한국동력기계공학회지 제19권 제5호 pp. 52-59 2015년 10월 ISSN 1226-7813(Print) ISSN 2384-1354(Online)
Journal of the Korean Society for Power System Engineering http://dx.doi.org/10.9726/kspse.2015.19.5.052
Vol. 19, No. 5, pp. 52-59, October 2015

영향계수의 전달에 의한 환원판이 결합된 원추형 셸의 진동해석
Vibration Analysis of Conical Shells with Annular Plates Using Transfer of Influence Coefficient

최명수* · 여동준**†
Myung-Soo Choi* and Dong-Jun Yeo**†

(Received 04 August 2015, Revision received 24 September 2015, Accepted 24 September 2015)

Abstract : This paper is presented for the free vibration of a conical shell with annular plates or circular plate using the transfer of influence coefficient. The governing equations of vibration of a conical shell, including annular plate, are written as a coupled set of first order differential equations by using the transfer matrix of the shell. Once the transfer matrix of a single component has been determined, the entire structure matrix is obtained by the product of each component matrix and the joining matrix. The natural frequencies and the modes of vibration were calculated numerically for joined conical-annular plates. The validity of the present method is demonstrated through simple numerical examples, and through comparison with the results of finite element method, transfer matrix method and ANSYS. The conclusion show that the present method can accurately obtain natural vibration characteristics of the conical shell with annular or circle end plates.

Key Words : Vibration Analysis, Conical Shell, Annular Plate, Influence Coefficient, Numerical Analysis

1. 서 론

원추형 셸은 항공우주와 원자로 발전소 등의 주요 구조요소로서, 많은 연구가 진행되어 왔다.

Yeo 등[1,2]은 끝이 잘린 원추형 셸의 진동해석과 원추와 원통형이 결합된 셸에 대해 원주방향 파의 수와 반정각의 변화에 따른 진동수 변화 특성을 조사하였다. 셸에 판이 결합된 구조물에 대한 연구로 Liang 등[3]은 대칭적으로 적층된 복합적층 원추형 셸과 판이 결합된 구조에 대한 고유진동수를 구하였고, Lee 등[4]은 원통형과 구형(spherical)의 셸이 결합된 구조물의 여러 가지 경계조건에 따른 진동특성을 연구하였고, Yuan and Dickinson[5]은 가상 스프링법을 이용하여 원통형 셸의 양 끝에 원판이 결합된 원통형 셸과 환원판이 결합된 이중 원통형 셸에 대한 진동해석을 수행하였다. 또한 Huang and Soedel[6]은 임의의 축방향의 위치에 원판이 결합된 원통형 셸에 대한 진동해석을 동적응답법으로 구하였고, Cho 등[7]은 유한요소법을 이용하여 셸의 임의의 지점에 환원판이 결합되고 유체가 채워진 원통형 셸에 대한 진동해석을 수행하였다. 그러나 셸에 판이 결합된 구조물의 진동해석에 대한 연구들도 원통형 셸에 원판이나 환원판이 결합된 것들이 대부분이고, 본 연구의 대상 구조물인 원추형 셸에 판이 결합된 연구는 드문 편이다[8]. 그 이유는 원

**† 여동준(교신저자) : 전남대학교 해양기술학부
E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133
* 최명수 : 전남대학교 해양경찰학과

**† Dong-Jun Yeo(corresponding author) : Department of Power System Engineering, Chonnam National University.
E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133
* Myung-Soo Choi : Department of Maritime Police Science, Chonnam National University.

추형 셸은 셸의 좌우양단에서 반지름의 크기가 달라 운동방정식에 수학적인 복잡함이 포함되기 때문이다.

본 연구에서는 구조 단면이 유압 노즐, 나팔형 안테나 등의 산업분야에도 응용되고 있는 원추형 셸과 환원판이 결합된 구조물의 진동해석에 적용해서 해석 알고리즘을 개발하고, 수치실험을 수행한 후, 그 결과를 종래의 방법에 의한 결과와 비교·검토해서 본 방법의 유효성 및 실용성을 확인하였다.

2. 이론 해석

2.1 원추형 셸의 정식화

Fig. 1에서 원추형 셸의 원주, 자오선 및 법선방향의 좌표를 θ, ζ 및 z축으로 잡고, 각각의 변위를 u, v 및 w로 한다. 원추형 셸의 반정각을 α, 자오선 방향의 길이를 $l\,(=\zeta_2-\zeta_1)$, 셸의 두께를 h, 좌측 환원판의 내반경을 r_1, 외반경을 r_2, 우측 환원판의 내반경을 R_1, 외반경을 R_2로 한다.

