

버터워즈 특성을 갖는 개선된 상보필터

전용호*

Improved Complementary Filter with The Butterworth Property

Yong-Ho Jeon*

요 약

상보 필터(Complementary Filter)는 실시간 자세계측을 위해 신호처리 방법으로 많이 사용된다. 필터 설계에서 2차 이상의 버터워즈 특성을 갖도록 하여, 통과대역에서 이득은 균일하고 차단대역에서는 차단 특성이 좋은 버터워즈 특성(Butterworth Filter)을 갖는 상보필터의 설계방법을 제안한다. 적절한 필터 계수의 설정으로 필터의 성능 개선이 이루어짐을 시뮬레이션을 통하여 입증하여 보인다. 시뮬레이션을 바탕으로 산정된 필터의 계수를 이용하여 실시간 신호처리가 가능함을 실험으로 보인다.

ABSTRACT

Complementary Filter is commonly used in signal processing method for real-time position measurement. Butterworth filter characteristic has a uniform gain in the pass band, the blocking band has a good blocking characteristics. Therefore, we propose a method of designing a complementary filter having a characteristic of Butterworth filter characteristic. By setting the appropriate filter coefficients in the simulation it appears to improve the performance of the filter. In the experiment it shows a real-time signal processing is possible by using the calculated filter coefficients in the simulation.

키워드

Complementary Filter, Butterworth Characteristic, Gyro Sensor, Accelerometer, Pass Band
상보 필터, 버터워즈 특성, 자이로 센서, 가속도계, 통과 대역

1. 서 론

반도체 센서와 그에 따른 신호처리 기술의 발전은 반도체로 만들어진 소형 자세 센서의 개발과 많은 성능 개선이 이루어졌다. 특히 자율적인 이동을 하는 로봇의 정밀한 자세제어를 위해서 정밀하며 실시간 계측이 가능한 자세센서가 반드시 요구된다[1-8].

본 논문에서는 3축 자이로 센서와 3축 가속도 센서로 구성된 센서 모듈을 사용하여 실시간으로 정밀하며 간편하게 자세 계측이 가능한 신호처리 알고리즘을 개발하고자 한다. 먼저 2장에서 연산의 처리가 간

편한 알고리즘인 상보 필터에 대해 설명하고, 3장에서 2차의 버터워즈 특성을 갖는 개선된 상보 필터를 설계하는 방법을 제시한다. 또한 대역 통과 필터의 특성을 이용하여 적절한 필터 계수의 설정하는 방법을 설명하고, 이후 시뮬레이션과 실험으로 제안된 필터의 개선된 성능을 보인다.

* 교신저자 (corresponding author) : 중원대학교 메카트로닉스학과(waterjliar@jwu.ac.kr)
접수일자 : 2015. 08. 08

심사(수정)일자 : 2015. 09. 13

게재확정일자 : 2015. 09. 23

II. 상보필터(Complementary Filter)

일반적으로 여러 센서의 신호를 결합하는 방법들 중 하나인 상보필터는 다음 그림 1과 같다.[6-8].

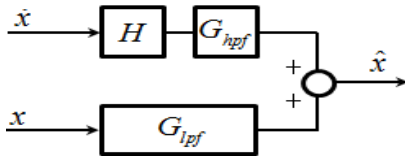


그림 1. 신호 합성
Fig. 1 Signal Fusion

그림 1에서 H 는 적분기, G_{hpf} 는 고역 통과 필터, 그리고 G_{lpf} 는 저역 통과 필터를 나타낸다. 즉 \dot{x} 는 자이로 센서로부터 얻어지는 신호로 각도의 변화율인 각속도를 나타내며 이를 적분한 출력에 고역 통과 필터를 사용한다. x 는 가속도 센서로부터 얻는 각도 값으로 중력 및 외력에 의해 영향을 받는 센서로 출력에 저역 통과 필터를 사용한다. 각각 필터를 통과한 두 값을 합성하여 각도 값을 얻는다.

피드백 루프를 갖고 연속적인 필터링이 가능하도록 구성을 하면 다음의 그림 2와 같다[6-8].

