대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 25 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 25, No. 3, 461 ~ 472. Aug 2015

# 평면도형의 넓이 지도 방법에 대한 고찰
## - 귀납적 방법 대 문제해결식 방법 -

강 문 봉* · 김 정 하**

새 교육과정에서는 평행사변형과 삼각형의 넓이 공식을 귀납 추론으로 지도한다. 귀납적 사고는 수학교육에서 매우 중요한 목표이다. 그러나 귀납적으로 도형의 넓이 공식을 추론하는 데는 많은 문제가 있다. 이론적으로 그리고 초등학교 5학년을 대상으로 한 조사를 통해 그러한 문제를 드러내고, 도형을 변형하는 문제해결 과정으로 넓이 공식을 지도하는 방법을 제안한다.

## Ⅰ. 서 론

2015년에 발간된 초등학교 5학년 1학기 수학 교과서에서는 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이를 귀납 추론을 통해 학습할 수 있도록 구성하였다(교육부, 2015a, p.287). 이것은 지금까지 도형의 넓이를 등적변형이나 배적변형 등 도형의 변형을 이용하여 지도해 왔던 것과 비교할 때 아주 새로운 시도가 아닐 수 없다.

귀납 추론은 매우 중요한 수학적 사고이다. Polya가 "증명하는 것을 배워야 하지만 추측하는 것도 배워야 한다"(Polya, p.vi)고 주장한 것은 귀납적 추론의 교육적 가치를 강조한 것이다. NCTM에서 1989년에 발간한 <규준>에서도 "수학적으로 추론"하는 것을 수학 학습의 목표 중의 하나로 강조하였다. 이와 같이 귀납 추론은 수학교육을 통해 지도되어야 할 중요한 사고의 하나이다. 그런 점에서 귀납 추론을 통해 수학을 지도하려는 시도는 매우 바람직해 보인다. 그럼에도 불구하고 귀납 추론의 결과가 항상 옳은 것은 아니라는 점에서, 그리고 초등학생들이 원하는 결과를 이끌어낼 수 있을 정도의 귀납 추론을 할 수 있을지는 의문스럽다는 점에서, 귀납 추론에 의한 지도는 매우 조심스럽게 계획되어야 할 것이다.

우리나라에서는 지금까지 도형의 넓이를 지도할 때 직사각형은 귀납 추론에 의해서, 평행사변형은 등적변형에 의해서, 삼각형은 일반적으로 배적변형에 의해서, 사다리꼴은 등적변형이나 배적변형에 의해서 넓이 공식을 유도하였다. 이러한 지도는 대부분 설명식으로 진행되었다. 그러나 도형의 변형에 의해 넓이 공식을 유도하는 방식은 조금만 신경을 쓰면 문제해결 수업으로 전환할 수 있고, 따라서 문제해결 수업이 가지는 장점을 얻을 수 있다.

동일한 수학 내용이라 하더라도 어떤 목적으로 지도하느냐에 따라 그 지도 방법은 달라질 수 있으며, 각각의 방법은 장단점을 가지고 있다. 그러므로 이 연구에서는 삼각형과 사각형(평행

* 경인교육대학교, mbkang@ginue.ac.kr (제1 저자)
** 인천삼산초등학교, seakjh@hanmail.net (교신저자)

사변형과 사다리꼴)의 넓이를 귀납적 방법에 의해 지도하는 것과 문제해결식 방법에 의해 지도하는 것을 비교 분석하여 보다 효율적인 지도 방법을 찾아보고 교과서 구성에 대한 제언을 하려고 한다. 이를 위해 도형의 넓이 지도와 관련한 선행연구와 교육과정을 분석하고 초등학생을 대상으로 한 조사를 통해 귀납적 방법의 문제점을 파악한 후 대안을 제시한다.

## Ⅱ. 선행연구 및 교육과정 분석

### 1. 선행연구 분석

이경화(2001)는 도형의 넓이 지도를 위한 아이디어를 제안하고 있는데, 직사각형의 넓이 공식은 귀납에 의해 공식화하고 Pick의 정리는 상위권 학생들을 위한 귀납 추론의 기회를 제공하기 위한 탐구과제로 제안하였다. 김상화, 방정숙, 정유경(2013)은 학생들이 평면도형의 넓이를 구하는 다양한 방법을 조사하였다. 평행사변형의 넓이를 구할 때 학생들은 등적변형(9개)과 반적변형을 많이 사용하였고, 삼각형의 넓이를 구할 때는 주로 배적변형을, 사다리꼴의 넓이를 구할 때는 분할(9개)과 반적변형(4개), 등적변형(3개), 배적변형(3개) 등을 사용하였음을 확인하였다. 박은률, 백석윤(2010)은 학생들이 평면도형의 넓이를 구할 때 나타나는 인식론적 장애의 원인을 파악하고 교정적 지도 방안을 제안하였다.

정경순, 임재훈(2011)은 평면도형의 넓이 공식을 학습한 초등학교 5학년 아동들이 이러한 넓이 공식에 내재된 관계들을 어떻게 이해하고 있는지를 조사하였으며, 김정하, 강문봉(2011)은 넓이 공식을 학습한 학생들이 도형을 실측하여 넓이를 구할 때 나타나는 오류에 대해 조사하였다. 김수미(2003)는 Wertheimer가 제기한, 쉽게 직사각형으로 변형하기 어려운 평행사변형의 구적 문제를 해결하기 위한 대안을 예비교사를 대상으로 찾아보는 연구를 하여, 예비교사들이 매우 다양한 방법으로 넓이를 구하였음을 보였다.

