

비선형 셀룰라오토마타의 도달가능표

권숙희* · 조성진** · 최언숙*** · 김한두****

Reachable table of nonlinear cellular automata

Sook-Hee Kwon* · Sung-Jin Cho** · Un-Sook Choi*** · Han-Doo Kim****

요약

비선형 셀룰라오토마타는 선형 셀룰라오토마타에 비해서 수학적 분석이 어렵다. 그렇기 때문에 비선형 셀룰라오토마타는 비그룹 셀룰라오토마타에 대하여 도달가능상태와 끌개를 식별하기 어렵다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 보완하기 위해 도달가능표를 제안한다. 제안한 도달가능표에 의하여 비선형 셀룰라오토마타의 모든 상태에 대한 다음 상태를 알 수 있다. 또한 도달가능표에 의하여 도달가능상태와 끌개를 식별할 수 있다.

ABSTRACT

Non-linear cellular automata is difficult to analyze mathematically than linear cellular automata. So it is difficult to identify reachable states and attractors of nongroup non-linear cellular automata than nongroup linear cellular automata. In this paper, we propose a new reachable table to overcome these problems. We can see the next state for all the states of the non-linear cellular automata by the proposed reachable table. In addition, we can identify reachable states and attractors by the reachable table.

키워드

Nonlinear Cellular Automata, Reachable Tree, Reachable State, Attractor
비선형 셀룰라오토마타, 도달가능트리, 도달가능상태, 끌개

1. 서론

Von Neumann은 복잡계의 특성을 분석하거나 시뮬레이션하기 위해 자체 재생산 할 수 있는 모델로 셀룰라오토마타(cellular automata, 이하 CA)를 도입하였다[1]. 그 이후로 CA는 테스트 패턴 생성, 의사난수 생성, 암호학, 패턴분류 등 다양한 동적 현상들을 연구하는 분야에서 사용되었다[2-7].

이러한 CA는 전이규칙에 따라 상태가 변화되는 데 모든 셀의 상태가 몇 개의 사이클을 이루며 반복되는

CA를 그룹 CA(group CA)라고 하고 셀들의 몇몇 상태가 사이클을 이루지 않는 CA를 비그룹 CA(nongroup CA)라고 한다. 그룹 CA는 임의의 한 상태에 대한 이전 상태가 유일하지만 비그룹 CA는 트리 구조를 이루고 이전 상태가 유일하지 않다. 또한 CA의 규칙이 XOR 논리로만 표현된다면 선형규칙(linear rule)이라고 한다. 모든 셀이 선형규칙인 CA를 선형 CA(linear CA)라고 하고 그렇지 않는 CA를 비선형 CA(nonlinear CA)한다[8-11].

Das 등은 비선형 CA의 모든 도달가능상태를 알기

* 부경대학교 응용수학과(habaqueen@naver.com)

** 교신저자 (corresponding author) : 부경대학교 응용수학과(sjcho@pknu.ac.kr)

*** 동명대학교 정보통신공학과(choies@tu.ac.kr)

**** 인제대학교 응용수학과(mathkhd@inje.ac.kr)

접수일자 : 2015. 01. 19

심사(수정)일자 : 2015. 05. 13

게재확정일자 : 2015. 05. 23

위하여 도달가능트리를 제안하였다[12]. 제안한 도달가능트리는 i 번째 셀의 RMT(Rule Min Term)와 $(i+1)$ 번째 셀의 RMT 사이의 관계를 고려하여서 모든 도달가능상태를 식별할 수 있게 한다. 그러므로 Das 등이 제안한 방법은 모든 도달가능상태를 식별하기가 복잡하다.

본 논문에서는 다양한 패턴분류기의 설계를 위하여 비선형 CA를 분석하고자한다. 비선형 CA의 분석을 위해 도달가능트리를 나타내지 않고 CA 규칙의 진리표를 재배열한 도달가능표를 제안한다. 제안한 도달가능표는 모든 상태에 대한 다음 상태를 효과적으로 알 수 있게 한다. 또한 이 표에 의하여 비그룹 CA에 대하여 도달가능상태와 끝개를 식별할 수 있다.

