대한수학교육학회지 <학교수학> 제 17 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 17, No. 3, 447 ~ 467. Sep 2015

호의 측도로 도(Degree)와 라디안 이해하기

최 은 아* · 강 향 임**

본 연구의 목적은 도(degree)와 라디안을 호의 측도로 해석하는 것이 라디안과 각의 측정에 대한 개념적 이해에 어떠한 영향을 미치는지 살펴보는 것이다. 이에 호의 길이를 이용한 각의 측도에 대한 내용지식을 26명의 예비중등교사를 대상으로 조사하였으며, 그 결과를 반영하여 두 명의 중학생들을 대상으로 실험을 진행하였다. 예비교사들과 두 중학생의 반응을 분석한 결과, 도(degree)의 개념을 호의 측도로 해석한 경험이 라디안의 이해에 긍정적인 영향을 미쳤으며, 호의 측도로 각의 측도를 파악하는 과정이 '선형 측정'에 대한 개념적 이해를 가능하게 하였다. 또한 각에 관한 다양한 문제에서 원의 맥락과 호의 등분 전략이 효과적인 문제해결전략으로 작용하였으며, 각과 호의 측도 사이의 관계를 탐구할 수 있는 직접적인 조작활동을 제공하는 것이 각의 측정 개념에 대한 이해에 도움을 줄 수 있다는 것을 확인하였다.

Ⅰ. 서 론

오랜 시간에 걸쳐 다양하게 정의되어 온 각의 개념은 직선의 쌍, 영역, 회전이라는 다양한 측면을 가지고 있으며, 그 중에서도 '회전한 양'이라는 속성은 모든 각이 측정 가능함을 의미한다. 현재 학교수학에서 각은 '한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형'으로 정의되며, 각의 크기를 의미하는 각도에 대해 교사용 지도서 <4-1>은 '두 변이 벌어진 정도이며, 두 반직선 사이의 회전량으로 결정된다'로 기술하고(교육부, 2014), 중1 교과서는 '각의 한 변이 다른 한 변까지 회전한 양'으로 설명한다(김원경외, 2013). 학교수학에서 다루는 각도의 단위인 직각, 도(°), 라디안은 각의 꼭짓점을 중심으로 한 회전량으로 도입 또는 설명되고 있으며, 이는 곧 각의 동적인 측면과 관련된다.

그러나 각의 회전한 양을 구체적으로 어떻게 측정할 것인가에 대한 언급은 부족한 실정이다. 현재 초등 수학교과서는 이에 대한 언급 없이 각도기를 도입한다. 각의 측정에 대한 학습이 각도기라는 측정도구를 사용하는 방법만을 학습하는 것이 아니라 측정의 원리를 이해하는 것을 의미한다고 할 때, 각의 측정과정에서 Stephan & Clements(2003)이 제시한 선형 측정의 기본 개념인 분할과 단위반복 등을 발견하는 경험은 중요하다. 또한 Krainer(1993)가 '두 반직선 사이에 놓인 평면의 일부분으로서의 각'을 '호를 가진 각'으로 분류한 것은 원의 중심이 각의 꼭짓점이고, 두 반지름이 각의 두 변인 임의의 각의 크기에 원주위의 호의 길이를 대응시켰기 때문이다. 회전량이 호의 측도에 의해서 측정가능하다는 아이디어는 역사적 분석을 통해 확인할 수 있다. 그리스 천문학에서 천체 간 거리는 중심각 대신에 호의 길이로 측정되었으며, 호의 길이 또한 반지름의

* 전주온고을중학교, silverah90@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교 강사, hikang2002@hanmail.net (교신저자)

길이와 현의 길이의 비율이 일정하다는 것을 이용하였다(유재근, 2014). 역사적으로 각도는 어떤 원에서의 호의 길이와 원 안에 들어있는 중심에서의 각이라는 두 개의 거의 유사한 양의 측정에서 발전되었지만, 호의 길이에 의해 각도를 해석하는 것이 역동적이거나 정적으로 원의 중심각을 해석하는 것보다 먼저 나왔다고 볼 수 있다(이종희, 2001).

각의 측도는 각이 가지고 있는 '양'이라는 내적 성질의 크기를 결정하는 것이기 때문에 어떤 양을 측정할 것인가가 관건이 된다. 만약 각에 대응하는 호의 길이로 각의 크기를 결정한다고 한다면, 각의 측정 단위인 1직각, 1도(°) 와 1라디안은 각각 원주를 4등분, 360등분, 2π등분한 호의 길이에 대응하는 각의 크기에 해당한다. 이는 학교수학에서 다루는 각의 측도 모두 호의 측도로 도입될 수 있음을 의미한다. 그러나 현재 학교수학에서는 호의 길이에 의한 각의 크기의 측정을 라디안에 한정하여 언급하고 있으며, 도(°)의 경우에는 호의 측도와의 관련성이 거의 드러나지 않고 있다. 따라서 라디안뿐 아니라 도(°)를 단위로 하는 각의 크기에 대해 호의 측도에 의한 해석가능성을 탐색하는 것은 각의 측정에 대한 새로운 시각을 제공한다는 점에서 의미가 있다.

지금까지 도(°)와 라디안 단위를 도입하기 위해 각의 크기를 호의 측도를 이용하여 양화하는 것을 구체적 사례를 통해 살펴본 연구는 Moore(2013) 이외에는 찾아보기 힘들다. Moore는 precalculus 과정의 대학생을 대상으로 한 교수실험에서 각의 크기를 호의 측도를 이용하여 양화하는 것이야말로 도(°)와 라디안을 일관성 있게 이해하는 방안임을 확인하였으며, 각의 측정에 있어 호의 길이와 반지름, 원주사이의 양적 추론을 강조한 바 있다. 그러나 대학생을 대상으로 실험을 진행했던 Moore는 중등학생들의 양적 추론에 대한 추가적인 통찰의 가능성을 후속연구로 제안한 바 있다. 이에 본 연구는 호의 측도에 의한 각의 측도라는 도(°)와 라디안의 동일한 속성에 주목하여, 도(°)와 라디안을 호의 측도로 이해하는 것이 중등학생들의 라디안과 각의 측정에 대한 개념적 이해에 어떠한 영향을 미치는지 살펴보고자 한다. 본 연구에서는 호의 길이를 이용한 각의 측도에 대한 예비교사들의 내용지식을 살펴보고, 그 결과를 반영한 실험을 통해 중학생들이 호의 측도로서 도(°)와 라디안을 이해하고 이들 사이의 관계를 알아가는 과정을 분석함으로써 도(°)와 라디안을 연속적으로 지도하고 각의 측정에 대한 개념적 이해를 도울 수 있는 교수학적 방안을 논할 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 각의 의미

Hilbert(1902)는 반직선을 '직선 위의 한 점의 한쪽에 있는 모든 점'으로 정의한 후, 각을 '한 점으로부터 시작되는 두 반직선의 쌍'으로 정의하였다. Hilbert의 정의는 각을 '점들의 집합'으로 인식하게 되었음을 의미하며, 현재 전 세계의 학교에서 가르치고 배우는 각의 정의가 되었다 (Yeshurun, 1982). 우리나라 초등학교 교과서 또한 각을 '한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형'으로 정의한다(교육부, 2013a). 그러나 각의 개념은 오랜 시간에 걸쳐 다양하게 정의되고 분류되어 왔다. 유클리드는 각을 '평면 위에서 서로 만나지만, 일직선 위에 있지 않는 두 직선의 기울어진 정도'로 정의하였으며(Heath, 1998), 그리스 학자들은 아리스토텔레스의 구분에 따라 양, 질, 관계라는 각의 다양한 개념을 파악하였다. 양은 크기와 관련되는 것으로 두 각의 상등을 가능하게 하며, 질은 구부러진 정도를 비롯한 형태와 관련

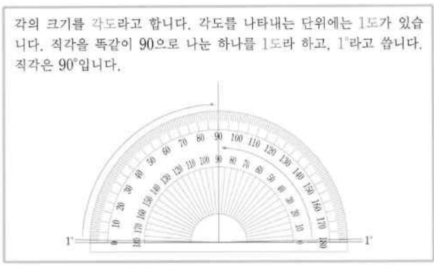
되고, 관계는 두 반직선과 같은 각의 요소 사이의 관계를 의미한다(Shreves, 1969). 19세기말, Schotten은 각의 개념을 두 직선의 방향의 차, 한 직선을 다른 직선으로 옮기는 데 필요한 회전의 양, 두 직선 사이에 놓인 평면의 일부분으로 범주화하였으며(Shreves, 1969, 재인용), Freudenthal(1983) 또한 각의 개념을 두 변의 쌍 또는 평면(공간)의 일부라는 각의 정적인 속성과 방향의 변화가 있는 과정이라는 동적인 속성으로 분류하였다. 특히 Freudenthal은 각이 갖는 여러 가지 속성을 학생들에게 지도할 것을 주장하기도 하였다. 이와 같이 각의 개념은 직선의 쌍, 영역, 회전이라는 다양한 측면을 가지고 있으며, 그 중에서도 '회전한 양'이라는 속성은 모든 각이 측정 가능함을 의미한다.