원추형 셸은 양쪽 경계단과 임의의 길이 중간부에서 탄성적으로 구속될 수 있고, 힘벡터가 불연속인 곳을 절원주로 하여 n개의 요소로 분할할 수 있다. 구속 스프링으로는 원주, 자오선 및 법선방향의 스프링과 θ축의 회전에 대해 저항하는 회전 스프링으로 구성된 4가지 스프링이 존재할 수 있다. 변위벡터는 연속이며, 수식의 기호 위에 ―가 붙은 것은 무차원량이고, 붙지 않는 것은 차원량이다. 또한 ∼와 ∧가

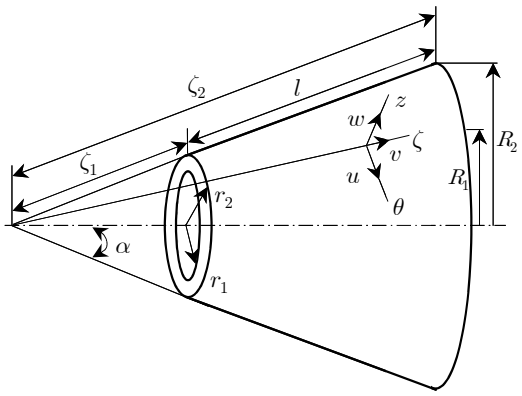


Fig. 1 Conical shell with two annular plates

붙은 것은 각각 상태벡터의 절원주 좌·우측의 무차원 물리량이다. 위첨자 t는 행렬의 전치를 나타내고,하첨자 j는 절원주 j 또는 j번째 원추형 셸요소의 물리량을 나타낸다.

원추형 셸의 굽힘 자유진동에 대한 운동방정식을 Flügge 이론[9]을 바탕으로 하여 무차원화된 행렬 미분방정식으로 나타내면 다음과 같다.[2]

$$\frac{d}{d\xi}\overline{\boldsymbol{Z}}(\xi)=\boldsymbol{\Omega}(\xi)\,\overline{\boldsymbol{Z}}(\xi) \tag{1}$$

$$\overline{Z}(\xi)=\left\{\overline{U},\ \overline{V},\ \overline{W},\ \overline{\Psi},\ \overline{S}_{\zeta\theta},\ \overline{N}_{\zeta},\ \overline{V}_{\zeta},\ \overline{M}_{\zeta}\right\}^{t}$$

여기서 $\overline{\boldsymbol{Z}}$는 임의의 j요소에 있어서의 상태량벡터이고, $\boldsymbol{\Omega}$는 8×8의 계수행렬이다.

해석의 간편함을 위해 도입되는 무차원량들은

$$\overline{U}=\frac{U}{R_2},\ \overline{V}=\frac{V}{R_2},\ \overline{W}=\frac{W}{R_2},\ \overline{\Psi}=\Psi,\ \overline{h}=\frac{h}{R_2},$$

$$\overline{S}_{\zeta\theta}=\frac{R_2^2}{D_s}S_{\zeta\phi},\ \overline{N}_{\zeta}=\frac{R_2^2}{D_s}N_{\zeta},\ \overline{V}_{\zeta}=\frac{R_2^2}{D_s}V_{\zeta},$$

$$\overline{M}_{\zeta}=\frac{R_2}{D_s}M_{\zeta},\ \xi=\frac{\zeta}{R_2}(\xi_1=\frac{\zeta_1}{R_2},\ \xi_2=\frac{\zeta_2}{R_2},$$

$$\xi_3=\frac{r_1}{R_2},\ \xi_4=\frac{r_2}{R_2}),\lambda^4=\frac{(1-\nu^2)\rho R_2^4\,\omega^2}{Eh^2} \tag{2}$$

와 같고, 여기서 Ψ는 각변위, $S_{\zeta\theta}$와 N_{ζ}는 Kelvin－Kirchhoff 전단력과 전단합력, V_{ζ}는 막력, M_{ζ}는 굽힘 모멘트이고, $D_s=Eh^3/12(1-\nu)$는 굽힘강성, E는 종탄성계수, ρ는 밀도, ν는 푸아송 비이다. 식(1)에서 $\boldsymbol{\Omega}$행렬의 요소들은

$$\Omega_{11}=\frac{1}{\xi},\ \Omega_{12}=\frac{\eta}{\xi\sin\alpha},\ \Omega_{13}=\frac{\eta\overline{h}^{\,2}}{6\xi^3\sin\alpha\tan\alpha},$$

$$\Omega_{14}=-\frac{\eta\overline{h}^{\,2}}{6\xi^2\sin\alpha\tan\alpha},\ \Omega_{15}=\frac{\overline{h}^{\,2}}{6(1-\nu)},$$

$$\Omega_{21}=-\frac{\nu\eta}{\xi\sin\alpha},\ \Omega_{22}=-\frac{\nu}{\xi},\ \Omega_{23}=-\frac{\nu}{\xi\tan\alpha},$$

$$\Omega_{26}=\frac{\overline{h}^{\,2}}{12},\ \Omega_{34}=1,\ \Omega_{43}=\frac{\nu\eta^2}{\xi^2\sin^2\alpha},$$