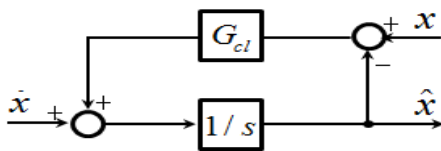


그림 2. 필터 구현
Fig. 2 Filter Implementation

그림 2와 같이 유도하기 위해서 먼저 그림 1의 합성에 대한 표현은 다음 식 (1)과 같다.

$$\hat{x} = H(s)G_{hpf}(s)\dot{x} + G_{lpf}(s)x \quad (1)$$

폐루프를 구성하면 다음의 식 (2)와 같다.

$$\hat{x} - G_{lpf}(s)\hat{x} = H(s)G_{hpf}(s)\dot{x} + G_{lpf}(s)(x - \hat{x}) \quad (2)$$

식 (2)를 정리하면 다음 식 (3)과 같다.

$$\hat{x} = \frac{H(s)G_{hpf}(s)}{1 - G_{lpf}(s)}\dot{x} + \frac{G_{lpf}(s)}{1 - G_{lpf}(s)}(x - \hat{x}) \quad (3)$$

식 (3)은 다음 식 (4)로 표현 할 수 있다.

$$\hat{x} = H(s)\frac{G_{hpf}(s)}{1 - G_{lpf}(s)}\left(\dot{x} + \frac{G_{lpf}(s)}{H(s)G_{hpf}(s)}(x - \hat{x})\right) \quad (4)$$

전대역 필터를 설계할 때 이득 특성은 다음 식 (5)와 같다.

$$1 = G_{hpf}(s) + G_{lpf}(s) \quad (5)$$

식 (5)의 특성을 갖도록 필터를 설계한다면 식 (4)는 다음의 식 (6)에서 식 (7)과 같다.

$$1 = \frac{G_{hpf}(s)}{1 - G_{lpf}(s)} \quad (6)$$

$$G_{cl}(s) = \frac{G_{lpf}(s)}{H(s)G_{hpf}(s)} \quad (7)$$

III. 개선된 버터워즈 특성의 상보필터

2 장에서 살펴보듯이 상보필터는 전 대역필터(all pass filter)의 특성을 이용하여 상태 \dot{x} 와 x 의 출력에 필터를 설계하고 이를 합성하는 필터이다. 시간 역에서 상태 \dot{x} 은 적분하여 사용하는데 이때 바이어스 값 또한 적분되어진다. 그러므로 상태 \dot{x} 을 적분한 신호는 고역 통과 필터를, 상태 x 는 저역 통과 필터를 사용하게 된다. 일반적으로 상보필터를 설계할 때 간단한 연산이 가능한 일계 차수의 저역통과 필터와 고역 통과 필터로 구성을 하는데, 그림 2의 폐루프에서 식 (6)은 1이 되고, 식 (7)은 상수 값을 가지게 되어 적분으로 인해 바이어스 항의 제거가 어려운 문제가 있어서 2계 차수 이상의 필터를 설계한다. 또 필터의 통과 대역의 이득이 균일하며 차단 성능이 좋은 버터워즈 특성의 2차 필터를 설계한다.

3.1 버터워즈 특성을 갖는 2차 상보필터

2계 차수를 갖는 특성 방정식을 이용하여 G_{hpf} 와 G_{lpf} 를 설계하면 다음 식 (8)에서 식 (10)과 같다.

$$G_{hpf}(s) = \frac{s^2}{s^2 + a\omega_0 s + b\omega_0^2} \quad (8)$$

$$G_{lpf}(s) = \frac{a\omega_0 s + b\omega_0^2}{s^2 + a\omega_0 s + b\omega_0^2} \quad (9)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} \quad (10)$$

여기서, 식 (8)에서 식 (9)의 ω_0 는 필터의 차단 주파수이다. 특성방정식의 근이 그림 3과 같이 좌 반면에 두 근 $-1/\sqrt{2} \pm j(1/\sqrt{2})$ 이 되도록 한다면, 계수 a 는 $\sqrt{2}$ 이고 b 는 1이 되어 2차 버터워즈의 특성을 갖는 특성 방정식이 된다. 식 (8)은 고역 통과 필터이며, 식 (9)은 저역 통과 필터와 밴드패스필터가 결합된 필터이다.