2. 교육과정에 나타난 각의 척도와 그 관계

이미 실효성을 상실한 '각도'라는 용어를 대신해 '각의 크기'라는 표현을 사용하자는 일부 의견이 있지만(박교식, 2010), 2009 개정 교과서에는 여전히 '각도'라는 용어가 제시되고 있다. 각도에 대해 교사용 지도서 <4-1>은 '두 변이 벌어진 정도이며, 두 반직선 사이의 회전량으로 결정된다'로 기술하고 있으며(교육부, 2014), <4-1> 교과서는 부채를 펼치거나 회전하는 시계의 두 바늘 맥락을 사용하여(교육부, 2013b) 각의 동적인 측면을 드러낸다. 이후 중1 교과서에서는 각도를 '각의 한 변이 다른 한 변까지 회전한 양'으로 설명함으로써(김원경외, 2013) 각의 동적인 측면을 적극적으로 부각시킨다. 이와 같이 각의 크기는 각의 꼭짓점을 중심으로 한 '회전량'으로 설명되고 있음을 알 수 있다.

학교수학에서 다루는 각도의 단위는 직각, 도(°)와 라디안이다. 직각은 수학 <3-1>에서 '종이를 반듯하게 두 번 접었다 펼쳤을 때 생기는 각', 즉 도형으로 도입되지만, 이어지는 도형의 이동에서는 '시계방향으로 직각만큼 돌리기'를 통해 단위로도 사용된다. 직각을 2직각, 3직각, 4직각과 같이 각도의 단위로 사용한 것은 유클리드의 원론(Heath, 1998)을 비롯한 그리스 수학에서 유래를 찾을 수 있다. 그러나 2009개정 교과서에서는 1직각을 표준단위로 명시하지 않고 있어, 7차와 2007개정 교과서에서 1직각과 1도(1°)를 각도의 표준단위로 소개했던 것과 변화를 보인다. 교과서에서 1직각이 표준단위로 거의 활용되지 않는다는 박교식(2010) 등의 지적이 반영된 결과로 보인다.

본격적인 각의 크기에 대한 학습은 <4-1>에서 1도(1°)를 '직각을 똑같이 90으로 나눈 하나'로 정의하면서 이루어진다(교육부, 2014). 이러한 도입 방식은 원을 360등분하거나 반원을 180등분하는 것이 아니라 직각을 90등분하는 것으로, 초등학교에서 다루는 각의 크기가 명시적으로는 180도를 넘지 않는다는 점과 선수지식으로 이미 학습한 바 있는 직각과의 연계성을 확보한다는 점에서 의미가 있다. 그런데 도(°)의 도입과정에서 [그림 II-1]과 같은 각도기 그림을 제시하고 있지만, '직각을 똑같이 90으로 나눈다'라는 것이 구체적으로 직각의 '무엇'을 나누는 것인지에 대해서는 명확히 설명하지 않는다. 이에 학생들은 각의 측정의 분할 개념이 각도기의 곡선 부분, 즉 반원, 호의 길이의 등분이라는 사실을 정확히 인식하지 못할 우려가 크다.



[그림 II-1] 1도(1°)의 도입(수학 4-1)

삼각함수 전개에 필수적인 라디안은 '반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기'를 나타내는 각도 단위를 의미한다. 2009 개정 교육과정(2012)에서는 삼각함수를 '미적분 II'에서 다루도록 함에 따라, 라디안은 고등학교 2학년 이후에 도입된다. 그런데 강향임, 최은아(2015)는 정상권외(2014)를 제외한 모든 교과서가 '호의 길이와 반지름의 길이가 같을 때, 중심각의 크기가 반지름의 길이에 관계없이 항상 $\frac{180^\circ}{\pi}$로 일정하고, 이 일정한 각의 크기 $\frac{180^\circ}{\pi}$을 1라디안(radian)이라 한다'고 기술하고 있음을 지적한 바 있다. 사실 이것은 라디안의 정의라기보다는 비례식으로 유도된 육십분법과의 관계에 불과하다. 여기에서의 관계란 상호 변환 관계일 뿐, 각의 측정단위로서의 도(°)와 라디안이 가지는 각의 속성 사이의 관계를 의미하는 것은 아니다. 육십분법과 호도법, 도(°)와 라디안의 변환 계산식을 제공할 뿐이며, 둘 사이의 근본적인 공통점이나 차이점을 생각해보는 기회를 제공하지 못한다는 한계가 있다. 이와 같은 교과서의 구성은 학생들이 도(°)와 라디안 변환 계산은 잘 수행하는 반면에 라디안에 대한 개념적 이해가 미흡하다는 선행연구(송은영, 2008; 강향임, 최은아, 2015; Akkoc, 2008; Fi, 2003) 결과와 무관하지 않다.

3. 호의 측도에 의한 각의 측정

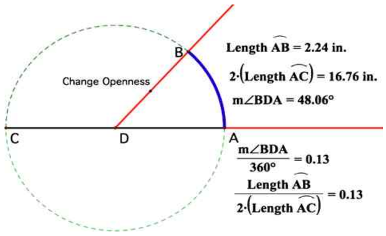
각의 측정의 아이디어가 호의 측도에 의해서 발생되었다는 것은 역사적 분석을 통해 확인가능하다. 바빌로니아와 그리스의 천문학자들은 천체의 위치와 운동을 기술하는 수단으로 각의 개념을 필요로 하였다. Matos(1990)는 바빌로니아 천문학자들이 하루 동안의 시간을 하늘의 1회전에 대응시켰던 관례가 결과적으로 원을 360°로 나누는 기원이 되었다고 설명한다. 이들은 천구의 원주를 12 'miles'로 나누고 이를 다시 30으로 세분화하여 하루 시간(시계의 한 바퀴)을 360으로 나눈 것이다. 이와 같이 '도(degree)'는 호의 측정을 위한 단위였을 뿐 아니라, 시간을 측정하는 단위이기도 하였다. 한편 Boyer & Merzbach (2000)는 원을 360°로 나누는 것이 그리스 천문학에서 태양의 궤도인 황도를 12개의 '궁'과 36개의 '십분각'으로 나누는 것과 관련된다고 주장한다. 각각의 십분각을 다시 열 개의 부분으로 나누었을 때 나오는 수 360은 약 360일인 1년 주기에 쉽게 대응되었을 것이고, 이 대응 관계로부터 각도 체계가 유래했을 것이라는 설명이다. 또한 톨레미가 360°로 나눈 것은 바로 원주였으며, 이를 60으로 나누어 분(minute)을, 다시 60으로 세분화하여 초(second)를 얻게 되었다 (Cajori, 1983). 이와 같이 호의 길이에 의해 각도를 해석하는 것은 오래된 전통이었음을 알 수 있다.

도(°)와 라디안의 공통적인 속성은 호의 측도로 해석가능하다는 점이다. 라디안을 단위로 사용하는 각의 측정방법을 호도법으로 설명하는 현재 교육과정에서는 라디안이 호의 길이를 사용하는 유일한 척도인 것처럼 생각될 수 있으나, 도(°)의 개념 역시 호의 길이에 바탕을 둔다. 라디안이 반지름의 길이와 같은 호의 길이를 단위로 하여 원주를 분할한다면, 도(°)는 원의 둘레를 360등분하는 호의 길이를 기본 단위로 하여 원주를 분할한다. 라디안의 경우, 반지름이 r인 원에서 호의 길이 r을 단위로 원주 $2\pi r$을 분할하면 2π개, 즉 2π라디안을 얻을 수 있다. 한 원에서 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로, 호의 길이와 원주의 비$\left(\frac{l}{2\pi r}\right)$와 호의 길이에 대응하는 중심각의 크기와 2π라디안의 비$\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$는 동일하다. 이를 식으로 표현하면, $\frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi}$ 이며, 중심각의 크기는 $\theta = \frac{l}{r}$로 얻

을 수 있다. 도(°)의 경우는 원주를 360등분한 호의 길이가 기본 단위가 되므로, 다시 단위 호의 길이로 원주 $2\pi r$을 분할하면 360개, 즉 360도를 얻을 수 있다. 이 때 호의 길이와 원주의 비 $\left(\frac{l}{2\pi r}\right)$와 호의 길이에 대응하는 중심각의 크기와 360도의 비 $\left(\frac{x^{\circ}}{360^{\circ}}\right)$는 동일하다. 이와 같이 각의 측정은 호의 길이와 원주, 중심각의 크기 사이의 곱셈적 비교를 기본으로 하는 양적 관계가 핵심이 된다.