II. 배경지식

3-이웃 1차원 CA의 상태 전이함수는 $s_i^{t+1} = f(s_{i-1}^t, s_i^t, s_{i+1}^t)$ 이다. 여기서 s_i^t 는 시간 t 에서 i 셀의 상태이고, f 는 결합논리로 구현되는 국소전이함수이다.

CA의 상태전이그래프에서 직전자가 적어도 한 개 존재하는 상태를 도달가능상태(reachable state)라고 하고 직전자가 존재하지 않는 상태를 도달불가능상태(nonreachable state)라고 한다. 시간 t 에 대한 어떤 상태 \mathbf{x}^t 가 전이규칙에 의해 다음 상태 \mathbf{x}^{t+1} 로 전이될 때 그 결과가 $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^{t+1}$ 를 만족하는 그런 상태를 끝개(attractor)라고 한다. 이 때 \mathbf{x}^t 는 사이클의 길이가 1인 순환상태가 된다[8].

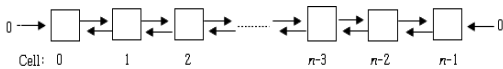


그림 1. NBCA(Null Boundary CA)
Fig. 1 NBCA(Null Boundary CA)

규칙이 $\langle 108, 201, 105, 76 \rangle$ 인 CA의 RMT를 표 1에 나타내었다. 본 논문에서는 그림 1과 같이 첫 셀의 왼쪽은 0이고 마지막 셀의 오른쪽은 0인 NBCA(Null Boundary CA)를 다룬다.

표 1. 규칙이 $\langle 108, 201, 105, 76 \rangle$ 인 CA의 RMT
Table 1. RMTs of CA with rule $\langle 108, 201, 105, 76 \rangle$

RMT	111 (7)	110 (6)	101 (5)	100 (4)	011 (3)	010 (2)	001 (1)	000 (0)	rule
1-cell	-	-	-	-	1	1	0	0	108
2-cell	1	1	0	0	1	0	0	1	201
3-cell	0	1	1	0	1	0	0	1	105
4-cell	-	1	-	0	-	1	-	0	76

다음은 도달가능트리에 대해서 살펴본다. 트리의 각 노드는 전이규칙의 RMT들로 구성된다. 트리의 한 노드의 왼쪽 예지는 0-에지(0-edge), 오른쪽 예지는 1-에지(1-edge)이다.

표 2. i 번째와 $(i+1)$ 번째 RMT의 관계
Table 2. Relationship between RMT of the i^{th} cell and the $(i+1)^{th}$ cell

RMT of i^{th} rule	0	1	2	3	4	5	6	7
RMT of $(i+1)^{th}$ rule	0,1	2,3	4,5	6,7	0,1	2,3	4,5	6,7

표 2는 i 번째 전이규칙에 대한 RMT와 $(i+1)$ 번째 전이규칙에 대한 RMT의 관계를 나타낸 표이다. n 셀 CA의 상태에 대하여 $\mathbf{x} = (s_1 s_2 \dots s_n)$ 이라고 하자. i 번째 전이규칙에 대한 RMT는 $i-1, i, i+1$ 번째 셀의 상태에 따라 결정된다. 예를 들어 i 번째 전이규칙에 대한 RMT가 1이면 $\mathbf{x} = (\dots 0 \underline{0} 1 \dots)$ 이다. 이 경우

$(i+1)$ 번째 전이규칙에 대한 RMT는 $i, i+1, i+2$ 번째 셀의 상태에 따라 결정되므로 $(i+1)$ 번째 전이규칙에 대한 RMT는 2 또는 3이다. 또한 i 번째 전이규칙에 대한 RMT가 6이면 $\mathbf{x} = (\dots 1 \underline{1} 0 \dots)$ 이고 이 때

$(i+1)$ 번째 전이규칙에 대한 RMT는 4 또는 5이다.