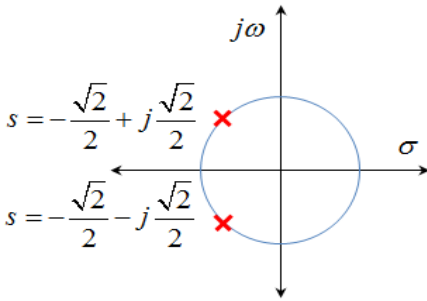


그림 3. 버터워즈 특성방정식의 극값
Fig. 3 The Pole's of The Butterworth's Characteristic Equation

식 (8)의 고역 통과 필터와 식 (9)의 저역 통과 필터를 식 (4)와 같이 필터로 구성하면 다음의 식 (11)에서 식 (13)과 같다.

$$\frac{G_{hpf}(s)}{1 - G_{lpf}(s)} = 1 \quad (11)$$

$$G_{cl}(s) = \sqrt{2} \omega_0 + \frac{\omega_0^2}{s} \quad (12)$$

$$\hat{x} = \frac{1}{s} (\dot{x} + G_{cl}(x - \hat{x})) \quad (13)$$

3.2 개선된 버터워즈 특성의 2차 상보필터

저역 통과 필터를 대역 통과 필터로 수정하면 식 (14)에서 식 (15)와 같다.

$$G_{hpf}(s) = \frac{s^2}{s^2 + (\sqrt{2} \omega_0 / Q) s + \omega_0^2} \quad (14)$$

$$G_{lpf}(s) = \frac{(\sqrt{2} \omega_0 / Q) s + \omega_0^2}{s^2 + (\sqrt{2} \omega_0 / Q) s + \omega_0^2} \quad (15)$$

여기서, 특성방정식의 근은 그림 3에서 같이 좌 반면에 서로 다른 두 근 $-1/\sqrt{2} \pm j(1/\sqrt{2})$ 으로 버터워즈 특성을 갖게 된다. 그리고 Q 는 대역 통과 필터의 통과 대역의 폭을 결정할 수 있는 값으로 다음 식 (16)와 같다.

$$Q = \frac{\text{Center Frequency}}{\text{Band Width}} = \frac{\sqrt{\omega_H \omega_L}}{\omega_H - \omega_L} \quad (16)$$

식 (16)의 분자는 중심 주파수를 나타내며, ω_L 은 중심 주파수로부터 통과 대역의 낮은 쪽 주파수이고, ω_H 는 중심 주파수로부터 통과 대역의 높은 쪽 주파수이다.

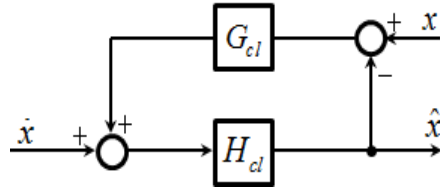


그림 4. 개선된 상보필터
Fig. 4 Improved Complementary Filter

식 (14)에서 식 (15)를 이용하여 그림 2의 필터를 설계하면 다음 식 (17)에서 식 (19)와 같다.

$$H_{cl}(s) = H(s) \frac{G_{hpf}(s)}{1 - G_{lpf}(s)} = \frac{1}{s} \quad (17)$$

$$G_{cl}(s) = \frac{G_{lpf}(s)}{H(s) G_{hpf}(s)} = \frac{\sqrt{2} \omega_0}{Q} + \frac{\omega_0^2}{s} \quad (18)$$

$$\hat{x} = H_{cl}(\dot{x} + G_{cl}(x - \hat{x})) \quad (19)$$

식 (19)은 2차 버터워즈 저역 통과 필터와 대역 통과 필터를 페루프 구성하여 결합된 필터이다. 저역 통과 필터는 ω_0 를 중심 주파수로 하여 Q 값으로 차단주파수를 결정할 수 있다.

IV. 시뮬레이션

필터의 샘플링 주기는 0.1 [ms]이고, $\dot{\phi}$ 는 시작에서 1초까지 0 [rad/s]에서 2π [rad/s]의 각속도로 증가하고, 시간 1초에서 2초까지 2π [rad/s]에서 $4\pi/3$ [rad/s]까지 감소한다. 시간 2초 이후는 $4\pi/3$ [rad/s]를 유지한다. $\dot{\theta}$ 는 시작에서 시간 1초까지 0 [rad/s]에서 -2π [rad/s]의 각속도로 감소하고, 시간 1초에서 2초까지 -2π [rad/s]에서 $-4\pi/3$ [rad/s]까지 증가한다. 시간 2초 이후는 $-4\pi/3$ [rad/s]를 유지한다. 그리고 $\dot{\psi}$ 은 시간 0초부터 5초까지 각속도 0 [rad/s]를 유지한다. 각속도에 입력되는 노이즈는 크기를 0.5 [rad/sec]로 랜덤 함수를 사용하여 가산하였고, 각도에 가산되는 노이즈도 크기 0.1 [rad]로 랜덤함수를 사용하여 가산하였다.