한편 호의 길이를 이용한 각의 측정은 선형 측정에 해당하므로, 이 과정에서 Stephan & Clements(2003)가 제시한 선형 측정의 6가지 기본 개념, 즉 분할, 단위 반복, 추이, 보존, 거리의 누적, 수와 측도 사이의 관계를 확인할 수 있다. 임의의 각은 이에 대응하는 호를 단위 호의 길이에 의해 똑같은 크기로 분할해야 하며, 단위 호의 길이로 해당 호를 빈틈없이 겹침 없이 반복적으로 덮어야 한다. 세 개의 각의 크기 비교를 위해서는 호의 길이로 대응시켜 이들 사이의 대소 관계에 대한 추이적 관계를 이해해야 하며, 각의 이동, 즉 호의 이동이 각의 크기를 변화시키지 않는다는 보존 개념을 이해해야 한다. 또한 단위 호의 길이의 반복의 결과가 첫 번째 반복의 시작점으로부터 마지막 반복의 끝점까지의 거리에 해당한다는 사실을 인식해야 하며, 각의 측정이라는 것이 단위 각, 즉 단위 호의 길이의 개수를 '세는 활동'임을 이해해야 한다. 그동안 각의 측정에 대한 지도가 단순히 각도기를 읽는 활동에 그친 경향이 크다고 볼 때, 호의 길이를 이용한 각의 크기의 측정에 대한 지도는 학생들이 선형 측정의 기본 개념들을 형성할 수 있도록 하는 대안이 될 수 있다.

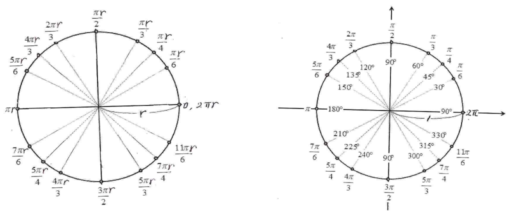
Moore(2013)는 호의 길이와 원주, 반지름의 길이 사이의 양적 추론이 각의 측도를 이해하는 핵심임을 주장하였으며, 호의 길이와 원주 사이의 양적 관계를 이용하는 아이디어가 호도법과 육십분법에 동일하게 적용됨을 강조하고 있다. 이러한 양적 관계는 직접 측정활동을 통해 확인할 수도 있지만, 공학 도구를 활용하여 불변량 등을 좀 더 효과적으로 확인할 수 있다. 예를 들어, [그림 II-2]는 호의 길이와 원주, 부채꼴의 중심각의 크기의 측도를 이용하여 원주에 대한 호의 길이의 비가 360°에 대한 중심각의 크기의 비와 같음을 확인 가능하도록 제작한 프로그램이다. 이 프로그램의 조작 활동을 통해 학생들은 반지름의 길이 또는 중심각의 크기를 증가 또는 감소시킴에 따라 두 비$\left(\frac{x^{\circ}}{360^{\circ}}, \frac{\theta}{2\pi}\right)$의 변화를 추측해봄으로써 불변량을 찾을 수 있다. 결국 두 비의 값이 일정하다는 양적 관계로부터 중심각의 크기를 구하는 것이 가능하다. Moore의 교수실험에서 중심각의 크기를 구하는 결정적인 양이 호의 길이임을 알 수 있다. 실제로 Moore의 교수실험에 참여한 학생은 1°의 의미를 '원주를 360등분한 호의 길이에 대응하는 중심각의 크기'로 답할 수 있게 되었다. [그림 II-2]의 활동은 라디안의 학습에서도 연속성을 가지고 동일하게 지도될 수 있다. 두 비의 상등으로부터 중심각의 크기를 반지름의 길에 대한 호의 길이의 비로 구할 수 있게 되는 것이다.



[그림 II-2] 호의 길이로 양적 관계를 탐구하는 프로그램(Moore, 2013)

한편 강미광(2011)은 호의 길이로서 각의 크기를 잰다는 발상을 가지고 호도법을 '호의 크기를 나타내는 호의 측도'로 재정의하여, 호의 측도

개념이 부각되도록 하는 교수방안을 [그림 II-3]과 같이 제시하였다. 이는 중학교 1학년의 부채꼴의 호의 길이 단원에서 활용 가능한 활동으로, 왼쪽 그림은 원주를 2등분, 3등분, 4등분, $\cdots$, n 등분하여 분할되는 호의 길이를 구하는 활동이며, 오른쪽 그림은 단위원에서 호의 길이가 $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$인 중심각의 크기가 각각 180°, $90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ 임을 인식하는 활동이다.



[그림 II-3] 등분한 호의 길이(좌)와 중심각과 호의 길이(우)

이러한 활동은 추후 라디안의 학습과정에서 π의 실수배가 각의 크기뿐 아니라 호의 길이를 나타낸다는 것을 이해하는데 도움을 줄 것이다. 보다 중요한 것은 각의 크기를 호의 길이에 대응하는 양으로 인식하게 함으로써, 라디안을 도(°)와 개념적으로 연결되지 못하는 별개의 대상이 아닌 호의 측도라는 상호 연속성을 지닌 개념으로 파악하게 한다는 점이다.

Ⅲ. 연구방법

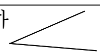
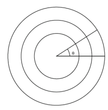
1. 연구 대상 및 과제

본 연구는 총 2단계로 이루어졌다. 1단계는 예비 중등교사들을 대상으로 각의 측도로서의 도(°)와 라디안에 대한 내용지식을 조사한 것이며, 2단계는 중학생을 대상으로 한 실험이다. 1단계에서 예비교사를 선택한 이유는 본 연구의 목적 중의 하나가 도(°)와 라디안을 연속적으로 지도할 수 있는 교수・학습방안을 탐색하는 것이므로, 향후 학생들을 가르치게 될 예비교사를 대상으로 조사를 하는 것이 의미 있다고 판단했기 때문이다. 조사에 참여한 예비교사들은 지방소재의 사범대학 학생 26명으로, 수학교육 전공 12명과 수학교육을 복수전공으로 하는 타과 전공 14명으로 구성되었다. 이들에게는 <표 III-1>과 같은 총 6개의 과제가 제공되었다.

[과제 1], [과제 2], [과제 5], [과제 6]은 본 연구를 위해 개발한 문항이고 [과제 3]과 [과제 4]는 Moore(2013)가 교수실험에 사용한 문항을 참고한 것이다. [과제 1]은 각과 각도의 의미를, [과제 2]는 1도(°)와 1라디안의 의미를 확인하기 위한 문항이다. [과제 3]은 각도기를 만드는 과정에서 각도기의 눈금을 무엇을 기준으로 표시하는지, [과제 4]는 임의의 각을 측정하기 위해 원주와의 관계를 이용하는지, [과제 5]는 중심각, 호의 길이, 원주, 반지름 사이에 내재된 어떠한 불변량을 가장 많이 언급하는지, [과제 6]은 실생활 맥락에서 각을 측정하는 전략을 확인하기 위한 문항이다.

2단계에서는 중학교 2학년 학생 2명을 대상으로 실험을 진행하였다. 2단계에 참여한 학생들은 기본적으로 원의 중심각이 360°인 것과 부채꼴, 호의 길이 등을 알고 있는 중학교 1학년 이상의 수준이면서 삼각비와 라디안을 배우지 않은 학생을 찾는 과정에서 편의에 의해 선택되었다. 또한 연구대상을 고등학생으로 한정할 필요 없이 '호의 길이'와 '비'의 의미를 알고 있는 중학생으로 학령을 낮추는 것이 호의 측도에 의한 각의 측도의 이해가 라디안과 각의 측정의 이해에 미치는 영향을 살펴보는 연구목적을 달성하는데 더 적합하다고 판단하였다. 고등학생과 예비교사의 경우 [과제 4]인 임의의 각을 측정하기 위한