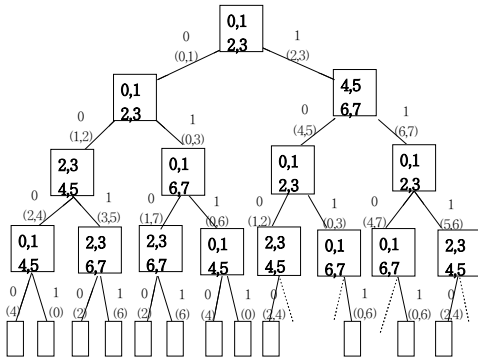


그림 2. 규칙이 <108, 201, 105, 75>인 CA의 도달가능트리

Fig. 2 The reachability tree of CA with rule <108, 201, 105, 75>

규칙 <108, 201, 105, 75>인 CA에서 첫 번째 셀에서 RMT 0, 1→0, 2, 3→1의 값을 가진다. 첫 번째 셀 RMT가 0, 1인 경우 두 번째 셀에 적용 가능한 RMT는 0, 1, 2, 3이다. 다음 상태 값은 RMT 1, 2→0, 0, 3→1이다. 이런 방법으로 네 번째 셀까지 RMT를 배열하여서 RMT $j(j=0,1,\dots,7)$ 의 값이 0이면 한 노드의 왼쪽 예지로, 1이면 오른쪽 예지로 배열하면 그림 2와 같고, 모든 도달가능상태는 도달가능트리를 완성해야 식별할 수 있고 도달불가능상태는 0001(1), 0010(2), 0100(4), 0111(7)임을 알 수 있다. 이와 같이 Das 등[12]이 제안한 방법은 i 번째 셀에서 RMT의 값을 0-에지와 1-에지에 배열하고 표 2의 i 번째 셀과 $(i+1)$ 번째 셀의 RMT의 관계를 고려하여 다음 셀의 RMT의 값을 다시 0-에지와 1-에지에 배열하여야 하므로 매우 복잡하다.

III. 도달가능표를 이용한 비선형 CA의 분석

이 절에서는 도달가능트리를 나타내지 않고 CA의 전이규칙의 진리표를 재배열한 도달가능표를 제안한다.

표 3. 규칙이 $\langle R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$ 인 CA의 RMT들
Table 3. RMTs of CA with rule $\langle R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$

RMT	111 (7)	110 (6)	101 (5)	100 (4)	011 (3)	010 (2)	001 (1)	000 (0)	rule
1-cell	-	-	-	-	$c_{1,3}$	$c_{1,2}$	$c_{1,1}$	$c_{1,0}$	R_1
2-cell	$c_{2,7}$	$c_{2,6}$	$c_{2,5}$	$c_{2,4}$	$c_{2,3}$	$c_{2,2}$	$c_{2,1}$	$c_{2,0}$	R_2
3-cell	$c_{3,7}$	$c_{3,6}$	$c_{3,5}$	$c_{3,4}$	$c_{3,3}$	$c_{3,2}$	$c_{3,1}$	$c_{3,0}$	R_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n -cell	-	$c_{n,6}$	-	$c_{n,4}$	-	$c_{n,2}$	-	$c_{n,0}$	R_n

<정의 3.1> 규칙이 $\langle R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$ 인 n 셀 CA의 RMT가 표 3과 같을 때 표 4를 n 셀 CA의 도달가능표라고 한다.

다음 정리는 도달가능표를 이용하여 규칙이 $\langle R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$ 인 n 셀 CA의 어떤 상태에 대한 다음 상태를 알 수 있고 모든 도달가능상태와 끝개를 식별할 수 있는 정리이다.

<정리 3.2> 규칙이 $\langle R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$ 인 n 셀 CA의 도달가능표에서 상태 $\mathbf{x}=(x_1x_2 \dots x_n)$ 에 대하여 \mathbf{x} 의 십진수를 k 라 하자. 상태 \mathbf{x} 의 다음 상태를 $\mathbf{y}=(y_1y_2 \dots y_n)$ 이라 할 때 각 y_i 는 다음과 같다.