평면도형의 넓이와 관련한 이런 선행 연구들은 모두 넓이를 구해야 할 평면도형을 다른 도형으로 (등적, 배적, 반적) 변형하는 활동과 관련되어 있다.

귀납 추론과 관련하여 강문봉(1995)은 많은 사례로부터 공통 속성을 추출하는 귀납은 논리적으로도 심리적으로 타당하지 않고, 귀납이라고 하는 활동은 오히려 가설을 세우고 조사하는 추측과 반박의 과정이었음을 밝혔다. 이성근, 류희수(2012)는 초등학교 6학년 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 귀납적 추론이 이루어지고 있음을 관찰하였다. 그러나 귀납과 도형의 넓이를 관련짓는 선행 연구는 찾기 어려웠다.

### 2. 교육과정 분석

지금까지 우리나라에서 삼각형과 사각형의 넓이를 어떻게 지도해 왔는지를 살펴보기 위해 6차 교육과정부터 최근의 교육과정까지의 교과서를 살펴보자.

#### 가. 6차 교육과정

6차 교육과정에서는 4학년 2학기에서 직사각형과 삼각형의 넓이 공식을 다룬다. 삼각형의 넓이의 경우 다음과 같은 과정으로 지도한다. ① 모눈종이를 이용하여 넓이를 구한다. ② 직각삼각형의 넓이는 직사각형 넓이의 반이 된다는 사실을 보인다. ③ 삼각형은 두 개의 직각삼각형으로 나누어지며 앞의 사실을 이용하여 직사각형의 넓이의 반이 됨을 보인다. ④ 삼각형의 밑변과 높이를 정의한다. ⑤ 앞의 ③과 ④로부터 삼각형

의 넓이 공식을 이끌어낸다(교육부, 1996).

5학년 1학기에서는 평행사변형과 둔각삼각형, 사다리꼴의 넓이를 지도한다. 평행사변형의 밑변과 높이를 먼저 정의하고, 모눈종이를 이용하여 평행사변형과 직사각형의 넓이를 비교한 다음 평행사변형의 넓이 공식을 이끌어낸다. 그리고 평행사변형의 넓이를 이용하여 둔각삼각형의 넓이 공식도 이끌어낸다. 사다리꼴의 넓이 역시 5학년 1학기에서 지도한다. 먼저 사다리꼴의 밑변과 높이를 정의하고, 합동인 사다리꼴을 두 개 붙여서 평행사변형을 만들고 이것을 이용하여 사다리꼴의 넓이 공식을 이끌어낸다(교육부, 1997).

나. 7차 교육과정

1997년에 고시된 7차 교육과정에서는 5-가 단계에서 평행사변형의 넓이와 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 유도하고 5-나 단계에서 사다리꼴의 넓이 공식을 유도한다.

평행사변형의 넓이 공식을 유도하는 과정은 다음과 같다. 먼저 모눈종이를 이용하여 평행사변형의 넓이를 구한 다음, 평행사변형의 밑변과 높이를 약속한다. 이어서 평행사변형을 잘라 붙여서 직사각형을 만들고 이것을 이용하여 평행사변형의 넓이 공식을 이끌어내고 있다. 삼각형에서도 마찬가지 과정을 반복한다. 즉, 모눈종이를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한 다음, 삼각형의 밑변과 높이를 약속한다. 이어서 합동인 삼각형 두 개로 평행사변형을 만들고 이것을 이용하여 삼각형의 넓이 공식을 이끌어낸다(교육인적자원부, 2004a).

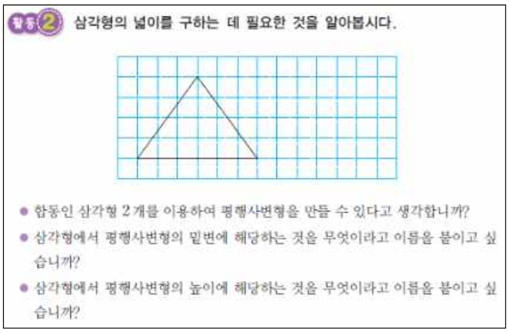
6차 교육과정과는 달리 삼각형보다 평행사변형의 넓이 공식을 먼저 다루는 이유는 평행사변형의 넓이를 이용하는 것이 삼각형의 넓이 공식을 유도하기 쉬워서일 것이다. 실제로, 6차에서 삼각형의 넓이 공식을 유도하기 위한 복잡한 과정이나 둔각삼각형의 넓이 공식을 이끌어내는 것이 7차에서는 매우 단순화되었다.

사다리꼴의 넓이 역시 삼각형의 넓이를 구하는 방법과 비슷하다. 먼저 모눈종이를 이용하여 사다리꼴의 넓이를 구한 다음, 사다리꼴의 밑변과 높이를 약속한다. 이어서 사다리꼴을 삼각형 두 개로 나누어서 넓이를 구해보게 하고 합동인 사다리꼴 두 개를 붙여서 평행사변형을 만든 다음 넓이를 구해보게 하고 이것을 이용하여 사다리꼴의 넓이 공식을 도출한다(교육인적자원부, 2004b).

다. 2007 개정 교육과정

2007 개정 교육과정에서도 7차 교육과정과 거의 동일한 방법으로 삼각형과 사각형의 넓이를 지도한다. 7차 교육과정에서는 5학년 1학기에 평행사변형과 삼각형의 넓이를 지도하고 5학년 2학기에 사다리꼴의 넓이를 지도하고 있지만, 2007 개정 교육과정에서는 5학년 1학기에 이 모든 내용을 지도하고 있다.