<표 III-1> 과제 항목 및 과제 내용

과제 항목	과제 내용	출처
각과 각도 비교	1. 각과 각도의 의미를 비교하여 설명하시오.	개발
1도(°)와 1라디안 의미	2-1. 1도(°)의 의미를 쓰시오. 2-2. 1라디안의 의미를 쓰시오.	개발
각도기 만들기	3-1. 도(°) 각도기를 만들고, 그 방법을 설명하시오. 3-2. 라디안 각도기를 만들고, 그 방법을 설명하시오.	Moore(2013) 문항참고
임의의 각의 측정	4. 다음 각의 크기를 측정하는 과정을 그림으로 나타내고 설명하시오. 	Moore(2013) 문항참고
불변량 찾기	5. 다음 그림은 중심이 같은 세 개의 원이다. 이 그림에서 중심각 이외에 동일한 값을 갖는 양을 찾고, 그 이유를 설명하시오. 	개발
실생활 맥락에서의 각의 측정	6. 오른쪽 그림은 놀이공원에 있는 반지름이 30m인 대관람차이다. 대관람차를 타고 이동한 거리가 40m일 때, 회전한 각의 크기를 구하시오. 	개발

방법으로 삼각비를 제시할 수 있으나, 중학교 2학년 학생들의 경우는 삼각비를 고려하지 않고 순수하게 각의 측정의 원리를 사용할 것이라는 이유도 작용하였다. 실험에 참가한 민성이와 하진이 모두 중학교 1학년 과정에서 부채꼴의 호의 길이를 학습한 상태였으며, 삼각비와 라디안을 학습한 경험은 없었다. 민성이는 학교 수학성적이 상위권에 속하는 학생으로, 평소 수학에 대한 탐구심이 많고 새로운 문제에 대해 자유롭게 도전을 즐기는 성향을 가진 학생이었다. 반면에 하진이는 평소 정답에 대한 확신이 있는 경우에만 답을 하는 등 다소 신중한 성향을 가진 학생이었으며, 본인의 우수한 수학실력에 비해 수학에 대한 효능감이 그다지 높지 않은 편이었다. 실험은 학교 방과후 시간을 이용하여 각각 50분씩 총 4차시로 진행하였다. 예비교사에게 제시하였던 도(°) 각도기 만들기 과제와 임의의 각의 측정 과제를 1차시 활동과제로, 불변량 찾기와 실생활 맥락에서의 각의 측정 과제를 2차시 활동과제로 선정하였다. 1, 2차시가 호의 측도로 도(°)를 해석하는 것을 목표로 하였다면, 3, 4차시는 호의 측도로 라디안을 이해하고 두 개념 사이의 관계를 이해하는 것이 목표였다. 3차시는 라디안에 대한 기본 개념을 학습한 다음 이를 적용하는 문제들을 해결하는 활동과 라디안 각도기 만들기 과제를 진행하였으며, 4차시는 도(°)와 라디안의 상호변환 관계, 공통된 속성, 도(°)에 비해 라디안이 가지는 장점 등 두 개념 사이의 관계를 설명하는 과제를 수행하도록 하였다.

2. 자료 수집 및 분석방법

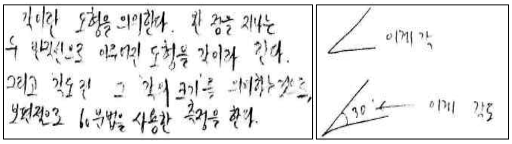
1단계 조사는 2015년 6월 말, 연구자 중 한 사람이 개설한 수학논술 강의시간 중에 실시되었다. 주어진 과제에 대한 예비교사들의 답안은 모두 스캔한 후 수집하였다. 수집한 자료는 2명의 연구자가 공동으로 분석하였으며, 해석이 다른 경우에는 논의를 지속하여 합의에 이르도록 하였다. 각 논제의 반응을 유형별로 범주화하고, [과제 1]은 각도의 의미를 기술할 때 호의 길이에 대한 반응이 나타나는가, [과제 2]는 각의 측정 단위인 1도와 1라디안을 만들 때 호를 분할하는

방법이 나타나는가, [과제 3]는 각도기를 만들 때 호를 분할하는 사례가 있는가, [과제 4]은 임의의 각의 측정에서 원주, 호, 반지름 등 길이의 비를 활용하는가, [과제 5]는 원, 반지름, 호, 중심각 사이에 내재된 불변량을 인식하는가, [과제 6]은 실생활 맥락의 각도 문제해결 전략으로 호의 측도를 활용하는가를 확인하는 방법으로 분석하였다. 본 연구는 호의 측도라는 관점과 양적 관계에 초점을 두고 있기 때문에 호의 등분이나 원주(원)와 호의 길이(부채꼴)의 비에 대한 응답에 상대적으로 초점을 두어 분석하였다. 결과분석에서 예비교사 26명은 S1부터 S26으로 표기하여 기술하였다. 2단계 실험은 7월 중에 방과후 시간을 이용하여 연구자 중 한 사람에 의해 이루어졌으며, 전 과정을 모두 녹음하여 녹음 자료를 학생들의 과제활동지와 함께 수집하였다. 수집한 자료는 1단계와 마찬가지로 2명의 연구자가 논의를 지속하여 공동으로 분석하였다.

Ⅳ. 결과분석

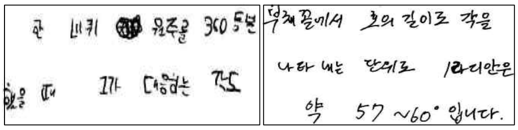
1. 예비교사들의 과제 반응 분석

각과 각도의 의미를 묻는 [과제 1]의 반응은 각과 각도로 구분하여 범주화하고 통합하여 분석하였다. 우선 각의 의미에 대해 13명이 ‘도형’(6명), ‘모양’(5명), ‘명칭’(2명) 등을 사용하여 설명하였고, 무응답 2명 외에 11명이 부적절하게 답했다. 각도의 의미에 대해서는 ‘각의 크기’(9명), ‘수치’(11명), ‘측정값’(1명), ‘도(°) 단위’(2명) 등을 사용한 설명이 있었고 무응답 2명, 부적절한 반응 1명으로 나타났다. 학생들의 반응에서 상당수가 ‘각은 도형’으로 ‘각도는 각의 크기 또는 수치’로 이해하고 있음을 알 수 있었다. [그림 IV-1]의 좌는 ‘각은 한 점을 지나는 두 반직선으로 이루어진 도형이고 각도는 각의 크기’라고 답한 예로 S2의 답안이다. 이 경우 학교수학에서 제시하는 각의 정의를 정확히 기술하고 있다고 볼 수 있다. 반면에 S21은 각과 각도에 대해 [그림 IV-1]의 오른쪽과 같은 시각적 표상의 개념 이미지로 기억하고 있었다. 초등학교 이후 각과 각도의 의미를 고려해 볼 기회가 없다는 점을 고려해 볼 때 가능한 반응이지만 예비교사로서 다소 부족한 설명으로 판단할 수 있다. 각도의 의미에서 호의 길이를 언급한 사례는 없었다.



[그림 IV-1] 각과 각도에 대한 반응의 예(S2, S21)

[과제 2-1] 1도(°)의 의미에 대해 26명의 예비교사 중 16명이 ‘원의 중심각을 360등분하여 얻은 각의 크기’라고 답했다. 그런데 여기서 등분이 구체적으로 어디를 어떻게 등분하는가에 대한 구체적인 설명은 없었고 ‘등분한다’ 또는 ‘부채꼴로 등분한다’라고 기술했다. 그 외에, ‘한 바퀴 원주를 360등분 했을 때 그 호에 대응하는 각도(S23)’로 기술하여 호를 언급한 하나의 사례가 있었다([그림 IV-2] (좌) 참조).



[그림 IV-2] 호의 측도 아이디어의 사례(좌S23, 우S24)

이 사례에서 원주는 중심각이 360°인 호이므로 호의 측도로 1도(°)를 접근하고 있다고 판단할 수 있다. [과제 2-2] 1라디안의 의미에 대해서는 ‘단위원에서 호의 길이가 1일 때 중심각’ 4명,

‘180을 π로 나눈 값$\left(\frac{180^{\circ}}{\pi}\right)$’ 2명, ‘반지름의 길이와 호의 길이가 같을 때 중심각의 크기’ 3명, 오답 및 무반응 17명으로 나타났다. 그 중에서 특히 S24는 ‘호의 길이로 각을 나타내는 단위’ ([그림 IV-2] (우) 참조)로 라디안을 설명하였다는 점에서 호의 측도로 라디안을 인식하고 있다고 판단되었다. 1라디안의 의미에 대해 17명이 적절하게 기술하지 못했는데 이는 예비교사들을 대상으로 라디안에 대한 이해를 조사한 강향임, 최은아(2015)에서도 밝힌 바 있듯이, 많은 예비교사들이 라디안의 의미를 부적절하게 알고 있다는 주장과 일치하는 것이다.