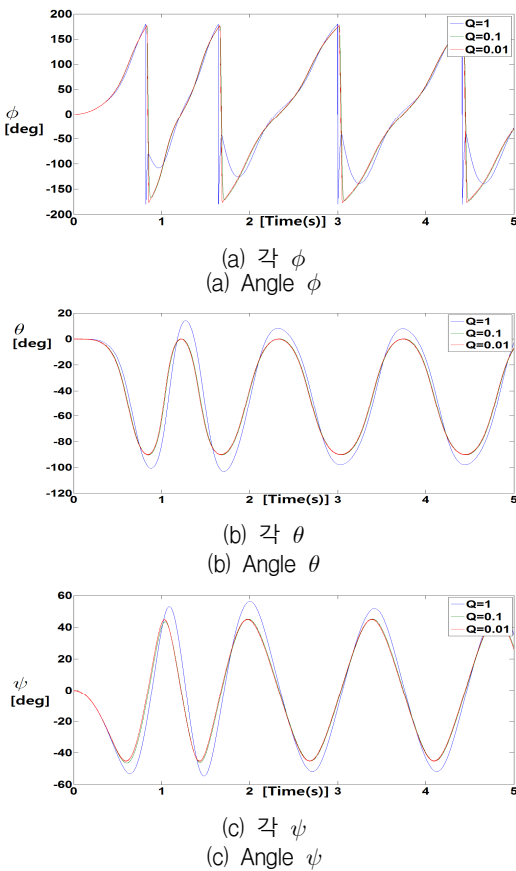


그림 5. 2차 버터워즈특성 필터의 신호처리 결과
Fig. 5 Result of Filtering with The Butterworth Property

그리고 필터의 2차 버터워즈 특성을 얻기 위해 좌 반면에 두 근 $-1/\sqrt{2} \pm j(1/\sqrt{2})$ 을 배치하여 식 (8)에서 식 (9)의 a 는 $\sqrt{2}$ 이고 b 는 1로 하였다. 식 (17)에서 필터의 차단 주파수 10 [rad/s]로 하였고, $Q = 1$ 인 경우 차단 주파수는 약 10 [rad/s]가 되고, $Q = 0.1$ 인 경우 차단 주파수는 약 50 [rad/s]가 되었고, $Q = 0.01$ 인 경우 차단 주파수는 약 500 [rad/s]가 되었다.

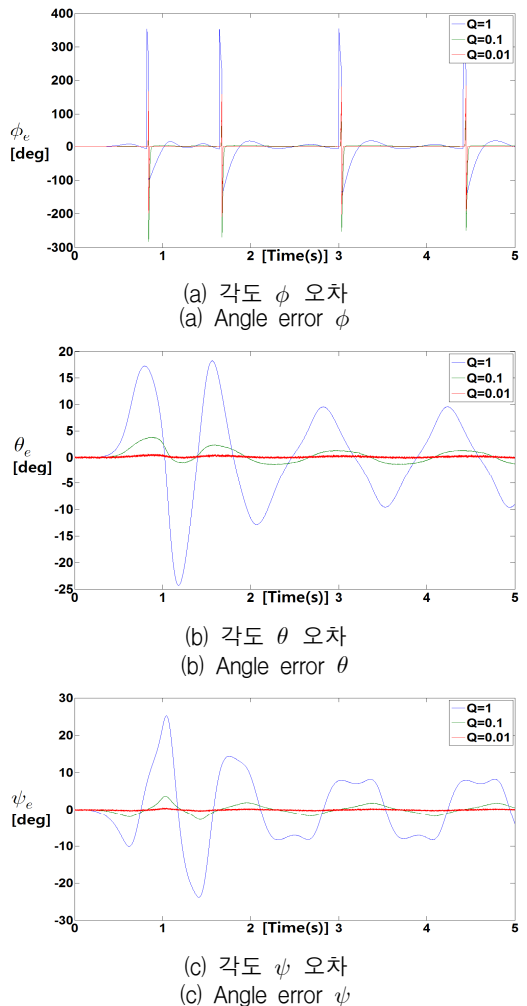
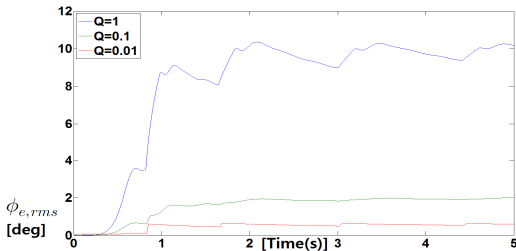
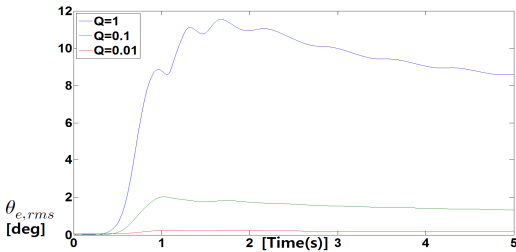