7차 교육과정에서와 미묘하지만 의미 있는 차이는 밑변과 높이에 대한 지도라고 할 수 있다. 7차 교육과정에서는 삼각형과 평행사변형, 사다리꼴의 밑변과 높이를 곧바로 정의하여 도입하고 있는 데 반해, 2007 개정 교육과정에서는 다음 [그림 II-1]과 같이 넓이를 구하는 데 필요한 요소로서 밑변과 높이의 필요성을 인식하게 하고 있다. 예를 들어, 삼각형의 경우 이미 알고 있는 평행사변형의 필요한 요소인 밑변과 높이에 해당되는 삼각형의 요소로서 밑변과 높이를 인식하게 하는 것이다. 이러한 점은 교육적으로 매우 의미 있는 부분이라 생각한다.




[그림 II-1] 교육과학기술부(2012), 수학 5-1, p.100

라. 2009 개정 교육과정

지금까지는 모두 도형의 (등적, 배적, 반적) 변형을 이용하여 삼각형과 사각형의 넓이 공식을 설명해 왔다. 그러나 2009 개정 교육과정에서는 이와는 완전히 다르게 귀납 추론을 통해 삼각형과 평행사변형의 넓이 공식을 유도한다. 사다리꼴의 넓이 공식은 복잡하기 때문에 귀납 추론을 통해 귀납하기가 어려워서인지 귀납 추론을 사용하지 않고 기존처럼 배적변형과 등적변형을 통해 넓이 공식을 이끌어낸다. 2009 개정 교육과정의 귀납 추론 방법은 III장에서 자세히 분석, 검토해 볼 것이다.

또한, 2007 개정 교육과정에서 연구자가 교육적 가치를 둘 수 있었던, 밑변과 높이 개념의 필요성에 대한 내용을 2009 개정 교육과정에서는 삭제해 버리고 밑변과 높이를 곧바로 도입한다.

## III. 귀납 추론에 의한 평면도형의 넓이 지도

### 1. 귀납 추론 방법에 대한 논의

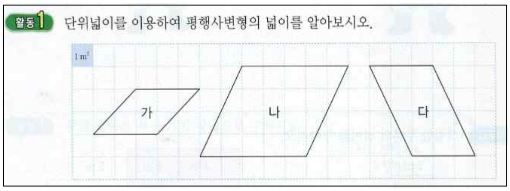
2009 개정 교육과정에 따라 2015년에 발간된 5학년 1학기 수학교과서(교육부, 2015c)에서는 평행사변형과 삼각형의 넓이 공식을 다음과 같은 귀납의 과정을 통해 추론하고 있다.

1) 모눈종이를 이용하여 몇 가지 도형에 대해 넓이를 구한다.
2) 평행사변형과 삼각형의 밑변과 높이를 정의한다.
3) 밑변과 높이 및 넓이에 대한 데이터를 살펴보고 넓이와 밑변, 높이 사이의 관계를 추론한다.
4) 귀납 추론한 결과를 도형의 등적 또는 배적 변형을 통해 확증한다.

교과서에 나타난 귀납 추론의 절차는 올바르다. 그러나 삼각형이나 사각형의 넓이 공식을 귀납적으로 추론할 때 몇 가지 문제점이 제기될 수 있다.

첫째, 간접측정의 필요성이 부각되지 않는 문제가 있다. 2학년에서 길이 단위를 지도하면서 표준단위를 도입하기 전에 임의단위를 사용하는 것이 불편하다는 점을 강조했던 것처럼(교육부, 2015b), 넓이 공식을 지도할 때도 공식의 필요성을 부각시킬 필요가 있다. 즉, 넓이를 직접 재기 어려운 경우가 많이 있다는 것을 알아차리게(이용률, 2010, p.204) 해야 한다. 간접측정의 필요성을 인식시키려면 직접측정, 즉 모눈종이를 이용하여 단위넓이가 몇 개인지를 세어보는 일이 어려운 상황을 제공해야 한다. 그러나 다음 [그림 III-1]에서 알 수 있는 것처럼 교과서의 활동에서 단위넓이의 개수를 알아보는 일은 그리 어렵지 않다. 귀납 추론을 하려면 도형의 넓이에 대한 데이터가 먼저 주어져야하기 때문에 쉽게 넓이를 구할 수 있는 도형과 상황을 제공할 수밖에 없다. 그렇게 하면서 간접측정의 필요성은 자연스럽게 소멸되게 된다. 모눈종이를 이용하면 넓이를 구할 수 있는데 굳이 공식을 찾아야 할 필요성을 느끼지도 않는데도 공식을 학습해야 하는, 학생 입장에서는 왜 배워야 하는지도 모르는

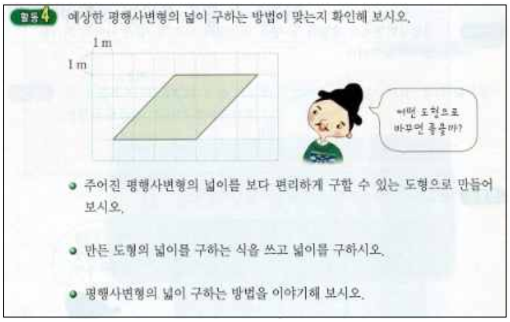
상태에서 수업이 진행되게 되는 것이다.