$$\Omega_{44}=-\frac{\nu}{\xi},\ \Omega_{48}=1,\ \Omega_{51}=\frac{12(1-\nu^2)\eta^2}{\xi^2\overline{h}^2\sin^2\alpha}-\lambda^4,$$
$$\Omega_{52}=\frac{12(1-\nu^2)\eta}{\xi^2\overline{h}^2\sin^2\alpha},\ \Omega_{53}=\left[\frac{12(1+\nu)}{\overline{h}^2}+\frac{1}{\xi^2}\right.$$
$$\left.\times\left\{1+\frac{(1+\nu)\eta^2}{\sin^2\alpha}\right\}\right]\frac{(1-\nu)\eta}{\xi^2\sin\alpha\tan\alpha},$$
$$\Omega_{54}=-\frac{(1-\nu)(2+\nu)\eta}{\xi^3\sin\alpha\tan\alpha},\ \Omega_{55}=-\frac{2}{\xi},$$
$$\Omega_{56}=\frac{\nu\eta}{\xi\sin\alpha},\Omega_{58}=\frac{\nu\eta}{\xi^2\sin\alpha\tan\alpha},$$
$$\Omega_{61}=\frac{12(1-\nu^2)\eta}{\xi^2\overline{h}^2\sin\alpha},\ \Omega_{62}=\frac{12(1-\nu^2)}{\xi^2\overline{h}^2}-\lambda^4,$$
$$\Omega_{63}=\left[\frac{12(1+\nu)}{\overline{h}^2}-\frac{\eta^2}{\xi^2\sin^2\alpha}\right]\frac{1-\nu}{\xi^2\tan\alpha},$$
$$\Omega_{64}=\frac{(1-\nu)\eta^2}{\xi^3\sin\alpha\tan\alpha},\ \Omega_{53}=\frac{(1-\nu)(3+\nu)\eta^2}{\xi^3\sin^2\alpha},$$
$$\Omega_{54}=\left(1+\nu+\frac{2\eta^2}{\sin^2\alpha}\right)\frac{(1-\nu)}{\xi^2},\ \Omega_{55}=-\frac{(1-\nu)}{\xi},$$
$$\Omega_{56}=1,\ \Omega_{65}=-\frac{\eta}{\xi\sin\alpha},\ \Omega_{66}=-\frac{1-\nu}{\xi},$$
$$\Omega_{71}=-\frac{12(1-\nu^2)\eta}{\xi^2\overline{h}^2\sin\alpha\tan\alpha},\ \Omega_{72}=-\frac{12(1-\nu^2)}{\xi^2\overline{h}^2\tan\alpha},$$
$$\Omega_{73}=\lambda^4-\frac{12(1-\nu^2)}{\xi^2\overline{h}^2\tan^2\alpha}-\left[2+\frac{(1+\nu)\eta^2}{\sin^2\alpha}\right]\frac{(1-\nu)\eta^2}{\xi^4\sin^2\alpha},$$
$$\Omega_{74}=\frac{(1-\nu)(3+\nu)\eta^2}{\xi^3\sin^2\alpha},\ \Omega_{76}=\frac{-\nu}{\xi\tan\alpha},\ \Omega_{77}=\frac{-1}{\xi},$$
$$\Omega_{77}=\frac{-1}{\xi},\ \Omega_{78}=\frac{\nu\eta^2}{\xi^2\sin^2\alpha},\ \Omega_{83}=\frac{(\nu-1)(3+\nu)\eta^2}{\xi^3\sin^2\alpha},$$
$$\Omega_{84}=\left(1+\nu+\frac{2\eta^2}{\sin^2\alpha}\right)\frac{(1-\nu)}{\xi^2},\Omega_{87}=1,$$
$$\Omega_{85}=\frac{\nu\eta}{\xi^2\sin\alpha\tan\alpha},\Omega_{88}=-\frac{1-\nu}{\xi} \tag{3}$$

이고, 상기 이외의 계수 항은 0이다. 식(1)을 풀면

$$\overline{\boldsymbol{Z}}(\xi)=\boldsymbol{F}(\xi)\ \overline{\boldsymbol{Z}}(0),\ \frac{d}{d\xi}\boldsymbol{F}(\xi)=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F}(\xi) \tag{4}$$

여기서 필드전달행렬 $\boldsymbol{F}(\xi)$는 Runge-Kutta-Gill의 수치적분법을 이용하여 구한다.

