

# 맥놀이 현상을 알아보자

김재은

(대구가톨릭대학교 기계자동차공학부)

## 1. 머리말

매년 한 해를 보내는 마지막 시각에는 '제야의 종' 33번이 어김없이 울린다. 범종의 타격 이후 '웅~웅' 하는 은은한 소리는 때마침 여운을 느끼기에 충분하다. 이러한 타격음 이후의 특징적인 종소리에 대해 국내에서는 1980년대부터 많은 연구가 이뤄져 왔다. 이는 주조 과정 또는 표면 문양 등에 따른 질량 및 강성의 비대칭 분포에 의한 원주 모드 쌍의 간섭에 의한 것으로 알려져 있다<sup>(1)</sup>. 이 모드들은 진동수(주파수)가 비슷하다.

돌고래는 자신이 내보낸 신호와 물체에 반사되어 나오는 신호를 통해 주변의 움직임을 파악한다고 한다. 물체가 움직이지 않으면 반사되어 오는 파동의 주파수는 변함이 없겠지만, 움직이는 물체에서 반사되는 신호의 주파수는 도플러(doppler) 효과에 의해 변하게 된다. 즉, 내보내고 받는 신호는 서로 다른 주파수를 갖고 중첩하게 된다. 이는 진동 신호의 측정에 효과적인 LDV(laser doppler vibrometer)의 원리가 되기도 한다.

그렇다면, 주파수가 비슷한 파동이 합쳐지면 일반적으로 어떤 특징적인 현상이 있을까, 발생 원리는 무엇일까? 이에 대한 답을 얻기 위해서는 '맥놀이(beatting)' 라고 불리는 현상에 대한 지식이 필요하다. 맥놀이는 위에서 살펴 본 바와 같이 범종의 소리 특성을 설계하는데 이용될 뿐만 아

니라, 악기의 조율 등 서로 다른 두 신호의 진동수를 비교할 수 있는 훌륭한 수단이 된다. 이러한 원리는 구조물의 결함 진단<sup>(2)</sup>에도 응용된 바가 있다.

이번 강좌에서는 맥놀이의 발생 원리를 설명하고, 예제를 통해 그 현상을 살펴보고자 한다.

## 2. 맥놀이의 기본 원리

### 2.1 맥놀이 현상에 대한 기본 이해

두 사람이 동시에 같은 출발점에서 출발하여 서로 나란히 걷고 있다. 그런데, 두 사람의 다리 길이는 서로 다르다. 그림 1(a)에 보인 바와 같이 두 사람의 발자국은 서로 곧 안 맞게 되지만 얼마 후 다시 일치하는 지점이 또 생기게 된다. 그림의 경우 1분에 각각 6 발걸음과 4 발걸음이므로 그의 차이인 2 발자국이 서로 맞춰지게 된다. 동일한 논리로 만약 한 사람이 10 발걸음을, 다른 한 사람은 7 발걸음을 갔다면, 1분 동안 3 발자국이 맞춰지게 된다. 즉, 서로 동일한 위치의 발자국의 수는 두 사람의 발걸음의 진동수 차이가 된다.

또 다른 예를 생각해보자. 빗살 간격이 서로 다른 2개의 머리 빗을 겹쳐보면 빗살들의 위치가 서로 겹치는 부분이 일정한 간격으로 주기적으로 반복되는 것을 관찰할 수 있다. 이 때 단위 길이당 반복되는 부분의 수는 2개 빗의 단위 길이당 빗살 수의 차이가 된다<sup>(3)</sup>.