[그림 III-1] 교육부(2015c), 수학 5-1, p.142

둘째, 복잡한 공식은 귀납하기 어렵다는 문제가 있다. 직사각형의 넓이를 구하는 공식이나 평행사변형의 넓이를 구하는 공식은 가로와 세로 및 넓이 또는 밑변과 높이 및 넓이에 대한 자료가 주어지면 거의 자연스럽게 곱셈 관계임을 파악하게 된다. 그러나 사다리꼴의 넓이 공식은 귀납하는 것이 거의 불가능하다. 실제로 귀납 추론을 적용하는 교과서에서도 사다리꼴의 넓이 공식을 지도할 때 도형의 변형이라는 기존 방식을 채택하고 있다. 그렇다면 초등학교 5학년 학생들이 삼각형의 넓이 공식을 귀납할 수 있을지가 의문이다. 또한 삼각형의 넓이 공식을 귀납하기 위한 자료로 교과서에서 제시된 삼각형은 귀납하기 적절한 자료일지 의문이다. 이 두 가지 의문점에 대해서는 다음 절에서 조사 결과를 토대로 자세히 논의하려고 한다.

셋째, 개연적 사고라는 귀납의 본질적인 한계로서, 귀납적 추론을 한 결과가 참이라는 것을 보장하지는 못한다는 문제가 있다(조용현, 1992, p.33; 강문봉, 1995). 그러므로 귀납 추론을 하여 어떤 것을 얻었으면 그것이 참인지를 연역적 방법을 통해 입증해야 한다. 그러나 초등학교에서는 연역적 추론이 그리 쉽지는 않다. 따라서 초등학교 수준에서는 잘못된 결과가 추론되지 않도록 충분한 자료를 제시하거나 혹은 귀납 그 자체로 만족할 수 있다. 그렇기는 하지만 넓이 공식을 그런 상태로 두기에는 뭔가 부족해 보인다. 그래서인지, 교과서에서도 귀납 추론의 결과를 보증하기 위해 평행사변형의 경우 다음 [그림 III-2]처럼 도형의 변형 활동을 추가적으로 하고 있으며, 삼각형의 경우에도 두 개의 삼각형으로 평행사변형을 만들어보거나 색종이를 접어서 등적인 직사각형으로 만들어보는 활동을 추가하고 있다. 결국 이렇게 되면 과거의 교과서에서 귀납 추론을 하는 부분만 더 추가된 셈이 되며, 귀납 추론을 추가한 의도가 무엇인지가 궁금해지게 된다.




[그림 III-2] 교육부(2015c), 수학 5-1, p.144

넷째, 넓이 공식을 추론하기 위해 높이와 밑변의 개념이 '갑자기' 등장한다는 문제가 있다. 평행사변형이나 삼각형의 넓이를 모눈종이를 이용하여 구한 다음 곧바로 밑변과 높이를 정의하고 있다(교육부, 2015c, p.143, p.147). 왜 이런 용어가 필요한지는 그 다음 과정을 계속 살펴봐야만 알게 된다. 이러한 흐름은 그 동안 수학교육의 문제점으로 꾸준히 지적되어 온 연역적 전개이다.

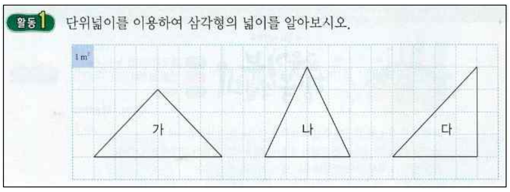
다섯째, 단위넓이를 개수를 세어 도형의 넓이를 구한 다음 표에서 넓이 공식을 귀납함으로써, 도형의 넓이 공식을 관계적으로 이해하기보다 도구적으로 이해할 가능성이 높아졌다. 이와 더불어 또 하나의 문제점으로, 복잡한 도형의 넓이를 구할 수 있는 능력이 형성되는가 하는 문제가 제기된다. 일반적인 사각형의 넓이나 복합도형의

넓이를 어떻게 구할 것인지는 이런 귀납 추론에 의한 학습에서는 지도될 수가 없기 때문이다.

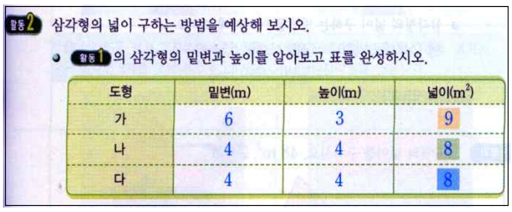
## 2. 조사 분석

앞 절에서 연구자는 ① 초등학교 5학년 학생들이 삼각형의 넓이 공식을 귀납할 수 있을지, 그리고 ② 교과서에서 삼각형의 넓이 공식을 귀납하기 위한 자료로 주어진 삼각형은 귀납하기 적절한 자료일지에 대하여 의문을 제기하였다. 이제 이 문제에 대해 살펴보자.

교과서에서는 다음 [그림 III-3]과 [그림 III-4]와 같이 모눈종이를 이용하여 3개의 삼각형의 넓이를 구하고, 표를 이용하여 삼각형의 넓이 공식을 귀납하도록 하고 있다.