임의의 j번째 원추형 셸요소 좌·우측의 절원주 $j-1$ 과 j에 있어서의 상태벡터 $\tilde{\boldsymbol{Z}}_j={}^t({}^t\tilde{\boldsymbol{d}},\ {}^t\tilde{\boldsymbol{f}})_j$와 $\hat{\boldsymbol{Z}}_{j-1}={}^t({}^t\hat{\boldsymbol{d}},\ {}^t\hat{\boldsymbol{f}})_{j-1}$사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\tilde{\boldsymbol{Z}}_j=\boldsymbol{F}_j(\xi)\hat{\boldsymbol{Z}}_{j-1} \tag{5}$$

식(5)를 변위벡터 $\boldsymbol{d}_j={}^t(\overline{U},\ \overline{V},\ \overline{W},\ \overline{\Psi})_j$와 힘벡터 $\tilde{\boldsymbol{f}}_j={}^t(\overline{S}_{\zeta\theta},\ \overline{N}_\zeta,\ \overline{V}_\zeta,\ \overline{M}_\zeta)_j$ 에 대한 부분행렬로 재정리하면

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \tilde{\boldsymbol{f}}\end{bmatrix}_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}_j\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \hat{\boldsymbol{f}}\end{bmatrix}_{j-1} \tag{6}$$

로 되고, $\boldsymbol{A}_j$, $\boldsymbol{B}_j$, $\boldsymbol{C}_j$ 및 $\boldsymbol{D}_j$는 4×4의 정방행렬이다.

원추형 셸의 임의의 절원주 j에 구속스프링이 존재하는 경우, 절원주 좌·우측의 상태벡터는

$$\hat{\boldsymbol{Z}}_j=\boldsymbol{P}_j\tilde{\boldsymbol{Z}}_j \tag{7}$$

여기서 $\boldsymbol{P}_j$는 절원주 j에서 좌·우측 사이의 전달행렬인 포인트 전달행렬이다.

식(7)을 변위벡터 $\boldsymbol{d}_j$ 및 $\boldsymbol{d}_j$와 힘벡터 $\tilde{\boldsymbol{f}}_j$ 및 $\hat{\boldsymbol{f}}_j$에 대한 부분행렬로 재정리하면

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \hat{\boldsymbol{f}}\end{bmatrix}_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{K}&\boldsymbol{I}\end{bmatrix}_j\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \tilde{\boldsymbol{f}}\end{bmatrix}_j \tag{8}$$

여기서 $\boldsymbol{I}$는 단위행렬, $\boldsymbol{0}$는 영(null)행렬이다.

절원주 j의 좌측과 우측에 있어서, 힘의 평형조건으로부터

$$\hat{\boldsymbol{f}}_j=\boldsymbol{K}_j\boldsymbol{d}_j+\tilde{\boldsymbol{f}}_j \tag{9}$$

여기서

$$\boldsymbol{K}_j=\begin{bmatrix}\overline{k}_\theta&0&0&0\\ 0&\overline{k}_\zeta&0&0\\ 0&0&\overline{k}_z&0\\ 0&0&0&\overline{k}_r\end{bmatrix}_j \tag{10}$$

$\boldsymbol{K}_j$벡터에는 탄성지지 스프링 $\bar{k}_\theta$, $\bar{k}_\zeta$, $\bar{k}_z$ 및 $\bar{k}_r$가 포함되고 각각 원주, 자오선 및 법선방향의 스프링과 θ축의 회전에 저항하는 회전스프링이다. 스프링상수들의 무차원량은 다음과 같다.

$$(\bar{k}_\theta, \bar{k}_\zeta, \bar{k}_z) = \frac{hR^2}{D_s}(k_\theta, k_\zeta, k_z), \bar{k}_r = \frac{hR}{D_s}k_r \quad (11)$$

2.2 환원판의 정식화

환원판에 대한 운동방정식은 원추형 셸의 특수한 경우로서, 좌측 환원판은 식(3)의 원추형 셸의 계수행렬 $\boldsymbol{\Omega}$에서 각도 α에 90°를 대입하여 $\sin\alpha \to 1$, $1/\tan\alpha \to 0$로 취하여 다음과 같이 유도한다.

$$\Omega_{11} = \frac{1}{\xi},\ \Omega_{12} = \frac{\eta}{\xi},\ \Omega_{15} = \frac{\bar{h}^2}{6(1-\nu)},\ \Omega_{21} = -\frac{\nu\eta}{\xi},$$
$$\Omega_{22} = -\frac{\nu}{\xi},\ \Omega_{26} = \frac{\bar{h}^2}{12},\ \Omega_{34} = 1,\ \Omega_{43} = \frac{\nu\eta^2}{\xi^2},$$
$$\Omega_{44} = -\frac{\nu}{\xi},\ \Omega_{48} = 1,\ \Omega_{51} = \frac{12(1-\nu^2)\eta^2}{\xi^2\bar{h}^2} - \lambda^4,$$
$$\Omega_{52} = \frac{12(1-\nu^2)\eta}{\xi^2\bar{h}^2}, \Omega_{55} = -\frac{2}{\xi},\ \Omega_{56} = \frac{\nu\eta}{\xi},$$
$$\Omega_{61} = \frac{12(1-\nu^2)}{\xi^2\bar{h}^2},\ \Omega_{62} = \frac{12(1-\nu^2)}{\xi^2\bar{h}^2} - \lambda^4,$$
$$\Omega_{65} = -\frac{\eta}{\xi},\quad \Omega_{66} = \frac{\nu-1}{\xi},$$
$$\Omega_{73} = \lambda^4 - \{2+(1+\nu)\eta^2\}\frac{(1-\nu)\eta^2}{\xi^4},$$
$$\Omega_{74} = \frac{(1-\nu)(3+\nu)\eta^2}{\xi^3}, \Omega_{77} = -\frac{1}{\xi},\ \Omega_{78} = \frac{\nu\eta^2}{\xi^2},$$
$$\Omega_{83} = -\frac{(1-\nu)(3+\nu)\eta^2}{\xi^3},\ \Omega_{87} = 1,$$
$$\Omega_{84} = (1+\nu+2\eta^2)\frac{(1-\nu)}{\xi^2}, \Omega_{88} = -\frac{1-\nu}{\xi} \quad (12)$$

