the note for Table 4.4.

RSE = root of squared error.

VaR를 추정하였으며, 나머지 포트폴리오에서는 모두 다차원 추정이 더 정확한 결과를 보여주었다. 또한, RSE 기준은 4.2절의 Table 4.2 및 Table 4.3의 MAD 기준과 각각 동일한 결과를 보여주었다.

5. 결론

금융자산에 대한 투자가 늘어남에 따라 자산의 위험관리의 필요성은 매우 중요한 이슈 중의 하나이다. 본 논문은 Engle (2002)의 DCC-GARCH 모델을 이용하여 자산간의 동태적 상관계수를 구하는데 있어 널리 사용되고 있는 쌍별 추정 방법과 추가적인 자산 정보를 활용하는 다차원 추정 방법의 효율성을 비교하였다.

이를 위하여 3차원의 다변량 시계열을 가정하고 시뮬레이션을 시행하여 MSE 기준으로 두 방법을 비교하였다. 그 결과 다차원 추정법이 쌍별 추정법보다 우수함을 보였으며, 특히 상관관계가 상대적으로 낮거나 없는 자산을 추가하는 것이 더 좋은 결과를 보여 주었다.

실증분석으로서, KOSPI 200 섹터지수를 이용한 포트폴리오를 구성하고 이에 대한 변동성 및 VaR 계산을 통하여 쌍별 및 다차원 추정의 정확성을 평가하였다. 전반적으로 포트폴리오를 구성하는 있는 자산 이외의 추가적인 자산 정보를 사용하는 다차원 추정법이 더 우수함을 발견하였다. 즉, 더 정확한 동태적 상관계수의 추정으로 포트폴리오의 변동성 및 VaR의 계산을 좀더 정확하게 추정할 수 있을 것으로 평가된다.

References

- Aielli, G. P. (2013). Dynamic conditional correlation: On properties and estimation, *Journal of Business*

- & *Economic Statistics*, **31**, 171–194.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model, *The Review of Economics and Statistics*, **72**, 498–505.
- Bollerslev, T., Engle, R. F. and Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances, *The Journal of Political Economy*, **96**, 116–131.
- Dajcman, S. and Festic, M. (2012). Interdependence between the Slovenian and European stock markets—a DCC-GARCH analysis, *Ekonomika Istrazivanja*, **25**, 379.
- Ding, Z., Granger, C. W. and Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83–106.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, **45**, 987–1007.
- Engle, R. F. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models, *Journal of Business & Economic Statistics*, **20**, 339–350.
- Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory*, **11**, 122–150.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *The Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.
- Kim, W. H. (2014). Time-varying comovement of KOSPI 200 sector indices returns, *CSAM (Communications for Statistical Applications and Methods)*, **21**, 335–347.
- Marcucci, J. (2005). Forecasting stock market volatility with regime-switching GARCH models, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, **9**, 1–55.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, **59**, 347–370.
- Orskaug, E. (2009). Multivariate DCC-GARCH model with various error distributions, Working paper, Norwegian Computing Center, SAMBA/19/09.
- Pagan, A. R. and Schwert, G. W. (1990). Alternative models for conditional stock volatility, *Journal of Econometrics*, **45**, 267–290.
- Schwert, A. (2010). *Crisis period forecast evaluation of the DCC-GARCH Model yang ding*, Doctoral dissertation, Duke University Durham.
- Şener, E., Baronyan, S. and Menguturk, L. A. (2012). Ranking the predictive performances of value-at-risk estimation methods, *International Journal of Forecasting*, **28**, 849–873.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*, Wiley.
- Xu, C. and Chen, H. (2012). Measuring portfolio value at risk, Working paper, Department of Economics, School of Economics and Management, Lund University.

DCC 모형에서 동태적 상관계수 추정법의 효율성 비교

이지호^a · 성병찬^{a,1}

^a중앙대학교 응용통계학과

(2015년 8월 21일 접수, 2015년 9월 15일 수정, 2015년 9월 26일 채택)

요약

본 논문에서는 다변량 DCC(dynamic conditional correlation) GARCH 모형에서 동태적 상관계수를 추정하기 위한 대표적 방법인 쌍별 추정법과 다차원 추정법의 효율성을 비교한다. 이를 위하여 금융 시장의 변동성을 반영하는 다변량 시계열을 생성하고 이에 대한 DCC GARCH 모형을 수립 및 추정하는 시뮬레이션을 실시하였다. 또한 KOSPI 200 섹터지수를 이용하여 포트폴리오를 구성하고 이의 변동성 추정 및 VaR 계산을 통하여 동태적 상관계수 추정에 대한 정확성을 평가하였다. 그 결과로서, 전반적으로 다차원 추정법이 쌍별 추정법보다 우수함을 발견하였다. 특히, 다차원 추정법에서 상대적으로 상관관계가 낮은 시계열을 추가할수록 쌍별 시계열에 대한 동태적 상관계수 추정의 정확성을 높여준을 발견하였다.

주요용어: 다변량 이분산 모형, DCC GARCH, ARCH, 조건부 상관계수, 쌍별 추정, 코스피 200

이 논문은 2014년도 중앙대학교 신입생성적우수장학금과 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. 2012R1A1A2008006).

¹교신저자: (156-756) 서울시 동작구 흑석동 221번지, 중앙대학교 경영경제대학 응용통계학과.

E-mail: bcseong@cau.ac.kr