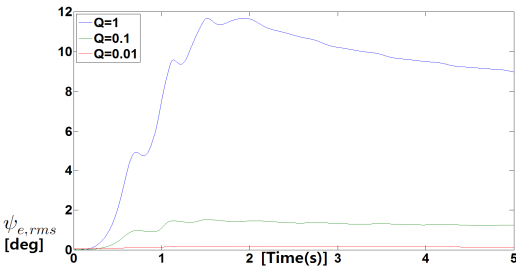
그림 6. 2차 버터워즈특성 필터의 신호처리 결과
Fig. 6 Result of Filtering with The Butterworth Property



(a) 각도 ϕ 오차의 RMS
(a) RMS Error of the Angle ϕ



(b) 각도 θ 오차의 RMS
(b) RMS Error of the Angle θ



(c) 각도 ψ 오차의 RMS
(c) RMS Error of the Angle ψ

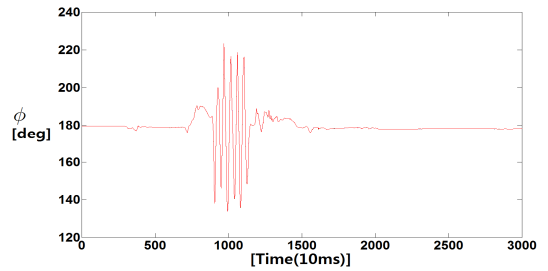
그림 7. 각도 오차에 대한 RMS 값

Fig. 7 Root Mean Square Value of the angle error

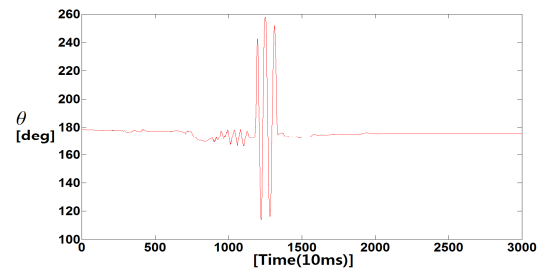
그림 5에서는 각도에 대한 결과를, 그림 6에서는 기준 각으로부터 오차를, 그림 7은 각도 오차의 RMS(Root Mean Square) 값을 얻은 결과이다. (a)는 각 ϕ 에 대한 결과이며, 그림 (b)는 각 θ , 그림 (c)는 각 ψ 의 결과이다. 결과에서 보듯이 $Q = 1$, $Q = 0.1$ 인 경우 보다 $Q = 0.01$ 인 경우 차단 주파수가 약 500 [rad/s]로 커짐으로 인하여 각도 오차, 그리고 RMS 오차가 작아짐을 알 수 있다. 특히 $Q = 0.01$ 인 경우 RMS 오차가 약 0.5 [°]이하로 개선되었다.

V. 실험

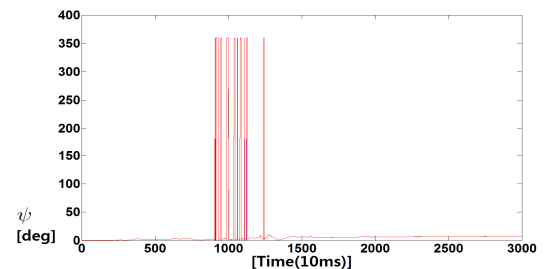
실험을 위해 반도체 센서인 3축 가속도 센서는 MMA7260Q와 자이로센서는 2축 각속도 센서인 LPA530AL 두 개를 이용하여 3축 각속도 센서를 구성한 제품을 사용하였다. 그리고 주프로세서는 Cortex-M3 계열의 STM32F103를 사용하여 프로그램 하였다. 1[ms]의 필터링 주기로 하고 차단 주파수는 10[rad/s]로 하였고, $Q = 0.625$ 로 하여 실험을 한 결과가 다음 그림 8과 같다.