우측 환원판도 식(3)에 나타낸 원추형 셸의 계수행렬 $\boldsymbol{\Omega}$에서 각도 α에 -90°를 대입하여 $\sin\alpha \to -1$, $1/\tan\alpha \to 0$로 취하여 유도한다.

2.3 영향계수의 전달

임의의 절원주 j의 좌측과 우측에서 변위벡터 $\boldsymbol{d}_j$와 힘벡터 $\tilde{\boldsymbol{f}}_j$, $\hat{\boldsymbol{f}}_j$사이의 관계를 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{d}_j = \tilde{\boldsymbol{T}}_j\tilde{\boldsymbol{f}}_j,\ \boldsymbol{d}_j = \hat{\boldsymbol{T}}_j\hat{\boldsymbol{f}}_j \quad (13)$$

여기서 $\tilde{\boldsymbol{T}}_j$, $\hat{\boldsymbol{T}}_j$는 4×4의 대칭인 동적영향계수 행렬이다.

식(6)과 (13)에서 j번째 요소에 있어서 동적영향계수의 필드전달식은

$$\tilde{\boldsymbol{T}}_j\boldsymbol{X}_j = \boldsymbol{H}_j \ (j = 2, \cdots, n) \quad (14)$$

여기서

$$\boldsymbol{X}_j = \boldsymbol{C}_j\hat{\boldsymbol{T}}_{j-1} + \boldsymbol{D}_j, \boldsymbol{H}_j = \boldsymbol{A}_j\hat{\boldsymbol{T}}_{j-1} + \boldsymbol{B}_j \quad (15)$$

식(9)와 (13)에서 동적영향계수의 포인트 전달식은

$$\hat{\boldsymbol{T}}_j\hat{\boldsymbol{X}}_j = \tilde{\boldsymbol{T}}_j \quad (16)$$

여기서

$$\hat{\boldsymbol{X}}_j = \boldsymbol{K}_j\tilde{\boldsymbol{T}}_j + \boldsymbol{I}_j \quad (17)$$

상기의 필드 및 포인트 전달식을 결합시키면, 식(14)와 (16)으로부터 필드-포인트 전달식은

$$\hat{\boldsymbol{T}}_j\boldsymbol{Y}_j = \boldsymbol{H}_j \ (j = 2, \cdots, n) \quad (18)$$

여기서

$$\boldsymbol{Y}_j = \boldsymbol{K}_j\boldsymbol{H}_j + \boldsymbol{X}_j \quad (19)$$

이고, 식(18)은 필드와 포인트 전달식을 하나로 결합시킨 식이므로 이 식을 이용하면 계산시간을 훨씬 단축시킬 수 있다.

본 해석기법에서는 계산시점의 경계조건을 처음부터 고려해야 한다. 즉 원추형 셸의 좌측의 경계선인 절원주 0를 스프링 지지로 간주하여 절원주 0 우측에서의 동적영향계수 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{\boldsymbol{T}}_0 = \boldsymbol{K}_0^{-1} \tag{20}$$

여기서, $\boldsymbol{K}_o$는 절선 0에서의 포인트 강성행렬이다. 그러나 $\boldsymbol{K}_o$가 특이행렬인 경우, $\boldsymbol{K}_o$의 역행렬이 구해지지 않으므로, 절원주 0과 1 사이의 동적영향계수의 전달과정은 $\boldsymbol{K}_o$를 그대로 사용한 다음 식이 이용된다.

$$\tilde{\boldsymbol{T}}_1 \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{H}_1 \tag{21}$$

여기서

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{K}_0,\ \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{K}_0 \tag{22}$$

식(22)의 $\boldsymbol{K}_o$의 요소인 스프링상수 $\bar{k}_\theta$, $\bar{k}_\zeta$, $\bar{k}_z$, $\bar{k}_r$의 값들을 적절히 변화시킴으로써 모든 경계조건에 대응시킬 수 있다.