\* E-mail : jekim@cu.ac.kr

## 기초강좌

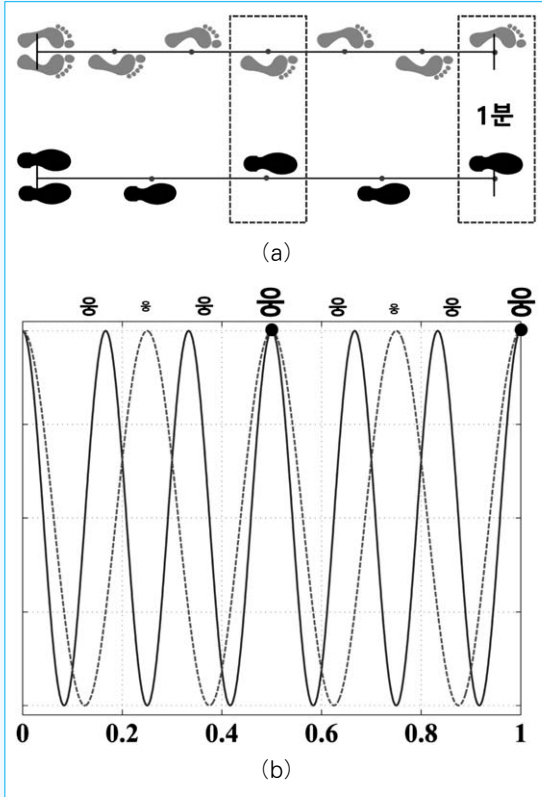


그림 1 (a) 일정 시간 (1분) 동안의 두 사람의 발자국과  
(b) 사인파의 중첩

이제 이러한 생각을 그림 1(b)에 보인 바와 같이 서로 다른 진동수의 2개의 사인파에 적용해보자. 일정한 시간 간격(공통의 주기)마다 한번씩 사인파의 최대값이 겹쳐진다(동일 위상). 공통의 주기 사이에는 서로 일치하지 않는 정도가 증가하여 당연히 사인파가 제일 일치하지 않는 순간도 있다. 따라서, 이 사인파가 소리를 나타낼 경우에는 소멸 또는 보강 간섭의 정도에 따라 ‘웅~웅’ 하는 소리가 주기적으로 들리게 되며 이러한 현상을 바로 맥놀이라고 한다. 서로 다른 2개의 소리굽쇠를 고려할 때, 1개는 1초에 440번 진동하고 나머지는 445번 진동한다면, 각각의 소리굽쇠에서 발생하는 소리는 1초에 5번씩 신호가 겹

치게 되어, 맥놀이 진동수는 5 Hz가 되는 것이다. 다만, 소리에 있어서의 맥놀이는 2개의 신호 진동수 차이가 수 Hz 이하이고, 신호의 크기가 비슷한 경우 그 현상이 더욱 뚜렷해진다.

## 2.2 맥놀이 현상에 대한 수학적 이해

서로 다른 주파수  $\omega_1$  및  $\omega_2$  (rad/s)를 갖는 2개의 파동,  $x_1(t)$  및  $x_2(t)$ 가 공간상의 어느 한 장소에서 만날 경우, 그 지점에서의 파동은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (1)$$

위 식에서 공통의 주기  $T_b$  시간 후에 각각의 신호 값은 동일하므로 위상 변화량은  $2\pi$ 의 정수배이어야 한다. 따라서,  $\omega_1 T_b = 2\pi n_1$  및  $\omega_2 T_b = 2\pi n_2$  ( $n_1, n_2$ 는 정수)가 되므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2)$$

위의 관계는 중첩 신호인  $x(t)$ 가 주기 운동을 하기 위한 조건으로서 중첩 신호는  $\omega_1$ 과  $\omega_2$ 의 최대 공약수로 진동하게 된다. 이 때,  $T_b/2$  동안에는 두 신호가 보강 간섭을, 나머지  $T_b/2$  동안에는 소멸 간섭을 하게 된다.

맥놀이 현상을 조금이라도 더 쉽게 수학적으로 살펴보기 위해 2개 신호의 진폭 및 위상을 같다고 가정하면 식 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad (3)$$

위 식에서  $\omega_1 t$ 와  $\omega_2 t$ 의 위상차에 따라 2개 신호는 상호 소멸 및 보강 간섭을 하게 되고, 중첩 신호의 진폭은  $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ 가 작은 경우에 어느 정도 천천히 변하게 된다. 그림 2에  $\omega_1 = 10$  rad/s,