[과제 3-1]과 [과제 3-2]는 각도기를 만드는 과정에서 학생들이 사용한 전략을 ‘호의 등분’과 ‘각의 등분’의 두 가지 범주로 분류하였다(<표 IV-1> 참조). [과제 3-1] 도(°) 각도기를 만드는 과정에서, 호을 등분하여 각도기를 만든 응답자는 3명, 각를 등분하여 각도기를 만든 응답자는 14명, 기타로 컴퓨터가 필요하다거나 각도기 그림을 그린 응답자가 각각 1명씩 있었고 무응답자가 7명으로 나타났다. 각과 호라는 용어 대신 ‘180개의 부채꼴로 나눈다’ 와 같이 부채꼴을 언급한 경우는 각의 등분으로 분류하였다. [과제 3-2]에서는 ‘원주를 반지름의 길이와 같은 호의 길이로 등분한다(S7)’와 같이 호를 이용한 응답자가 9명, 평각을 π라 놓고 이등분하는 과정을 반복하여 눈금을 표시한다는 등의 전략을 제시한 응답자가 5명, 부적절하거나 무응답이 12명으로 65% 이상의 학생들이 라디안 각도기를 만들기 위한 아이디어를 분명하게 설명할 수 없었다.

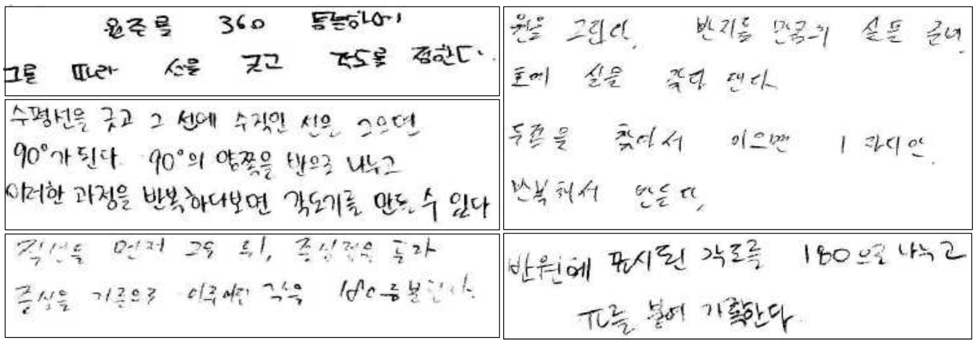
[그림 IV-3]의 좌측은 호의 등분을 이용해 각

<표 IV-1> [과제 3-1]과 [과제 3-2]에 대한 반응 유형

응답자 수	[과제 3-1] 도(°) 각도기를 만드는 방법에 대한 반응		[과제 3-2] 라디안 각도기 만드는 방법에 대한 반응	응답자 수
3	원주 또는 호의 길이를 360, 180, 90등분	호의 등분	반지름의 길이로 원주를 등분	9
14	부채꼴을 이등분하는 과정 반복, 원, 반원, 사분원을 360, 180, 90등분, 90도를 삼등분	각의 등분	반원을 π로 놓고 이등분 반복	5
9	각도기, 컴퓨터, 무응답	기타	부적절한 반응, 무응답	12
26		합계		26

<표 IV-2> [과제 4]와 [과제 5]에 대한 반응 유형

[과제 4] 임의각의 크기를 측정하는 방법에 대한 반응	응답자 수	[과제 5] 불변량	
		제시	미제시
원주와 호의 길이, 반지름의 길이로 비율을 이용	6	6	0
반지름의 길이와 호의 길이로 $l = r\theta$를 이용	8	3	5
원이나 직각을 이등분하는 과정을 반복하여 근삿값을 이용	4	2	2
직각삼각형의 밑변과 높이의 길이로 삼각비를 이용	4	2	2
부적절한 반응 및 무응답	4	1	3
합계	26	14	12

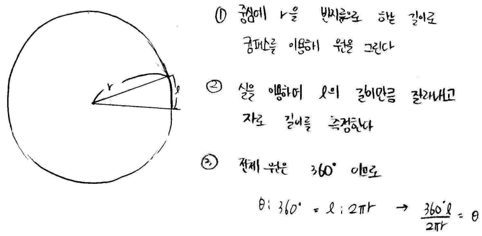


[그림 IV-3] 각도기 만드는 방법에 대한 반응 사례(좌S23, S20, S12, 우S7, S16)

도기를 만드는 전략을 제시한 S23, 각의 이등분을 이용해 각도기를 만드는 전략을 제시한 S20, 평각을 180등분한다는 S12의 반응이다. S20의 경우, 각도기를 만들기 위해 수평선에 수선의 발을 내린 후 만들어진 각을 이등분하는 과정을 계속 반복한다고 언급하였는데 이 경우 '$180^{\circ} \rightarrow 90^{\circ} \rightarrow 45^{\circ} \rightarrow 22.5^{\circ} \rightarrow 11.25 \rightarrow \cdots$' 로 진행되어 원하는 단위가 아닌 소수에 해당하는 각이 구해진다는 사실을 간과한 것으로 보인다. [그림 IV-3]의 우측은 반지름의 길이로 원주를 등분하는 전략을 제시한 S7, 반원에 60분법으로 표시된 각도를 180으로 나누고 π를 붙여 기록한다는 S16의 반응이다. S16의 경우, 도(°) 각도기를 만들고 도(°)와 라디안 사이의 관계를 사용하는 것으로 진술하였는데 이는 측도로서의 라디안 개념을 포함하고 있지 않다고 판단하여 부적절한 반응으로 분류하였다. 분석결과, 도(°) 각도기를 만들 때 보다 라디안 각도기를 만들 때 상대적으로 높은 비율의 학생들이 호의 분할 전략을 사용하였지만 대부분의 학생들이 반지름의 길이로 원주를 분할할 것이라는 예상과는 거리가 있었다. 이것은 학생들의 라디안 개념에 대한 이해가 부족했던 것이 가장 큰 원인으로 판단된다.

[과제 4]는 임의의 각을 측정하는 상황에서 원주와 호의 길이의 비를 활용하는 사례를 확인하기 위한 것으로 각도기 사용이 불가능했으며, 자와 컴퍼스, 실을 비롯한 다른 도구 사용이 가능하였다. 분석결과, 원주와 호의 길이, 반지름의 길이로 비율을 이용하여 각의 크기를 측정하는 응답자가 6명, 반지름의 길이와 호의 길이로 $l = r\theta$를 이용하여 각의 크기를 구하는 응답자가 8명, 원이나 직각을 이등분하는 과정을 반복하여 주어진 각의 근삿값을 구한다고 답한 응답자가 4명, 수선의 발을 긋고 직각삼각형을 만들어 삼각비를 이용하여 주어진 각의 크기를 구한다고 답한 응답자가 4명, 부적절한 응답이나 무응답 4명으로 나타났다(<표 IV-2> 참조).

[그림 IV-4]는 S17의 반응으로 주어진 각의 선분을 반지름으로 하는 원을 그린 다음, 실을 이용하여 호의 길이를 측정하고, 호의 길이와 원주의 비가 부채꼴의 중심각의 크기와 360°의 비와 같다는 사실을 이용한 경우이다.



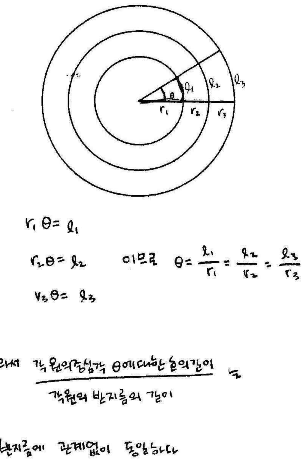
[그림 IV-4] 임의의 각의 측정에 성공한 사례(S17)

이와 같은 해결 전략은 호의 측도와 기타 양사이의 양적 관계로서 각의 측도를 이해하고 있기 때문에 가능하다. 이와 같은 유형의 반응은 6

명으로 나타났고 이들은 대체로 주어진 각을 포함하는 원을 그렸으나 길이의 비를 사용하여 각을 추측하면서도 단위는 여전히 60분법을 사용하였다.

또한 공식 $l = r\theta$ 을 이용한 응답자 8명 중 2명(S4, S26)이 호의 길이 l과 반지름의 길이 r을 측정한 다음, θ를 라디안으로 구한 후, 최종적으로 도(°) 로 환산하는 전략을 제시하였다. 원이나 직각을 이등분하는 과정을 반복하여 근삿값을 이용한 4명(S1, S6, S12, S22)은 180° 또는 360° 에 주어진 각이 포함되는 횟수를 근사적으로 구하여 각을 측정한다고 기술한다고 하여, 주어진 각을 단위로 사용하는 전략을 보여주었다. 삼각비를 이용하여 [과제 4]를 해결한 4명은 주어진 각을 한 각으로 하는 직각삼각형의 세 변의 길이를 이용하여 코사인 함수나 탄젠트 함수를 계산한 다음 삼각함수표에서 주어진 각의 크기를 찾는다는 해결 방법을 제시하였다. 수학적으로 오류가 없는 답안이긴 하지만, 호의 측도를 사용하지 않았다는 점에서 비율을 이용한 범주로 분류하지 않았다.