2.4 결합부의 좌표변환

환원판과 원추형 셸의 결합부에서 변위와 힘성분들은 연속성을 가진다. 좌측 환원판과 원추형 셸의 결합부에서는 다음과 같은 평형관계식을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned}
&\overline{U}_j^{(c)} = \overline{U}_j^{(lp)},\ \overline{V}_j^{(c)} = \overline{V}_j^{(lp)}\cos\beta - \overline{W}_j^{(lp)}\sin\beta,\\
&\overline{W}_j^{(c)} = \overline{V}_j^{(lp)}\sin\beta + \overline{W}_j^{(lp)}\cos\beta,\ \overline{\Psi}_j^{(c)} = \overline{\Psi}_j^{(lp)},\\
&\overline{S}_{\zeta j}^{(c)} = \overline{S}_{\zeta j}^{(lp)},\ \overline{N}_{\zeta j}^{(c)} = \overline{N}_{\zeta j}^{(lp)}\cos\beta - \overline{V}_{\zeta j}^{(lp)}\sin\beta,\\
&\overline{V}_{\zeta j}^{(c)} = \overline{N}_{\zeta j}^{(lp)}\sin\beta + \overline{V}_{\zeta j}^{(lp)}\cos\beta,\ \overline{M}_{\zeta j}^{(c)} = \overline{M}_{\zeta j}^{(lp)}
\end{aligned} \tag{23}$$

여기서 상첨자 (c)와 (lp)는 각각 원추형 셸과 좌측 환원판을 나타낸다. 식(23)을 변위성분과 힘성분들의 변환 행렬벡터로 각각 나타내면

$$\boldsymbol{d}_j^{(c)} = \boldsymbol{R}_j^{(lp\to c)} \boldsymbol{d}_j^{(lp)},\ \boldsymbol{f}_j^{(c)} = \boldsymbol{R}_j^{(lp\to c)} \boldsymbol{f}_j^{(lp)} \tag{24}$$

여기서 $\boldsymbol{R}_j^{(lp\to c)}$는 좌측 환원판의 원추형 셸에 대한 변환행렬로서 다음 식과 같고, 각도 β_1는 $\pi/2-\alpha$과 같다.

$$\boldsymbol{R}_j^{(lp\to c)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_1 & \sin\beta_1 & 0 \\ 0 & -\sin\beta_1 & \cos\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j \tag{25}$$

결합부 j에서 좌측 환원판과 원추형 셸의 변위벡터와 힘벡터의 관계는

$$\boldsymbol{d}_j^{(lp)} = \hat{\boldsymbol{T}}_j^{(lp)} \hat{\boldsymbol{f}}_j^{(lp)},\quad \boldsymbol{d}_j^{(c)} = \hat{\boldsymbol{T}}_j^{(c)} \hat{\boldsymbol{f}}_j^{(c)} \tag{26}$$

로 되고, 식(24)와 (26)으로부터 좌측 환원판에서부터 원추형 셸 사이의 동적영향계수의 전달식은 다음과 같다.

$$\hat{\boldsymbol{T}}_j^{(c)} = \boldsymbol{R}_j^{(lp\to c)} \boldsymbol{T}_j^{(lp)\ t} \boldsymbol{R}_j^{(lp\to c)} \tag{27}$$

동일한 방법으로 결합부 j에서 원추형 셸에서부터 우측 환원판 사이의 동적영향계수의 전달식은 다음과 같다.

$$\hat{\boldsymbol{T}}_j^{(rp)} = \boldsymbol{R}_j^{(c\to rp)} \boldsymbol{T}_j^{(c)\ t} \boldsymbol{R}_j^{(c\to rp)} \tag{28}$$

여기서 $\boldsymbol{R}_j^{(c\to rp)}$는 원추형 셸에서 우측 환원판으로의 좌표변환 행렬로서 식(29)와 같고, 각도 β_2는 $\pi/2+\alpha$와 같다.

$$\boldsymbol{R}_j^{(c\to rp)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_2 & -\sin\beta_2 & 0 \\ 0 & \sin\beta_2 & \cos\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j \tag{29}$$

진동수방정식과 고유모드의 알고리즘은 Yeo[1]의 연구와 같은 과정으로 구할 수 있다.

3. 수치계산 결과 및 고찰

3.1 한쪽에 원판이 결합된 원추형 셸

계산 모델 I은 원추형 셸의 좌측에 원판이 결합된 구조물로서 좌측 원판의 지름은 180 mm이고, 우측 원추형 셸의 지름은 200 mm이다. 원추형 셸의 길이는 96 mm이고, 원판과 원추형 셸의 두께는 모두 2 mm이다. 셸 및 원판의 재료는 종탄성계수가 68.9 GPa, 푸아송 비가 0.3이다. 계산 모델 I의 경계조건은 좌단에서 자유이고, 우단에서 고

정이다.