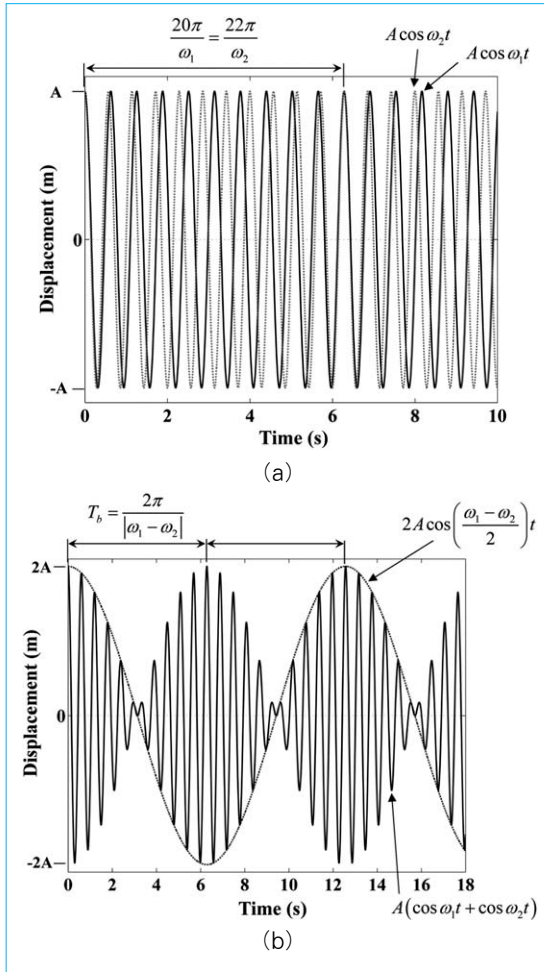


그림 2 (a) 진폭이 같고 주파수 차이가 적은 2개의 신호 및 (b) 중첩 신호

$\omega_2 = 11\text{rad/s}$ 에 대한 각각의 신호 및 식 (3)에 의한 중첩 신호를 나타내었다.

그림 2에서  $t = 0$ 에서는 2개의 신호가 모두 동위상으로서 보강 간섭을 통해 중첩 신호의 진폭이 최대가 되지만 이후  $\omega_1 t$ 와  $\omega_2 t$ 의 위상차에 의해 중첩 신호의 진폭이 감소하다가 동위상이 되는  $t = 2\pi$  초 ( $20\pi / \omega_1 = 22\pi / \omega_2$ )가 될 때까지 다시 증가한다. 이러한 과정이 되풀이 되면서 그림 2(b)에 보인 바와 같이 중첩 신호는 진폭이 천

천히 변하는 포락선(envelope)의 형태를 갖게 된다. 이 포락선의 주기와 관련된 주파수를 맥놀이 주파수(beat frequency)라고 하며, 이를 구하기 위해 식 (3)을 다음과 같이 표현한다.

$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t \quad (4)$$

또한, 위 식은 두 신호의 평균 주파수  $\omega_{avg} = (\omega_1 + \omega_2)/2$  및 주파수 차이  $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ 에 대한 식을 이용하면 다음과 같다.

$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)t \cdot \cos\omega_{avg}t = A_p(t) \cdot \cos\omega_{avg}t \quad (5)$$

위 식에서  $A_p(t)$ 가 그림 2(b)에서 점선으로 표현된 포락선을 나타내며, 포락선의 최대값과 다음 최대값 사이의 간격  $T_b$ 는  $2\pi / \Delta\omega / 2$ 의 1/2인  $2\pi / \Delta\omega$ 가 된다. 따라서, 맥놀이 주파수  $f_b$ (Hz)는 다음과 같다.

$$f_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = |f_1 - f_2| \quad (6a)$$

$$\text{or } \omega_b = \Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \quad (6b)$$

진폭 및 위상이 서로 다른 신호에 대한 식 (1)의 일반적인 경우에 대해서도 맥놀이 현상이 관찰된다. 다만, 이 경우에는 중첩 신호의 진폭 및 위상의 시간 의존성, 맥놀이 주파수 등을 앞에서 살펴 본 방법으로는 직접 유도하기 곤란하므로 복소 지수법을 사용하여야 한다. 이에 대해서는 참고 서적<sup>(4)</sup>을 활용하기 바란다.