[과제 5]는 세 개의 동심원에서 중심각의 크기가 반지름에 관계없이 동일할 때 중심각 이외에 동일한 양을 찾는 문항으로, 호의 길이와 반지름, 원주 사이의 관계를 이해하고 불변량을 제시한 반응과 제시하지 못한 반응으로 분류하였다. 전체 26명 중 14명(53.8%)이 반지름의 길이에 대한 호의 길이의 비를 불변량으로 답하였고 12명(46.2%)이 불변량을 제시하지 못하였다. 불변량을 제시한 14명 중에는 [과제 4]에서 임의의 각을 측정하기 위한 전략으로 원주와 호의 길이, 반지름의 길이로 비율을 이용한 6명과 공식 $l = r\theta$ 을 이용한 응답자 8명 중 3명(S4, S15, S18), 각을 등분하는 전략을 제시한 4명 중에서 원을 그려서 설명한 S1과 S6가 포함되어 있고 삼각비를 이용한 4명 중 2명(S23, S24), 부적절한 반응이나 무응답자 중 1명이 포함되어 있다(<표 IV-2> 참조).

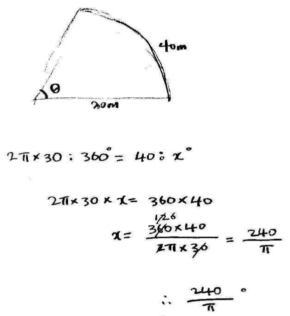


[그림 IV-5] 불변량 찾기 과제에 대한 S3 학생의 반응

[과제 5]의 반응에서 나타난 불변량은 [그림 IV-5]의 S3의 반응에서 볼 수 있는 것처럼, 대부분의 예비교사들 호의 길이와 반지름, 중심각 사이의 관계를 나타내는 잘 알려진 공식인 $l = r\theta$ 로부터 유도된 $\dfrac{l_i}{r_i}$ 뿐이었다. 그 외의 불변량으로 인식될 수 있는 호의 길이에 대한 원주의 비 등과 같은 경우는 언급되지 않았다. 이를 통해 예비교사들이 '부채꼴 맥락에서는 공식 $l = r\theta$' 라는 고착된 사고를 하고 있다는 사실을 알 수 있다. 이들은 주어진 과제에서 부채꼴뿐 아니라 원이 그림으로 제시되어 있음에도 불구하고 호의 길이와 원주의 비에 주목하지 못하고 있었다. 사실 공식 $l = r\theta$ 역시 호의 길이와 원주의 비로부터 유도되었음에도 불구하고 예비교사들은 결과물인 형식화된 공식만을 기억하는 것이다.

[과제 6]은 대관람차라는 실생활 맥락에서 어떻게 각을 측정하는지를 알아보고자 한 문항이다. 정답률이 가장 높았던 과제로, 전체 26명 중 23명(88.5%)이 적절한 답변을 하였고 S10, S19, S21 만이 정답을 제시하지 못하였다. 대부분의

반응에서 공식 $l = r\theta$ 를 사용하여 '$\theta = \frac{4}{3}$라디안'을 구하였다. 일부 학생들은 풀이 말미에 도(°)와 라디안의 변환공식으로 유도한 $\frac{240^{\circ}}{\pi}$를 삽입하기도 하였다([그림 IV-6] 참조).



[그림 IV-6] [과제 6]에 대한 S3 학생의 반응

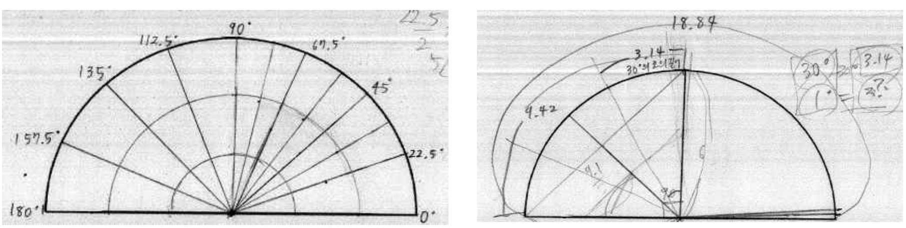
원주와 호의 길이의 비례 관계를 이용한 사례는 3명(S3, S5, S19)에 그쳤다. 추가로 [과제 6]를 해결하지 못한 3명의 예비교사들은 모두 [과제 5]에서 불변량을 제시하지 못하였던 12명 중에 속해 있었다. 이러한 결과는 부채꼴을 활용하는 것은 제한된 맥락에서 유용할지 모르지만, 원과의 관계 속으로 확장하기 어려워한다는 [과제 5]의 결과와 연결된다.

이상에서 상당수의 예비교사들이 호의 측도로 라디안을 이해하는 것에는 별 어려움이 없는 반면에 도(°)를 호의 측도와 연결 지어 이해하는 것에는 어려움을 겪는다는 것을 알 수 있다. 이는 라디안 뿐 아니라 도(°)의 경우에도 원주 또는 부채꼴의 호의 길이를 단위 호의 길이로 분할하는 개념이라는 것을 인식하지 못하는 것이다. 따라서 예비교사들이 중심각과 호의 길이, 원주 사이의 곱셈적 관계를 비롯한 양적 관계에 주목하여 각의 측도를 이해할 필요가 있다. 이상의 결과를 반영하여 중학생을 대상으로 호의 측도와 도(°)를 연결해보는 경험을 제공하고, 라디안의 개념과 도(°)와 라디안의 관계를 이해하는 과정을 살펴보는 실험을 진행하였다.

2. 중학생들의 과제 수행 분석

가. 도(°)를 호의 측도로 해석하기

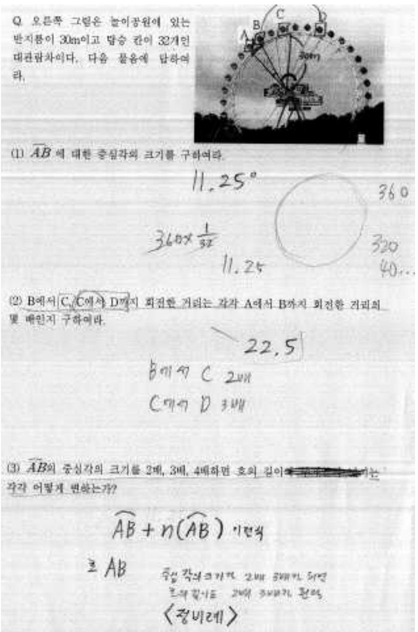
1차시에서는 도(°) 각도기 만들기 과제와 임의의 각의 측정 과제를 수행하였다. 학생들에게는 예비교사와 달리 반원 그림을 제시하였으며, 각도기를 제외한 자, 컴퍼스, 실을 비롯한 다양한 도구를 직접 사용하여 도(°)로 표시된 각도기를 구성하도록 하였다. 평소 당연시했던 도(°) 각도기를 만드는 활동을 통해 각의 측정의 개념과 원리에 대한 수학적 사고를 자극하고자 하였다. 각도기 만들기 과제는 학생들로 하여금 단위 호의 길이에 주목하게 하고, 이 단위로 호와 원주, 중심각을 분할하고 단위 반복을 하는 등 측정의 기본 개념을 학습하는데 효과적이라고 판단하였다. 민성이는 1차 시도에서 예비교사가 사용하였던 방법인 '평각을 이등분하고, 다시 이등분된 각을 이등분하는 과정을 계속 반복한다'는 전략을 사용하였다([그림 IV-7] (좌) 참조). 이때 연구



[그림 IV-7] 민성이의 도(°) 각도기(1차(좌), 2차(우))

자는 민성이가 호의 길이와 중심각의 크기 사이에 성립하는 비례관계를 찾아 활용할 수 있도록 보조문항을 제시하여 해결하도록 하였다.

보조문항은 호 $\widehat{AB}$에 대한 중심각의 크기를 묻는 문항, B에서 C, C에서 D까지 회전한 거리가 각각 A에서 B까지 회전한 거리의 몇 배인지를 묻는 문항, $\widehat{AB}$의 중심각의 크기를 2배, 3배, 4배하면 부채꼴의 호의 길이가 어떻게 변하는지를 묻는 문항이다([그림 IV-8] 참조). 이 보조문항을 해결하면서 민성이는 임의의 각을 비로 해결할 수 있도록 돕는 ‘중심각의 크기와 호의 길이가 정비례한다’는 사실을 발견하였다.