Table 1은 계산 모델 I에서 원주방향의 파수 η가 0에서 2일 때, 파수별 1차부터 3차까지의 진동수 파라미터 λ를 나타낸 것이다. Table 2에서 보면 본 연구에서 제시한 영향계수의 전달(TICM)에 의해 계산 결과는 Liang 등[8]이 제시한 종래의 유한요소법(FEM)과 전달행렬법(TMM)에 의한 계산 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Table 1 Frequency parameters λ of conical shell with an circular plate

η	m	Frequency parameters		
		FEM	TMM	TICM
0	1	3.4170	3.4170	3.4174
	2	6.7660	6.7660	6.7675
	3	10.145	10.155	10.157
1	1	4.9232	4.9282	4.9282
	2	8.3550	8.3639	8.3646
	3	11.760	11.772	11.773
2	1	6.3191	6.3263	6.3263
	2	9.8670	9.8810	9.8813
	3	13.320	13.342	13.342

3.2 양쪽에 환원판이 결합된 원추형 셸

Fig. 2에 나타낸 계산 모델 Ⅱ는 원추형 셸의 좌·우측에 환원판이 결합된 구조물로서 환원판의 안지름과 바깥지름, 길이의 치수는 그림과 같다. 원추형 셸의 반정각은 30°, 환원판과 원추형 셸의 두께는 모두 1 mm이고, 밀도는 7800 kg/m^3, 종탄성계수는 200 GPa, 푸아송 비는 0.3이다. 경계조건은 좌단과 우단 모두 고정이다.

Table 2는 계산 모델 Ⅱ에서 원주방향의 파수 η가 0에서 7일 때, 파수별 1차부터 5차까지의 고유진동수를 영향계수의 전달(TICM)에 의해 계산한 결과를 나타낸 것이다.

Table 3은 영향계수의 전달에 의해 구한 고유진동수의 신뢰성을 확인하기 위하여, Table 2와 동일한 계산 모델 Ⅱ에 대하여 유한요소법에 기본 알고리즘을 두고 있는 범용해석 소프트웨어인 ANSYS를 이용하여 1차부터 10차까지의 고유진동

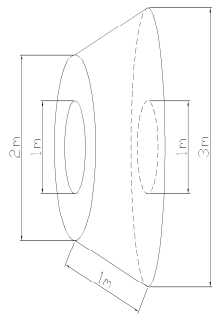


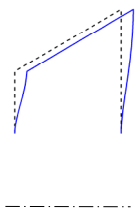
Fig. 2 Computional model Ⅱ

Table 2 Natural frequencies [Hz] of computation model Ⅱ obtained using TICM

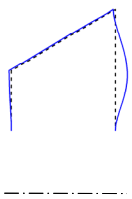
η	m	Frequencies	η	m	Frequencies
0	**1**	**14.86**	**4**	**1**	**77.00**
0	**2**	**53.45**	4	2	171.64
0	3	142.81	4	3	223.13
0	4	195.54	4	4	244.48
0	5	279.09	4	5	310.17
1	**1**	**50.23**	**5**	**1**	**95.21**
1	**2**	**129.72**	5	2	188.80
1	3	165.56	5	3	204.81
1	4	206.05	5	4	262.26
1	5	286.14	5	5	330.05
2	**1**	**54.98**	**6**	**1**	**117.40**
2	2	145.04	6	2	175.97
2	3	196.27	6	3	222.84
2	4	270.26	6	4	297.85
2	5	318.07	6	5	348.50
3	**1**	**63.54**	**7**	**1**	**142.30**
3	2	156.05	7	2	166.90
3	3	209.55	7	3	254.64
3	4	272.05	7	4	331.32
3	5	300.15	7	5	358.24

Table 3 Natural frequencies [Hz] of computation model Ⅱ obtained using ANSYS

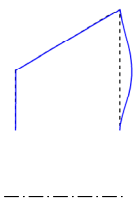
No.	η	m	Natural Frequencies		
			ANSYS 1	ANSYS 2	ANSYS 3
1	0	1	15.26	14.97	**14.86**
2	1	1	53.58	51.17	**50.29**
3	0	2	57.26	54.50	**53.52**
4	2	1	58.29	55.90	**55.03**
5	3	1	66.83	64.47	**63.59**
6	4	1	80.79	78.10	**77.05**
7	5	1	100.63	96.83	**95.30**
8	6	1	126.09	120.02	**117.57**
9	1	2	143.43	133.89	**130.07**
10	7	1	156.30	146.50	**142.58**



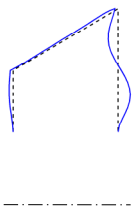
(a) $\eta=0,\ m=1$



(b) $\eta=0,\ m=2$



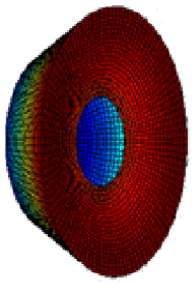
(c) $\eta=1,\ m=1$



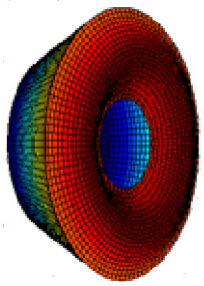
(d) $\eta=1,\ m=2$

Fig. 3 Two dimensional mode shapes of computational model Ⅱ

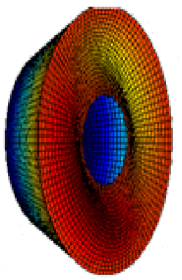
수를 구한 결과이다. Table 3에서 계산 모델 Ⅱ의 모델링에서 분할된 셸 요소의 수가 ANSYS 1은 931개, ANSYS 2는 2,805개, 그리고 ANSYS 3은