### 3. 맥놀이 예제

#### 3.1 소리의 중첩

음압의 크기가 각각  $A_1 = 5 \text{ Pa}$  (108.0 dB),  $A_2 = 3 \text{ Pa}$  (103.5 dB)이고, 각각의 주파수가

## 기초강좌

$f_1 = 250 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 255 \text{ Hz}$ 인 음파가 만났다. 이 경우 초당 5개의 맥놀이율을 형성하는  $252.5 \text{ Hz}$ 의 소리를 듣게 된다. 이 때 최대값은  $A_1 + A_2 = 8 \text{ Pa}$  ( $112.0 \text{ dB}$ )이고 최소값은  $A_1 - A_2 = 2 \text{ Pa}$  ( $100 \text{ dB}$ )이 된다. 소리의 경우 일반적으로 초당 10번 이상의 맥놀이는 너무 빨라서 듣기 어렵다.

### 3.2 약하게 탄성 결합된 2자유도계의 자유 진동 모드 중첩(특정 초기 조건)

그림 3에 나타난 2자유도계 시스템의 자유 진동에 대한 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k+k_s & -k_s \\ -k_s & k+k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

2개의 모드가 모두 가진 되도록 하는 특정 초기 조건  $x_1(0) = A$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ 에 대해 각각의 해는 다음과 같이 유도된다.

$$x_1(t) = \frac{A}{2} \cos \omega_1 t + \frac{A}{2} \cos \omega_2 t \quad (8a)$$

$$x_2(t) = \frac{A}{2} \cos \omega_1 t - \frac{A}{2} \cos \omega_2 t \quad (8b)$$

위 식에서  $\omega_1 = (k/m)^{1/2}$ ,  $\omega_2 = ((k+2k_s)/m)^{1/2}$ 이다. 따라서,  $k_s$ 가 매우 작다고 가정하면,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+sk_s}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{k_s}{k}\right) \approx \omega_1 \quad (9)$$

에 의해 맥놀이가 발생한다. 식 (9)로부터 맥놀이 주파수  $f_b$  (Hz)는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_b &= \frac{\Delta\omega}{2\pi} \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{k_s}{k}\right) - \sqrt{\frac{k}{m}} \right) = \frac{\omega_1}{2\pi} \frac{k_s}{k} \end{aligned} \quad (10)$$

그림 4는  $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 1.1 \text{ rad/s}$  및  $A = 1$ 에

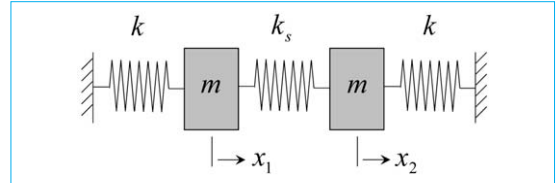


그림 3 약하게 탄성 결합된 ( $k_s \ll k$ ) 2자유도계 질량-스프링 시스템

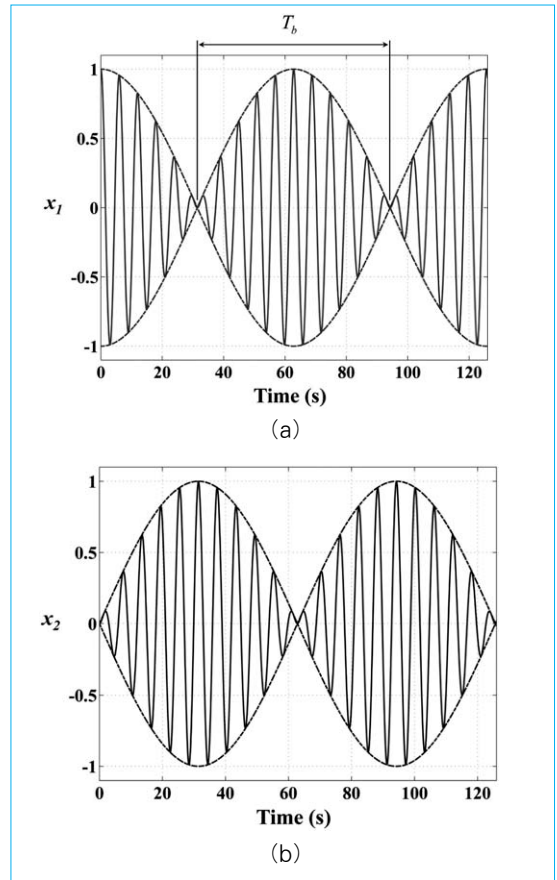


그림 4 약하게 탄성 결합된 2자유도 질량-스프링시스템의 변위 : (a)  $x_1(t)$ 와 (b)  $x_2(t)$

대한 결과이다. 감쇠가 없으므로 에너지는 2개의 질량 사이에서 반복하여 교환된다. 각각의 질량의 변위가  $T_b/2$ 마다 증가/감소의 경향을 달리하고 있다. 즉, 상호간에 직교 위상으로 진동하게 된다.