표 4. 규칙이 $\langle R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$ 인 CA의 도달가능표
Table 4. Reachability table of CA with rule $\langle R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$

state	$2^n - 1$	\dots	$3 \cdot 2^{n-2}$	$3 \cdot 2^{n-1} - 1$	\dots	$2 \cdot 2^{n-1}$	$2 \cdot 2^{n-1} - 1$	\dots	2^{n-2}	$2^{n-2} - 1$	\dots	0				
1-cell	$c_{1,3}$			$c_{1,2}$			$c_{1,1}$			$c_{1,0}$						
2-cell	$c_{2,7}$	$c_{2,6}$	$c_{2,5}$	$c_{2,4}$	$c_{2,3}$	$c_{2,2}$	$c_{2,1}$	$c_{2,0}$								
3-cell	$c_{3,7}$	$c_{3,6}$	$c_{3,5}$	$c_{3,4}$	$c_{3,3}$	$c_{3,2}$	$c_{3,1}$	$c_{3,0}$	$c_{3,7}$	$c_{3,6}$	$c_{3,5}$	$c_{3,4}$	$c_{3,3}$	$c_{3,2}$	$c_{3,1}$	$c_{3,0}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n -cell	$c_{n,6}$	\dots	$c_{n,0}$	$c_{n,6}$	\dots	$c_{n,0}$	$c_{n,6}$	\dots	$c_{n,0}$	$c_{n,6}$	\dots	$c_{n,0}$	$c_{n,6}$	\dots	$c_{n,0}$	$c_{n,0}$

$$y_i = c_{i,j_i(k)}$$

$$\text{단, } j_i(k) = \begin{cases} \lfloor k/2^{n-i-1} \rfloor \bmod 8, & 1 \leq i \leq n-1 \\ \lfloor k \rfloor \bmod 8, & i = n \end{cases} \quad (1)$$

(증명) 상태 $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \dots x_n)$ 의 십진수 k 는 다음 식(2)와 같다.

$$k = x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + x_{n-1} \cdot 2 + x_n \quad (2)$$

$i = 1$ 에 대하여 $y_1 = c_{1,j_1(k)}$ 이고 $j_1(k) = \lfloor k/2^{n-2} \rfloor = x_1 \cdot 2 + x_2$ 이다. $(x_1 x_2)$ 는 (00), (01), (10), (11) 중 하나이고 첫 번째 전이규칙의 RMT에 대응한다. R_1 에 의해 각각 $c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}$ 이 결정되고 결정된 값이 y_1 이다.

$2 \leq i \leq n-1$ 일 경우 $i = 2$ 에 대하여 $y_2 = c_{2,j_2(k)}$ 이고 $j_2(k) = \lfloor k/2^{n-3} \rfloor = x_1 \cdot 2^2 + x_2 \cdot 2 + x_3$ 이므로 $j_2(k) = 2 \cdot j_1(k) + x_3$ 를 만족한다.

$i = 3$ 에 대하여 $y_3 = c_{3,j_3(k)}$ 이고 $j_3(k) = \lfloor k/2^{n-4} \rfloor = x_1 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_3 \cdot 2 + x_4 \equiv x_2 \cdot 2^2 + x_3 \cdot 2 + x_4 \pmod{8}$ 이므로 $j_3(k) = 2 \cdot j_2(k) + x_4$ 를 만족한다.

같은 방법으로 $y_{i+1} = c_{i+1,j_{i+1}(k)}$ 이고 $j_{i+1}(k) = 2 \cdot j_i(k) + x_{i+2}$ 이다.

$i = n$ 에 대하여 $x_{n+1} = 0$ 이므로 $c_{n,j_n(k)} \equiv 2 \cdot c_{n-1,j_{n-1}(k)} \pmod{8}$ 이다. \square

다음 따름정리는 도달가능표에서 주어진 상태에 대하여 다음 상태를 찾는 법과 도달가능상태와 끌개를 찾는 방법을 보여주는 정리이다.