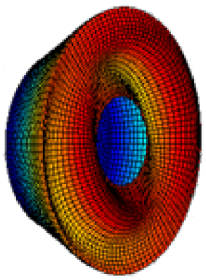
(a) $\eta=0,\ m=1$



(b) $\eta=0,\ m=2$



(c) $\eta=1,\ m=1$



(d) $\eta=1,\ m=2$

Fig. 4 Three dimensional mode shapes of computational model Ⅱ

가장 많은 23,959개로 모델링하여 고유진동수를 구한 결과이다. ANSYS의 계산 결과들을 살펴보면, 가장 많은 요소수를 사용한 ANSYS 3의 결과에 수렴해 감을 확인할 수 있었고, 이 값은 Table 2에 나타낸 영향계수의 전달에 의한 결과와도 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Table 3에서 원주방향 파의 수(η)와 파의 수에 따른 진동의 차수(m)는 ANSYS의 계산 결과인 고유 모드를 살펴보고 구하였다. 영향계수의 전달에 의해 구한 고유모드들도 ANSYS의 결과와 잘 일치하고 있다.

Fig. 3은 영향계수의 전달에 의해 구한 계산 모델 Ⅱ의 고유 모드 중 일부를 2차원적으로 나타낸 것이다. 모드는 중심선에 대하여 축대칭이므로 한 쪽면만 나타내었다.

Fig. 4는 Fig. 3의 2차원적인 고유 모드에 대응하는 3차원적인 모드 형상을 나타낸 것이다. 3차원 고유 모드를 그릴 때 보는 방향의 각도를 임의로 변경하면 어느 방향에서든지 바라본 형상을 그릴 수 있으며, 본 논문의 제한된 지면에서는 한 방향에서의 형상만 제시하였다.

4. 결 론

본 연구에서는 원판 또는 환원판이 결합된 원추형 셸 구조물에 대해 영향계수의 전달을 이용한 기법을 이용하여 자유진동을 해석하는 알고리즘을 정식화하였다. 본 알고리즘의 정식화에 매트랩을 이용하여 고유진동수와 고유모드를 구하는 전산프로그램을 개발한 후, 간단한 모델에 대하여 수치실험을 수행하였다. 또한 수치계산 모델에 대하여 유한요소법과 전달행렬법, 그리고 범용 해석 프로그램인 ANSYS를 이용하여 구한 고유진동수와 고유모드를 비교해 보니 본 연구의 결과들은 대단히 잘 일치함을 확인할 수 있었다. 또한 종래의 2차원적인 모드 형상을 3차원적으로 확장하여 그릴 수 있는 알고리즘을 개발하였다.

후 기

이 논문는 2013년도 전남대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

References

1. D. J. Yeo, 2005, “Development of Vibrationl Analysis Algorithm for Truncated Conical Shells”, Journal of the Korean Society for Power System Engineering, Vol. 9, No. 3, pp. 58-65.
2. D. J. Yeo and M. S. Choi, 2013, “Development of Vibration Analysis Algorithm for Joined of Conical-cylindrical Shell Structures using Transfer of Influence Coefficient”, Journal of the Korean Society for Power System Engineering, Vol. 17, No. 1, pp. 50-57.
3. S. Liang, H. L. Chen, T. Chen and M. Y. Wang, 2007, “The Natural Vibration of a Symmetric Cross-ply Laminated Composite Conical-plate Shell”, Composite Structures, Vol. 80, No. 2, pp. 265-278.
4. Y. S. Lee, M. S. Yang, H. S. Kim and J. H. Kim, 2002, “A Study on the Vibration of the Joined Cylindrical-spherical Shell Structures”, Computer and Structures, Vol. 80, No. 27, pp. 2405-2414.
5. J. Yuan and S. M. Dickinson, 1994, “The Free Vibration of a Circular Cylindrical and Plate System”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 175, No. 2, pp. 241-263.
6. D. T. Huang and W. Soedel, 1993, “Natural Frequencies and modes of a Circular Plate Welded to a Circular Cylindrical Shell at a Arbitrary Axial Positions”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 162, No. 3, pp. 403-427.
7. J. R. Cho, H. W. Lee and K. W. Kim, 2002, “Free Vibration Analysis of Baffled Liquid-storage Tank by the Structural-acoustic Finite Element Formulation”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 258, No. 5, pp. 847-866.
8. S. Liang and H. L. Chen, 2006, “The Natural Vibration of a Conical Shell with an Annular End Plate”, Composite Structures, Vol. 294, No. 4-5, pp. 927-943.
9. W. Flügge, 1973, “Stress in Shells”, Springer-Verlag, Berlin.