[그림 IV-8] 민성이의 보조문항 답안

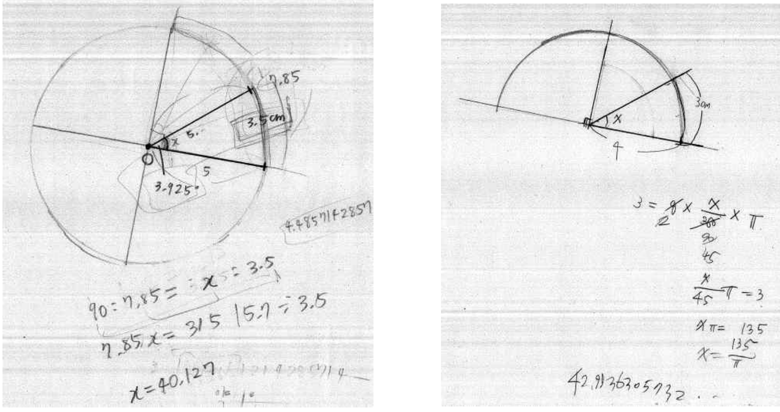
도(°) 각도기 만들기 2차 시도에서 민성이는 반원에서 원의 반지름을 실로 측정하여 6cm를 구한 다음에 이 값에 π의 근사값 3.14를 곱하여 18.84를 얻었다. 다시 이 값을 2로 나눈 9.42를 길이로 갖는 호에 대응하는 중심각 90°와 다시 이 값을 3으로 나눈 3.14를 길이로 갖는 호에 대응하는 중심각 30°를 찾아내었다. 이때 연구자가 1도(1°)를 표시할 수 있느냐고 질문하자, 30도의 호의 길이가 3.14이므로 비례식을 세우면 된다고 답하였으며, 계산기를 사용하여 1도에 대응하는 호의 길이가 0.104666667임을 찾았다. 이후 민성이는 약 0.1cm에 해당하는 호의 길이를 근사적으로 표시하고 도(°) 각도기를 만들었다([그림 IV-7] (우) 참조).

한편 하진이는 도(°) 각도기를 만들기 위해 자의 모서리를 이용하여 90도를 그린 다음, 90도에 해당하는 호의 길이 9.5cm를 근사적으로 찾아냈다. 그리고는 이 값을 2로 나눈 4.75cm에 해당하는 실을 이용하여 호 위에 위치를 표시하여 45°를 그렸다. 이로서 연구자는 하진이가 각의 크기를 호의 길이로부터 유도하고 있다고 판단하고 임의의 각을 측정하는 과제를 제시하였다. 하진이는 자신이 활용한 도(°) 각도기 만들기 전략을 그대로 적용하여 각을 구했다([그림 IV-9] (우) 참조).

임의의 각 측정과정에서 두 학생이 모두 호의 길이의 비를 이용하여 각도를 해결하였다는 점은 유사하지만 하진이의 경우 민성이와 달리 원의 맥락을 이용하였다.

교사 : 왜 원을 그리고 있는 거야?
하진 : 컴퍼스를 사용해도 된다고 했잖아요. 왠지 그려야 할 것 같아요.
교사 : 왠지?
하진 : 아까 그 공식을 써야 하니까요. 호 구하는 공식이요.

하진이가 말하는 호를 구하는 공식이란 ‘지름 $\times\ \pi\ \times\ \dfrac{\text{중심각}}{360^\circ}$’이다. 하진이는 원에 대한 호의 길이의 비와 같은 값을 갖는 $\dfrac{\text{중심각}}{360^\circ}$을 적용해야 하기 때문에 원을 사용했다고 답했으며, 이 공식을 이용하여 중심각의 근삿값 42.9°를 구하

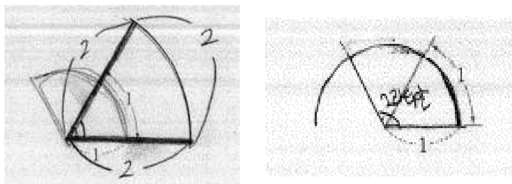


[그림 IV-9] 임의의 각 측정에 대한 반응(민성(좌), 하진(우))

는 데 성공하였다. 2차시의 동심원의 불변량 찾기에서도 하진이는 '반지름과 호의 비'뿐 아니라 '호와 원주의 비'를 찾아내는 데 성공하였다. 이번 연구에 참여한 예비교사와 중학생 중에서 '호와 원주의 비'를 불변량으로 찾아낸 경우는 하진이가 유일하였다. 하진이가 민성이에 비해 좀 더 빨리 호의 길이를 이용하여 각을 측도를 이해할 수 있었던 것은 하진이의 도(°)에 대한 개념이미지에 기인한 것으로 보인다. 1도의 의미를 설명해보는 사전질문에서 하진이는 1도를 '원을 360개의 부채꼴 모양으로 나눈 것 중 하나의 중심각의 크기'라고 답하였다. 원과 부채꼴, 원주와 호를 전체와 부분으로 이해하고 이들 사이의 양적 관계를 바탕으로 중심각을 구한다는 점이 과제 수행에 도움을 준 것으로 판단하였다.

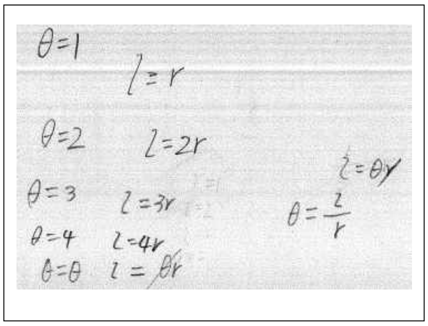
나. 호의 측도로 라디안 이해하기

3차시는 우선 반지름의 길이로 원주를 등분해 보는 활동을 하였다. 이후 1라디안 용어를 정의로서 도입하고, 부채꼴 위에 중심각의 크기가 2라디안인 부채꼴을 겹쳐서 그려보는 문제를 제시하였다. 민성이가 반지름의 길이를 2배로 늘린 부채꼴을 그리는 오류를 범한 후에 다시 시도하여 2라디안을 얻은 반면에 하진이는 바로 컴퍼스를 사용하여 원의 일부를 그리고 2라디안을 나타냈다([그림 IV-10] 참조).



[그림 IV-10] 2라디안(민성(좌), 하진(우))

하진이는 이 과정에서 '2라디안은 1라디안의 두 배니까 호에서 그만큼 더 가야 한다'고 설명하였다. 하진이의 사고에서 Stephan & Clements (2003)이 말한 선형 측정의 기본 개념 중 분할과 단위반복, 거리의 누적, 수와 측도사이의 관계 등을 발견할 수 있다. 무엇보다도 라디안의 정의를 사용하여 단위의 개수를 센다는 측정의 기본 개념을 이해하고 있다고 볼 수 있다. 결국 두 학생 모두 반지름이 고정된 조건이라면 라디안이라는 각의 측도가 호의 길이와 곱셈적 관계가 성립함을 이해하고, 호의 길이가 중심각의 크기와 반지름의 길이의 곱이 되는 일반화된 공식 $l = r\theta$을 유도할 수 있었다([그림 IV-11] 참조).

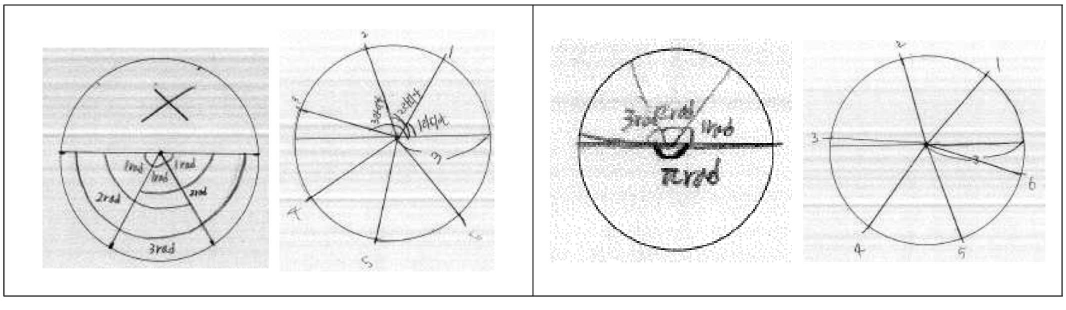


[그림 IV-11] $l = r\theta$의 유도 과정(민성)

반지름과 호의 길이가 주어진 부채꼴의 호의 길이를 구하는 문제인 '중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 반원에서 $\widehat{AP} = 2\,\overline{OA}$가 되도록 점 P를 잡았을 때, $\angle AOP$ 의 크기를 구하여라'에 대해서 두 학생은 $\widehat{AP} = 2\,\overline{OA}$ 조건을 1라디안의 정의에 적용하여 '1라디안이 두 개이므로 2라디안'을 구하였다. 동일한 문제에 대해서 약 40%의 예비교사들이 $l = r\theta$ 공식을 이용하고, 약 31%가 도(°)를 이용한 반면에, 약 26%의 예비교사만이 단위 라디안의 개수를 세는 전략을 사용했던 강향임, 최은아(2015)의 연구결과와 비교가 되는 반응이었다. 두 학생은 단위의 개수를 센다는 측정의 기본 개념을 사용하고 있다고 볼 수 있다. 호의 측도에 집중하도록 본 실험이 학생들로 하여금 분할과 단위 반복, 수와 측도와의 관계 등의 선형 측정의 기본 개념을 이해하는데 도움을 주었음을 알 수 있다.