<따름정리 3.3> 전이규칙이 $\langle R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$ 인 n 셀 CA의 도달가능표에서 상태 $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \dots x_n)$ 에 대하여 \mathbf{x} 의 십진수를 k 라 하자. 다음 상태 $\mathbf{y} = (y_1 y_2 \dots y_n)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(i) 상태 \mathbf{x} 의 다음 상태 \mathbf{y} 의 십진표현은 다음 식(3)과 같다.

$$NS(k) = c[1,k] \cdot 2^{n-1} + c[2,k] \cdot 2^{n-2} + \dots + c[n-1,k] \cdot 2 + c[n,k] \quad (3)$$

여기서 $c[i,k] (i = 1, \dots, n)$ 는 도달가능표에서 k 에 대응하는 각 행의 값이다.

(ii) (i)의 $NS(k)$ 들은 도달가능상태이다.

(iii) $k = NS(k)$ 이면 상태 \mathbf{x} 는 끌개이다.

표 5의 알고리즘은 본 논문에서 제안하는 도달가능표를 이용하여 다음 상태와 도달가능상태 그리고 끌개를 찾는 알고리즘이다.

표 5. 비선형 비그룹 CA의 도달가능 상태와 끌개를 찾는 알고리즘

Table 5. Algorithm for finding reachable states and attractors of nonlinear nongroup CA

Algorithm NEW REACHABLE TABLE

Input: n (CA size), Rule $[n], [8]$ (CA)

Output: next state of $k(NS(k))$,
reachable state, attractor

Step 1.

(i) for $i = 1$ to $n-1$

for $k = 0$ to $2^n - 1$

$$j_i(k) = \lfloor k/2^{n-i-1} \rfloor \bmod 8$$

$$c[i,k] = c_{i,j_i(k)}$$

(ii) for $i = n$

for $k = 0$ to $2^n - 1$

$$j_i(k) = \lfloor k \rfloor \bmod 8$$

$$c[n,k] = c_{n,j_n(k)}$$

Step 2. for $k = 0$ to $2^n - 1$

$$NS(k) = c[1,k] \cdot 2^{n-1} + c[2,k] \cdot 2^{n-2} + \dots + c[n-1,k] \cdot 2 + c[n,k]$$

Step 3. if $k = NS(k)$ then k is an attractor.

Step 4. Get rid of duplicate values of $NS(k)$

Step 5. The remaining states are reachable states.

<예제 3.4> 규칙이 $\langle 108, 201, 105, 76 \rangle$ 인 CA의 도달가능표는 그림 3과 같고 상태 $\mathbf{x} = (0000)$ 에 대하여 \mathbf{x} 의 십진수 k 는 0이다. 상태 \mathbf{x} 의 다음 상태가 $\mathbf{y} = (0110)$ 이므로 $NS(0) = 6$ 이고 같은 방법으로

$NS(1)=5, NS(2)=0, \dots, NS(15)=13$ 이다. 그러므로 모든 상태의 다음 상태를 알 수 있고 도달가능상태는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14 이고 끌개는 3, 6, 11, 14이다.

state(k)	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1-cell		1				1				0				0		
2-cell			1	1		0	0		1		0		0		0	1
3-cell	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
4-cell	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
next state $NS(k)$	13	14	15	12	11	8	9	10	5	6	3	0	3	0	5	6

그림 3. 규칙이 <108, 201, 105, 75>인 CA의 도달가능표

Fig. 3 Reachability table of CA with rule <108, 201, 105, 75>

IV. 결론

본 논문에서는 비선형 CA의 모든 도달가능상태와 끌개를 식별할 수 있는 방법을 제안하였다. 향후 연구에서는 제안한 방법을 이용하여 비선형 그룹 CA와 비선형 비그룹 CA의 생성방법을 연구하고자 한다.

References

[1] J. Von Neumann, *Theory of self-reproducing automata*. Urbana and London: University of Illinois Press, 1966. pp. 63-87.