[그림 III-3] 교육부(2015c), 수학 5-1, p.146




| 도형 | 밑변(m) | 높이(m) | 넓이(m²) |
|---|---|---|---|
| 가 | 6 | 3 | 9 |
| 나 | 4 | 4 | 8 |
| 다 | 4 | 4 | 8 |

[그림 III-4] 교육부(2015a), 교사용지도서 수학 5-1, p.299

그런데 [그림 III-4]의 <활동 2>에 있는 표는 삼각형의 넓이 공식을 귀납하기에는 부적절하다. 이것을 확인하기 위해 연구자는 교육대학의 3학년 예비교사 33명에게 다음 <표 III-1>을 주고 가, 나, 다 사이의 관계를 생각해 보게 하였다. 대부분의 학생들은 "가와 나의 합이 다이다." 또는 "다에서 가를 빼면 나이다."와 같은 덧셈적 관계를 제시하였다.[1)] 오직 한 학생만이 "가와 나를 곱하고 2로 나누면 다이다."와 같은 넓이 관계를 추론을 추가하였다.

<표 III-1> 관계표 1

| 가 | 나 | 다 |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 8 |
| 6 | 3 | 9 |

<표 III-2> 관계표 2

| 밑변 | 높이 | 넓이 |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 8 |
| 6 | 3 | 9 |

연구자는 이어서 <표 III-2>를 제시하였다. 이 표는 방금 제시했던 <표 III-1>에서 '가', '나', '다'라는 항목을 각각 '밑변', '높이', '넓이'로 바꾸기만 한 것이다. 그리고 밑변과 높이, 넓이 사이의 관계를 말해보게 하였다. 대부분의 학생들이 "(밑변)×(높이)÷2=(넓이)"와 같은 공식을 말하였다. 연구자는 그들에게 앞의 표를 다시 제공하며 "똑같은 수치인데 여기서는 왜 그런 관계를 생각하지 않았느냐?"고 물었을 때 학생들은 매우 놀라워했다. 이러한 현상은 예비교사들이 교과서의 표를 볼 때, 귀납하지 않고 그들이 이미 알고 있는 삼각형의 넓이 공식을 말하게 된다는 것을 의미한다. 즉, 이 자료가 삼각형의 넓이와 관련한 자료라는 것을 알고 있다면 이 자료에서 제공하는 수치와 무관하게 삼각형의 넓이 공식을 언급하지만, 삼각형의 넓이라는 정보가 없을

1) 이하에서는 A+B=C, A=C-B와 같은 식을 덧셈적 관계, A×B÷2=C 또는 (밑변)×(높이)÷2=(넓이)와 같은 식을 넓이 관계라고 부른다.

때는 덧셈적 관계를 추론한다는 것이다. 이러한 현상은 초등학교 학생들도 마찬가지이다.

연구자는 귀납 추론을 통해 삼각형의 넓이 공식을 지도하는 교과서로 이 부분을 이미 학습한 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 2015년 7월 초에 예비교사들에게 질문했던 것과 비슷한 질문을 던졌다. 이 학교는 보통 수준으로 평가되는 인천의 A 초등학교이며, 이 학교의 5학년 148명 전원을 대상으로 한 조사이다.

이름 ____________________

※ 다음 표를 보고 **가와 나, 다** 사이에 어떤 관계가 있는지를 쓰시오. 생각나는 모든 관계를 써도 됩니다.

| 가 | 나 | 다 |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 8 |
| 6 | 3 | 9 |

생각한 관계

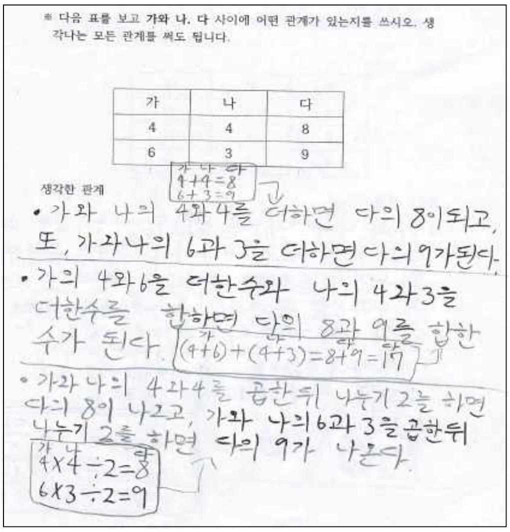
[그림 III-5] 학습지 1

[그림 III-5]의 학습지를 보고 학생들이 귀납해 낸 결과는 다음 <표 III-3>과 같다.

<표 III-3> 학습지 1의 결과

| 관계 | 학생 수(%) |
|---|---|
| 덧셈적 관계 | 83(56) |
| 넓이 관계 | 16(11) |
| 덧셈적 관계와 넓이 관계 | 9(6) |
| 기타(위의 두 관계 외) | 40(27) |

교과서에서 제시한 자료를 가지고 삼각형의 넓이 공식을 귀납한 학생은 17%에 불과하며, 덧셈적 관계를 귀납한 학생이 62%가 된다. 이 중에서 [그림 III-6]의 학생 B와 같이 덧셈적 관계와 넓이 공식을 모두 귀납한 학생은 9명(6%)이다.


※ 다음 표를 보고 **가와 나, 다** 사이에 어떤 관계가 있는지를 쓰시오. 생각나는 모든 관계를 써도 됩니다.

| 가 | 나 | 다 |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 8 |
| 6 | 3 | 9 |

생각한 관계

가 나 다
4+4=8
6+3=9

• 가와 나의 4와4를 더하면 다의 8이되고, 또, 가와나의 6과 3을 더하면 다의 9가된다.

• 가의 4와6을 더한수와 나의 4와3을 더한수를 합하면 다의 8과 9를 합한 수가 된다. (4+6)+(4+3)=8+9=17

• 가와 나의 4와4를 곱한뒤 나누기 2를 하면 다의 8이 나오고, 가와 나의6과 3을곱한뒤 나누기 2를 하면 다의 9가 나온다.