(a) 각 ϕ
(a) Angle ϕ



(b) 각 θ
(b) Angle θ



(c) 각 ψ
(c) Angle ψ

그림 8. 버터워즈특성의 개선된 필터의 실험 결과
Fig. 8 Experiment Result of The Improved Filter with the Butterworth Property

그림 8은 필터의 차단 주파수는 $Q=0.625$ 값으로 인해 약 13 [rad/s]로 커졌으며, 버터워즈 필터 특성을 위해 좌 반면에 두 근 $-1/\sqrt{2} \pm j(1/\sqrt{2})$ 을 배치하여 식 (8)에서 식 (9)의 a 는 $\sqrt{2}$ 이고 b 는 1 로 하였다. 각도 ϕ 는 시간 약 7초에서 12초까지 약 ± 40 [°]의 롤링 동작을 하였고, 각 θ 에 대해서는 약 12초에서 14초까지 약 ± 50 [°] 피칭 동작을 하였다. 필터링한 결과를 보면 롤링과 피칭 동작에 의한 오차가 각 ψ 의 임펄스적인 오차를 발생하는데 이는 요잉 동작을 하지 않아도 연산오차에 의해 약 0 [°]과 약 360 [°]의 값을 발생시킨다. 약 12초 이후 센서의 롤링, 피칭, 및 요잉 동작을 하지 않고 가만히 두었을 때 일정한 값으로 수렴하여 오차 값이 적분되지 않음을 알 수 있다.

VI. 결 론

본 논문은 실시간으로 계측된 신호를 합성하는데 있어서 간편하면서도 노이즈의 제거 성능이 좋은 2차의 버터워즈 특성을 갖는 상보필터를 설계하였다. 설계된 2차의 버터워즈 특성을 갖는 상보필터는 저역통과필터의 차단주파수와 대역통과필터의 신호의 통과대역을 적절히 조절하므로 필터의 성능을 개선할 수 있고, 통과대역에서 주파수 특성이 평평하며 차단대역의 차단특성이 좋은 버터워즈 특성을 갖는 상보필터를 설계할 수 있었다. 그 결과 시뮬레이션에서 각도의 RMS 오차가 모두 약 0.5 [°] 이내로 개선됨을 확인할 수 있었고, 차단주파수와 Q 값의 산정으로 적절한 필터 계수를 손쉽게 설정을 할 수 있었다.

추후 설계된 상보필터를 이산시간영역으로 확장하고 필터계수에 대한 적응법칙을 적용하여 노이즈 제거 성능이 더욱 개선된 강건하고 정밀한 필터를 구성하고자 한다.

References

[1] W. T. Higgins. JR, "A Comparison of Complementary and Kalman Filtering," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-11, no. 3, May, 1975, pp. 321-325.
 [2] D. Roetenberg, H. Luinge, C. Baten, and P.

Veltink, "Compensation of magnetic disturbances improves inertial and magnetic sensing of human body segment orientation," *IEEE Trans. Neural Syst. Rehabil. Eng.*, vol. 13, Sep. 2005, pp. 395

[3] E. Foxlin, "Inertial head-tracker sensor fusion by a complementary separate-bias Kalman filter," *IEEE Proceedings of VRAIS '96*, 1996. pp. 185-194.
 [4] E. J. Lefferts, F. L. Markley, and M.D. Shuster, "Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation," *J. of Guidance, control, and Dynamics*, vol. 5, no. 5, 1982, pp. 417-429.
 [5] Jack B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences*, Princeton: Princeton University Press, 2002, pp.155-175, pp.257-275.
 [6] A. J. Baerveldt and R. Klang, "A low-cost and low-weight attitude estimation system for an autonomous helicopter," *IEEE Int. conf. Intelligent Engineering Systems*, Budapest, Hungary, Sept., 1997, pp. 391- 395.
 [7] I. Y. Bar-Itzhack and Y. Oshman, "Attitude Determination from Vector Observations : Quaternion Estimation," *IEEE trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 21, no. 1, 2006. pp. 128-136
 [8] T. Yoo, S. Hong, H. Yoon, and S. Park, "Gain-Scheduled Complementary Filter Design for a MEMs Based Attitude and Heading Reference System," *Sensors*, vol. 11, no. 4, Mar, 2011, pp. 3816-3830.

저자 소개

전용호(Yong-ho Jeon)



1996년 광운대학교 제어계측공학과 졸업(공학사)

1998년 광운대학교 대학원 제어계측공학과 졸업(공학석사)

2008년 광운대학교 대학원 정보제어공학과 졸업(공학박사)

2013년~현재 중원대학교 메카트로닉스학과 교수

※ 관심분야 : 가변속 시스템, 지능로봇 시스템