[2] S. Chattopadhyay, S. Adhikari, S. Sengupta, and M. Pal, "Highly Regular, Modular, and Cascadable Design of Cellular Automata-Based Pattern Classifier," *IEEE Trans. on VLSI Systems*, vol. 8, no. 6, 2000, pp. 724-735.

[3] P. Maji, C. Shaw, N. Ganguly, B. K. Sikdar, and P. P. Chaudhuri, "Theory and application of cellular automata for pattern classification," *Fundamenta Informaticae*, vol. 58, 2003, pp. 321-354.

[4] Y. Hwang, S. Cho, and U. Choi, "Multiple Attractor CA Based Pattern Classifier," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 5, no. 3, 2010, pp. 315-320.

[5] Y. Hwang, U. Choi, and S. Cho, "D1-MACA based two-class Pattern Classifier," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 3, no. 4, 2008, pp. 254-259.

[6] S. Kwon, S. Cho, U. Choi, H. Kim, and N. Kim "Generation of Pattern Classifier using LFSRs," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 9, no. 6, 2014, pp. 673-679.

[7] S. Cho, H. Kim, U. Choi, S. Kim, J. Kim, S. Kwon, and G. Gong, "Generation of TPMACA for Pattern Classification," *Cellular Automata Lecture Notes in Computer Science* vol. 8751, 2014, pp. 408-416.

[8] S. Wolfram, "Theory and application of cellular automata(including selected papers 1983-1986)," World Scientific, *Advanced series on complex systems*, vol. 1. 1986, pp. 67-82.

[9] S. Cho, U. Choi, H. Kim, Y. Hwang, J. Kim, and S. Heo, "New synthesis of one-dimensional 90/150 linear hybrid group cellular automata," *IEEE Trans. Comput-Aided Design Integr. Circuits Syst.*, vol. 26, no. 9, 2007, pp. 1720-1724.

[10] S. Cho, U. Choi, H. Kim, Y. Hwang, and J. Kim, "Analysis of 90/150 Two Predecessor Nongroup Cellular Automata," *Cellular Automata Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5191, 2008, pp. 128-135.

[11] U. Choi, S. Cho, and J. Yim "Synthesis of 90/150 Uniform CA and Computation of Characteristic Polynomial corresponding to uniform CA," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 5, no. 1, 2010, pp. 10-16.

[12] S. Das, B. K. Sikdar and P. P. Chaudhuri, "Characterization of Reachable / Non-reachable Cellular Automata States," *Cellular Automata Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3305, 2004, pp. 813-822.

저자 소개



권숙희 (Sook-Hee Kwon)

1989년 경북대학교 조경학과 졸업
(농학사)
2011년 부경대학교 응용수학과 졸업
(이학석사)

2011년~현재 :부경대학교 응용수학과 박사과정
※ 관심분야 : 정보보호, 부호이론



김한두 (Han-Doo Kim)

1982년 고려대학교 수학과 졸업
(이학사)
1984년 고려대학교 대학원 수학과
졸업(이학석사)

1988년 고려대학교 대학원 수학과 졸업(이학박사)
1989년~현재 인제대학교 응용수학과 교수
※ 관심분야 : 전산수학, 셀룰라 오토마타론



조성진 (Sung-Jin Cho)

1979년 강원대학교 수학교육과 졸업
(이학사)
1981년 고려대학교 대학원 수학과
졸업(이학석사)

1988년 고려대학교 대학원 수학과 졸업(이학박사)
1988년~현재 부경대학교 응용수학과 교수
※ 관심분야 : 셀룰라 오토마타론, 정보보호



최연숙 (Un-Sook Choi)

1992년 성균관대학교 산업공학과
졸업 (공학사)
2000년 부경대학교 대학원 응용수
학과 졸업(이학석사)

2004년 부경대학교 대학원 응용수학과 졸업(이학박사)
2009년 부경대학교 대학원 정보보호학과 졸업(공학
박사)
2006년~현재 동명대학교 정보통신공학과 교수
※ 관심분야 : 셀룰라 오토마타론, 정보보호, 암호이론