### 3.3 자유 진동과 강제 진동의 중첩

1자유도계에서 외력의 가진 주파수와 계의 고유 진동수가 비슷한 경우에 대한 응답은 다음과 같다.

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t = f_0 \cos \omega t \quad (\text{단, } \omega \approx \omega_n) \quad (11)$$

위 식의 일반해에 초기 조건  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ 을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_n t) \\ &= \frac{2f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega_n + \omega}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_n - \omega}{2} t \end{aligned} \quad (12)$$

따라서, 맥놀이(포락선)의 주기  $T_b$  및 주파수  $f_b$ 는 다음과 같다.

$$T_b = 0.5 \times \frac{2\pi}{|\omega_n - \omega|/2} = \frac{2\pi}{|\omega_n - \omega|} \quad (13a)$$

$$f_b = \frac{1}{T_b} = \frac{|\omega_n - \omega|}{2\pi} = |f_n - f| \quad (13b)$$

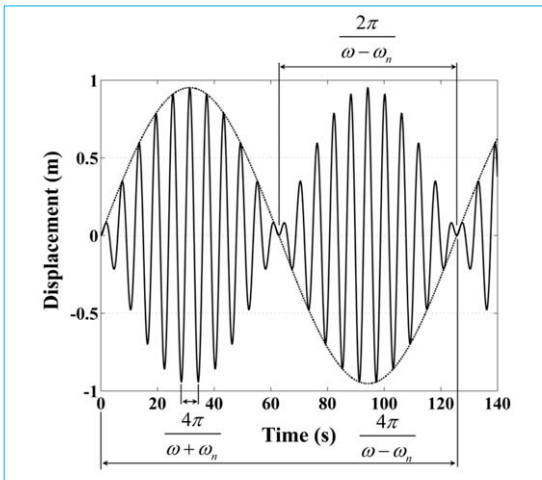


그림 5 감쇠가 없는 경우에 대한 자유 진동 및 강제 진동의 중첩

$f_0 = 0.1 \text{ N/kg}$ ,  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$  및  $\omega = 1.1 \text{ rad/s}$ 에 대한 식 (12)의 일반해를 그림 5에 나타내었다. 그런데, 이 경우에는 감쇠가 없기 때문에 시간이 지나도 자유 진동항이 제거되지 않고 정상 상태가 되지 않기에 맥놀이는 지속적으로 관찰된다. 따라서, 식 (11)에 대해 감쇠를 고려한 일반 해를 이용하되(초기 조건 동일), 감쇠가 매우 작다면  $\omega \approx \omega_d$ 에 대해 다음과 같이 유도된다.

$$x(t) = X_p [\cos(\omega t - \phi_p) - e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi_p)] \quad (14)$$