가 나
4×4÷2=8
6×3÷2=9

[그림 III-6] 학습지 1에 대한 학생 B의 반응

이러한 결과는 귀납적 추론을 통해 삼각형의 넓이를 지도하려는 시도는 교과서의 적절치 않은 사례로 인해 실패할 수밖에 없다는 것을 의미한다. 사실 교과서에서 제시한 삼각형은 매우 특수한 경우이며, 밑변과 높이가 모두 자연수이면서 이와 같이 덧셈적 관계가 있는 경우는 교과서에서 제시된 것이 전부이다. 왜 이런 특수한 삼각형을 제시했는지 이해할 수 없다.

그렇다면 덧셈적 관계가 아닌 넓이 관계를 귀납할 수 있는 다른 사례를 제공하였을 때 초등학교 5학년 학생들은 삼각형의 넓이 공식을 귀납할 수 있을까? 이러한 의문점을 확인하기 위해 동일한 학생들에게 다음 [그림 III-7]의 학습지를 주고 관계를 파악하게 하였다.

이름 ____________________

※ 다음 표를 보고 **가와 나, 다** 사이에 어떤 관계가 있는지를 쓰시오. 생각나는 모든 관계를 써도 됩니다.

| 가 | 나 | 다 |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 10 |
| 6 | 4 | 12 |
| 4 | 8 | 16 |

생각한 관계

[그림 III-7] 학습지 2

[그림 III-7]의 학습지를 보고 학생들이 귀납해 낸 결과는 다음 <표 III-4>와 같다.

<표 III-4> 학습지 2의 결과

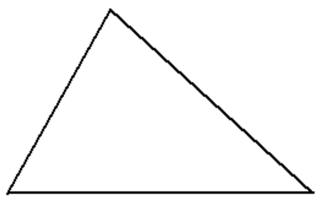
| | 학생 수(%) |
|---|---|
| 넓이 관계 | 52(35) |
| 기타 | 96(65) |

이 경우 35%의 학생이 삼각형의 넓이 공식을 귀납하고 있음을 알 수 있다. 이 학생들은 이미 삼각형의 넓이 공식을 학습하였기 때문에 사전 경험이 어느 정도 영향을 미쳤을 것이라고 본다면 위와 같이 귀납할 수 있는 학생들은 실제로는 35%에 미치지 못한다고 봐야 할 것이다. 그럼에도 불구하고, 넓이 공식을 제대로 귀납할 수 있는 자료를 제공하면 넓이 공식을 귀납할 수 있는 비율이 17%에서 35%까지 높아질 수 있음을 알 수 있다. 또한 쉽지는 않지만 보통 수준의 초등학교 5학년 학생들이 35% 정도까지는 삼각형의 넓이 공식을 귀납할 수 있음을 알 수 있다.

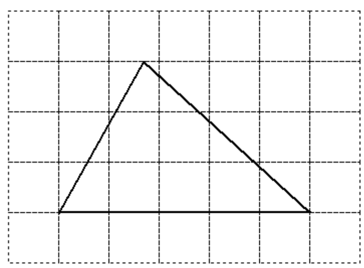
한편, 학습지 1에서 덧셈적 관계든 넓이 관계든 아무 것도 찾아내지 못한 학생들은 학습지 2에서도 아무 관계를 찾아내지 못했다. 학습지 1에서 덧셈적 관계를 찾은 학생 중에서 53명은 학습지 2에서 곱셈적 관계를 찾지 못했다. 이것은 초등학교 5학년 학생들이 곱셈과 나눗셈이라는 두 가지 연산이 동시에 포함된 규칙을 찾아내기에는 무리라는 것을 나타낸다고 보인다.

## Ⅳ. 문제해결 방법에 의한 평면도형의 넓이 지도

귀납적 추론이 아닌 문제해결 방식에 의해 도형의 넓이를 구하는 방법을 살펴보자. 문제해결 수업은 '문제', 즉 어떤 장애에 직면하는 것으로 시작한다. 그러므로 도형의 넓이를 문제해결 방법으로 지도하기 위해서는 도형의 넓이를 구하는 문제를 진정한 '문제'로 인식시키는 일이 중요하다. 사실, 직사각형의 넓이만을 구할 수 있는 학생에게 평행사변형이나 삼각형의 넓이를 구하는 것은 '문제'가 아닐 수 없다. 문제성을 좀 더 강화하기 위해서 모눈종이로 쉽게 구할 수 없는 상황을 제공할 수 있다. 예를 들어 삼각형의 넓이 공식을 지도할 때 다음 [그림 IV-1]과 같이 모눈종이 없이 삼각형만을 제공하거나 [그림 IV-2]와 같이 모눈종이를 사용하더라도 단위 넓이의 개수를 쉽게 세기 어려운 상황을 제공한다. 평행사변형의 넓이 공식을 지도할 때도 비슷한 상황을 마련해줄 수 있다.



[그림 IV-1] 삼각형



[그림 IV-2] 모눈종이와 삼각형

이렇게 되면 직접측정이 어렵고 다른 대안, 즉 간접측정의 필요성이 부각되게 된다. 학생이 현재 가지고 있는 수단인 직접측정이 어려운 문제 상황에서 학생들은 문제해결을 위한 Polya의 여러 발문과 권고 중에서 "미지인 것이 같은 문제를 생각해 보아라."라는 권고를 떠올려야 한다.