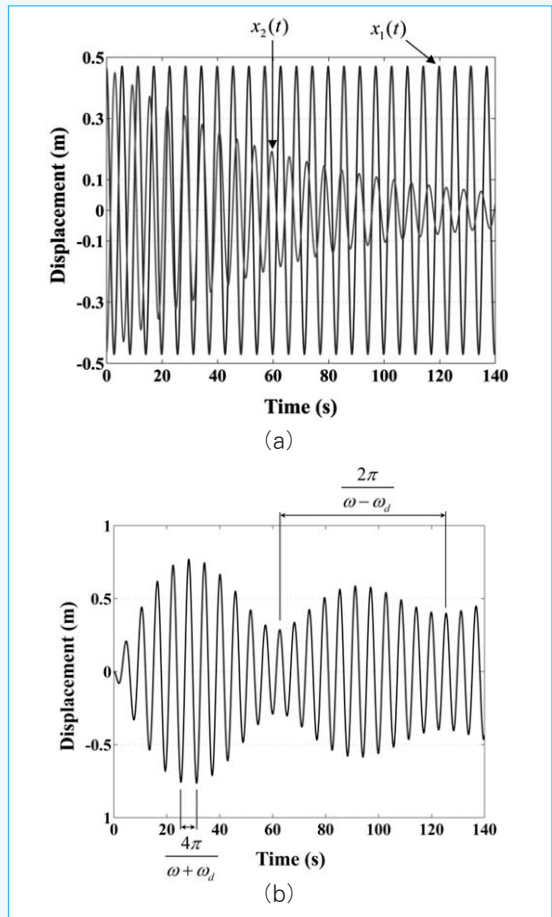


그림 6 감쇠가 있는 경우에 대한 (a) 자유 진동해 ( $x_1$ ) 및 강제 진동해 ( $x_2$ ), (b) 중첩 신호

## 기초강좌

위 식에서

$$X_p = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

$$\phi_p = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

앞서 감쇠가 없는 경우에 대한 수치 및  $\zeta = 0.015$ 를 이용하면, 이에 대한 식 (14)의 일반해는 그림 6과 같다. 참고로  $\omega = \omega_d$ 의 경우에 식 (14)는  $X_p(1 - e^{-\zeta\omega_n t})\cos(\omega_d t - \phi_p)$ 가 되어 강제 진동해의 진폭이 될 때까지 진폭이 계속 증가하게 된다.

### 3.4 주파수가 서로 다른 두 가진력에 의한 강제 진동

식 (11)을 2개의 서로 비슷한 가진 주파수를 갖는 힘에 대해 표현하면 ( $\omega_1 \approx \omega_2$ ),

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + F_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) \quad (15)$$

이므로, 위 식에 대한 강제 진동 해는 다음과 같다.

$$x(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1 - \phi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2 - \phi_2) \quad (16)$$

이는 앞서 언급한 진폭과 위상이 다른 일반적인 경우로서 복소 지수법을 사용하면 지금까지 살펴본 예제와 동일하게 취급할 수 있다.

## 4. 맺음말

이번 기초 강좌는 맥놀이 현상에 대한 기본 이해와 수학적 심화 이해를 목적으로 쓰여졌다. 그러나, 지면이 부족하여 내용을 압축하고 또 수학적 기술을 추가하다 보니 기초 강좌라고 하기

에 무색해질 수도 있겠다. 그러나, 진동에 대한 기본 지식이 있다면 이해에 큰 어려움은 없을 것이다.

필자는 현재 메타 물질 기반의 진동/음향 에너지 변환에 대해 연구하고 있다. 그러다 보니, 파동의 군속도에 대한 이해도 필요하고, 이는 곧 맥놀이 현상과도 직결된다. 그래서, 여러 고민을 하다가 내 자신의 이해력도 정리할 겸 기초 강좌로서 맥놀이를 다루게 되었다.

참고로 서로 다른 주파수로 이동하는 파동은 서로 다른 파장을 갖게 되고, 분산파의 경우에는 주파수에 따라 파동의 이동 속도가 다르게 된다. 그렇다면, 앞서 살펴본 시간 축에서 살펴본 맥놀이 현상이 공간에서도 발생하게 된다. 구성 파동들이 중첩되어 맥놀이 형태의 파동으로 이동하는 속도가 바로 군속도가 되는 것이다. [KSNVE](#)

## 참고문헌

- (1) 김석현, 2003, 중형 구조물의 맥놀이 지도 작성법과 성덕대왕 신종의 맥놀이 지도, 한국소음진동공학회논문집, Vol. 13, No. 8, pp. 626~636.
- (2) 이호철, 2005, 단시간 푸리에 변환과 맥놀이를 이용한 강건한 결함 진단법, 한국소음진동공학회논문집, Vol. 15, No. 9, pp. 1108~1117.
- (3) Hewitt, P. G., 2002, Conceptual Physics, Pearson Education, Inc.
- (4) Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B. and Sanders, J. V., 1999, Fundamentals of Acoustics (4th ed.), John Wiley & Sons, Inc.