즉, '넓이'를 구하는 문제를 생각해야 하고, 그래서 교사는 학생들에게 "여러분이 넓이를 구할 수 있는 도형은 어떤 것이 있나요?"와 같은 발문을 할 수 있고, 학생들의 답변에 따라 이 삼각형을 "그런(직사각형이나 평행사변형) 도형으로 변형해 보도록" 권고하게 된다. 이것은 일종의 우회 전략인 것이다. 이렇게 해서 도형의 등적변형, 배적변형, 반적변형이 일어나게 된다.

등적변형이나 배적 또는 반적 변형을 통한 지금까지의 넓이 지도는 도형의 변형을 설명식으로 제공하는 것이었다. 문제해결식 방법은 도형의 변형을 직접 설명하는 것이 아니라, '문제'를 통해 그리고 교사의 적절한 발문과 권고를 통해, 주어진 도형을 자신이 넓이를 구할 수 있는 도형으로 변형하려는 마음을 가지게 하는 것이다.

이렇게 해서 학생은 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있게 된다. 그러나 수업의 목표는 주어진 도형 그 자체의 넓이가 아니라 그러한 도형의 넓이를 구하는 공식을 찾아내는 것이다. 그러므로 교사는 여기서 더 나아가서, 이러한 문제를 해결한 활동을 반성해서 도형의 넓이를 구하는 공식을 이끌어내게 된다. 학생의 활동과 수업 목표인 수학적 내용과의 이러한 연결을 만드는 것은 교사의 중요한 몫이며 수업의 성패를 결정짓는 부분이 된다. 이 과정에서 비로소 밑변과 높이 개념이 정의될 수 있다. '갑자기' 밑변과 높이라는 개념과 용어를 등장시키는 것이 아니라 넓이를 구하는 과정에서 꼭 필요한 요소로 인식이 된 다음에 그 필요한 요소에 적절한 용어를 사용하게 되는 것이다.

이러한 문제해결식 방법은 물론 결코 새로운 것은 아니다. 2007 개정 교육과정까지 사각형의 넓이 공식은 모두 도형의 변형을 통해 지도해 왔다. 문제해결식 수업은 그러한 방법을 약간 보강하여, 직접측정이 어려워서 다른 대안을 찾아보아야겠다는 생각을 좀더 강화하기 위해 문제 상황을 좀더 '문제'답게 제시하고, 학생들 자신이 넓이를 구할 줄 아는 도형으로 주어진 도형을 변형해야겠다는 아이디어를 생각할 수 있도록 적절한 발문과 권고를 제공하는 것이다.

이러한 보강을 통해 문제해결식 수업은 다음과 같은 장점을 가지게 된다. 첫째, 간접측정의 필요성이 부각된다. 직접측정으로는 어려운 '문제'를 해결하기 위해 다른 대안인 간접측정의 필요성을 인식하게 되는 것이다. 둘째, 문제를 해결하는 능력이 신장된다. 문제해결은 특정한 단원이나 특정한 페이지에서 지도되는 것이 아니라 수학 내용을 학습하면서 문제의 해결이 동시에 이루어질 때 문제해결 능력이 더욱 신장될 수 있다. 셋째, 도형 변형 능력이 신장된다. 등적변형이든 반적변형이든 특정한 목표 없이 변형하는 것이 아니라 자신이 넓이를 구할 수 있는 도형으로 변형하는 노력을 함으로써 도형 변형의 의미를 찾게 되고 도형 변형 능력도 신장되게 된다. 이렇게 되면 귀납 추론에서는 가능하지 않았던 복합도형의 넓이를 구할 수 있는 능력도 따라서 향상될 것이다. 복합도형을 자신이 넓이를 구할 수 있는 도형으로 변형하면 되기 때문이다. 넷째, 도형의 어느 부분을 측정해야 하는지를 알게 된다. 많은 넓이 공식을 배우고도 변의 길이를 주지 않고 실측해서 넓이를 구하는 경우에 밑변과 높이를 제대로 측정하지 않고 엉뚱한 변의 길이를 측정하는 경우가 많다(강문봉, 김정하, 2011). 도형을 변형해서 넓이를 구해보는 경험을 통해 이러한 오류가 많이 해소될 수 있다. 다섯째, 실측해야 하는 곳을 알게 되면서 자연스럽게 높이와 밑변의 개념이 등장할 필요성이 나타난다.

물론, 평행사변형을 직사각형으로 등적변형하거나 삼각형을 등적 또는 배적 변형하고 사다리꼴을 등적 또는 배적변형할 수 있는 학생이 어느 정도인지는 확인되지 않았다. 어쩌면 삼각형

의 넓이 공식을 귀납할 수 있는 비율인 35%보다도 더 적을 수 있다. 그러나 귀납 추론에 의하더라도 귀납의 결과를 확신하기 위해서는 결국 도형의 변형 과정을 통해야 한다. 왜 도형을 변형해야 하는지 그리고 어떤 도형으로 변형해야 하는지는 귀납 추론이 아니라 문제해결식 수업을 통해서 깨닫게 된다. 그러므로 귀납추론보다 문제해결식 수업에서 얻을 수 있는 교육적 가치가 보다 많다고 보여지며, 따라서 도형의 넓이 공식은 귀납 추론에 의한 것보다 문제해결식 방법이 더 바람직한 것으로 생각된다.

## Ⅴ. 마무리

2015년부터 시작되는 5학년 1학기 새 교과서는 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 공식을 귀납 추론을 통해 학습하도록 구성하였다. 귀납적 사고는 수학교육에서 매우 중요한 사고이기는 하지만 귀납적으로 도형의 넓이 공식을 추론하는 데는 많은 문제가 있다.

평행사변형의 넓이 공식을 귀납적으로 추론하는 것은 어려움이 없다. 그러나 삼각형의 경우는 그렇지 않다. 삼각형의 넓이 공식을 귀납하기 위해 교과서에서 제시한 자료는 넓이 관계를 귀납하기보다는 덧셈적 관계를 귀납하게 되는 잘못된 자료이다. 연구자가 조사한 바에 의하면, 넓이 관계를 귀납하도록 자료를 재구성한다 하더라도 보통 수준의 초등학교 5학년 학생들 중 35% 정도만이 넓이 관계를 귀납한다.

또한 귀납 추론을 통해 평면도형의 넓이 공식을 지도할 때 제기될 수 있는 문제는 다음과 같다. 첫째, 간접측정의 필요성이 부각되지 않는다. 둘째, 삼각형이나 사다리꼴같이 복잡한 공식은 귀납하기 어렵다. 셋째, 귀납적 추론을 한 결과가 참이라는 것을 보장하지는 못한다. 넷째, 높이와 밑변의 개념이 ‘갑자기’ 등장한다. 다섯째, 도형의 넓이 공식을 관계적으로 이해하기보다 도구적으로 이해할 가능성이 높다. 여섯째, 복잡한 도형의 넓이를 구할 수 있는 능력을 기르기 어렵다.

전통적으로 우리나라에서는 평면도형의 넓이를 등적변형이나 배적변형과 같은 도형의 변형을 통해 지도해 왔고, 이와 관련된 연구들이 많이 있다. 연구자는 평면도형의 넓이 공식을 지도할 때 이와 같은 도형의 변형 활동을 문제해결과 관련하여 지도하는 방법을 제안한다. 초등학교 5학년 학생들이 어느 정도로 도형을 변형할 수 있는지는 알지 못하지만, 도형을 변형하는 문제해결 수업은 귀납 추론이 안고 있는 여러 문제를 해결해줄 수 있을 뿐만 아니라 학생들이 학습하지 않은, 넓이 공식이 존재하지 않은 새롭고 복잡한 도형에서도 그러한 도형을 자신이 넓이를 구할 수 있는 도형으로 변형함으로써 넓이를 구할 수 있는, 매우 발전 가능성이 높은 지도 방법이라고 생각한다.

## 참고문헌


강문봉(1995). 귀납적인 교수 방법의 재고, **대한수학교육학회 논문집 5권 1호**, 65-72.

교육과학기술부(2012). **수학 5-1**. 두산동아.

교육부(1996). **초등학교 교사용지도서 수학 4-2**. 국정교과서주식회사.

교육부(1997). **초등학교 교사용지도서 수학 5-1**. 국정교과서주식회사.

교육부(2015a). **교사용지도서 수학 5-1**. 천재교육.

교육부(2015b). **수학 2-1**. 천재교육.

교육부(2015c). **수학 5-1**. 천재교육

교육인적자원부(2004a). **수학 5-가**. 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2004b). **수학 5-나**. 대한교과서 주식회사.

김상화, 방정숙, 정유경(2013). 평면도형의 넓이 수업에서 학생들의 다양한 해결 방법에 근거한 교사의 형식화 도출 과정 분석, 대한수학교육학회지 **학교수학 15권 4호**, 847-866.

김수미(2003). Wertheimer의 평행사변형 구적 문제와 대안적 지도 방안, **대한수학교육학회지 수학교육학연구 13권 4호**, 485-493.

김정하, 강문봉(2011). 평면도형의 넓이 측정 지도에 대한 고찰, **한국초등수학교육학회지 15(3)**, 509-531.

박은률, 백석윤(2010). **평면도형의 넓이 학습에서 나타나는 인식론적 장애, 대한수학교육학회지 수학교육학연구 20권 3호**, 305-322.

이경화(2001). 다각형의 둘레와 넓이에 관한 수업 아이디어, **대한수학교육학회지 학교수학 3권 2호**, 423-445.

이성근, 류희수(2012). 귀납적 추론의 과정 분석, **대한수학교육학회지 학교수학 14권 1호**, 85-107.

이용률(2010). **초등학교 수학의 중요한 지도내용**. 경문사.

정경순, 임재훈(2011). 직사각형, 평행사변형, 삼각형 넓이 공식에 내재된 관계에 대한 초등 학생들의 이해 조사, **대한수학교육학회지 수학교육학연구 21권 2호**, 181-199.

조용현(1992). **칼 포퍼의 과학철학**. 서광사.

NCTM(1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM, Inc.

Polya, G.(1973). *Induction and analogy in mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

# A Study on Teaching Method of Area Formulas in Plane Figures
## - Inductive Reasoning vs. Problem Solving -

Kang, Moonbong (Gyeongin National University of Education)
Kim, Jeongha (Samsan Elementary School)

Korean students are taught area formulas of parallelogram and triangle by inductive reasoning in current curriculum. Inductive thinking is a crucial goal in mathematics education. There are, however, many problems to understand area formula inductively. In this study, those problems are illuminated theoretically and investigated in the class of 5th graders. One way to teach area formulas is suggested by means of process of problem solving with transforming figures.

* Key Words : text(교과서), area formula(넓이 공식), triangle(삼각형), parallelogram(평행사변형), inductive reasoning(귀납 추론), problem solving(문제해결)

논문접수 : 2015. 7. 17
논문수정 : 2015. 8. 8
심사완료 : 2015. 8. 11