이러한 성향은 원 위에 1.57라디안과 1.2π라디안 등 다양한 라디안 각을 나타내 보는 활동과 라디안 각도기를 만드는 과제에서도 관찰할 수 있었다. 학생들은 반원의 길이 πr이 r의 π배라는 것으로부터 유도한 '평각 180°는 π라디안'이라는 사실을 비교기준으로 하여 주어진 각들을 원 위에 나타내었다. 이 과제를 수행하는 학생들의 사고에서 선형 측정의 기본 개념 중 하나인 '추이'를 확인할 수 있다. [그림 IV-12]의 왼쪽 그림은 라디안 각도기 만들기에 대한 두 학생의 1차 답안이다.

민성이가 평각에 3라디안을 채운 오류를 범한 반면에 하진이는 3라디안을 평각 π라디안보다 작게 그린 것을 알 수 있다. 그러나 계속해서 4라디안, 5라디안, 6라디안을 채워가던 하진이는 원의 중심각이 7라디안에 근접하게 그린 본인의 그림에 오류가 있음을 발견하였다. 2π라디안을 약 6.28라디안으로 계산하여 다시 수정해서 그린 그림이 오른쪽에 나타나 있다. 민성이 역시 평각에 해당하는 π라디안을 3라디안으로 그렸다는 것을 인지하는 데 그리 오랜 시간이 걸리지 않았으며, 반원에 해당하는 라디안 각도기를 완성하였다. 2차 그림에는 3라디안이 π라디안보다 약간 작은 각으로 표현되었음을 확인할 수 있다. 민성이는 반원에 해당하는 각도기를 그린 이유를 일반적인 도(°) 각도기의 모양이 반원이기 때문이라고 답하였으며, 원 전체에 해당하는 각도



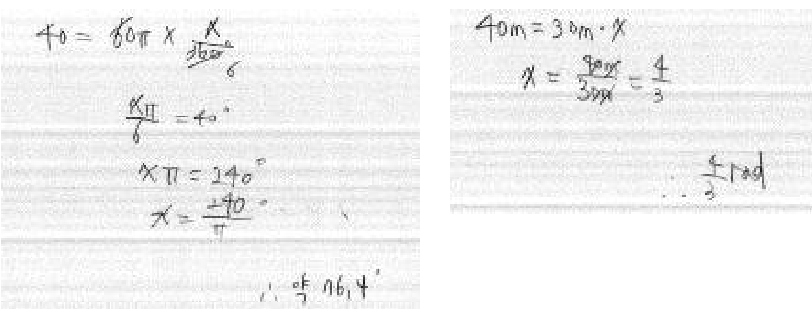
[그림 IV-12] 라디안 각도기 만들기(1차 답안(좌), 2차 답안(우))

기를 그리는 것은 '똑같이 반지름의 길이만큼 원주를 끊어가면 된다'고 표현하였다. 이러한 두 학생의 사고 속에 선형 측정의 기본 개념인 분할, 단위 반복, 추이, 보존, 거리의 누적, 수와 측도 사이의 관계 개념이 자연스럽게 사용되고 있음을 알 수 있다. 반지름의 길이와 같은 길이의 호를 단위 길이로 하여 주어진 부채꼴의 호의 길이 또는 원주를 똑같은 길이로 분할하고, 단위 호의 길이로 빈틈없이, 중복 없이 호를 반복적으로 덮는다는 아이디어를 표현하였으며, π라디안, 2π라디안을 기준각으로 하여 각의 크기의 대소 관계를 추이적으로 접근하는 모습을 보였으며, 구하고자 하는 호의 측도를 시초선에서 시계반대방향으로 출발한 단위 호의 길이의 반복이 끝나는 점까지의 거리로 인식하였으며, 단위 호의 길이의 개수를 세는 모습을 보였다. 이 과제수행에서 학생들은 구현하기 어려운 중심각의 분할보다는 좀 더 실제적인 호의 길이의 분할을 선택한 것이다.

다. 도(°)와 라디안 관계 이해하기

4차시에는 라디안과 도(°)와의 변환 관계를 유도하는 활동을 수행하였다. 학생들은 지난 차시에서 반원의 호의 길이를 이용하여 반원의 중심각의 크기를 π라디안으로 나타낼 수 있었다. 그 방법은 공식 $l = r\theta$에 반원의 호의 길이 πr을 대입하여 중심각의 크기 π를 구하는 것이었다. 반원의 중심각의 크기가 π라디안으로 구해진 이후에는 육십분법 180°와의 상등을 이용하여 '$1^\circ = \frac{\pi}{180}$라디안, 1라디안$= \frac{180^\circ}{\pi}$'를 어려움 없이 유도하였으며, $360^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$에 해당하는 라디안을 구하는데 성공하였다. 라디안과 도(°)의 변환 관계는 고차원적 사고능력을 요구한다기보다는 비례 관계를 적용한 산술적 계산에 해당한다는 것을 확인할 수 있었다.

[그림 IV-13]은 각각 도(°)와 라디안을 이용하여 실생활 맥락의 각의 측정 문제를 해결한 하진이의 답안이다. 두 풀이과정의 비교를 통해 하진이는 도(°)는 원주에 $\frac{x}{360}$를 곱해야 하는 반면에 라디안은 그럴 필요가 없다는 점을 들어 '라디안 공식이 더 간편하다'는 결론을 이끌어내었다. 이는 호의 길이 또는 중심각의 크기를 구하는 상황에서 라디안을 이용하면 반지름에 대한 호의 길이의 비, 반지름과 중심각의 크기의 곱으로 간단하게 계산가능하다는 점을 이해하고 있음을 말해준다. 뿐만 아니라 예비교사들이 다소 어려워했던 과제인 라디안 각도기 만들기 과제가 도(°) 각도기보다 오히려 더 용이했다는 반응을 보였다. 민성이의 경우도 도(°)에 비해 라디안이 가지는 장점을 이와 동일하게 대답하였다. 이번 실험과정에서 도(°)대신에 라디안을 사용했을 때, 호의 길이를 구하는 보다 간단한 식을 얻을



[그림 IV-13] 도(°)와 라디안을 실생활 문제

수 있다는 라디안의 장점을 스스로 발견하는데 성공한 것이다. 또한 도(°)와 라디안의 공통된 속성을 묻는 질문에 두 학생은 각의 측도를 호의 측도로 설명하였다.

교사 : 그럼 말이지, 도와 라디안에 공통점이 있을까?
하진 : 둘 다 각을 재는 단위예요.
교사 : 그렇지, 또?
하진 : 공식이 있어요.
교사 : 공식이라니? 어떤?
하진 : 호의 길이를 구하는 공식이요.
교사 : 그렇구나, 혹시 각을 재는 방법에서는 공통점이 없을까?
하진 : 둘 다 호의 길이를 이용해요.

하진이는 도(°)와 라디안의 공통점으로 각의 측도 단위, 호의 길이를 측정할 수 있는 요소, 호의 길이를 이용한 각의 측도를 언급하고 있다. 이와 같은 반응은 이번 실험을 통해 두 학생이 육십분법과 호도법을 개념적으로 연결되는 대상으로 인식하게 되었음을 의미한다. 이들에게 라디안은 도(°)와의 변환공식을 통해 계산되어야 하는 부차적인 대상에 머무르지 않는다. 라디안은 도(°)와 차별화된 성질, 즉 여러 가지 식을 단순화할 수 있다는 장점을 가지고 있는 각의 측도이기도 하지만, 호의 길이를 이용한다는 점에서 도(°)와 공통된 속성을 가진다. 두 학생의 경우와 같이, 상호 변환 관계, 상대적으로 간단한 공식의 표현, 호의 측도를 이용한 각의 측도, 이 모든 것을 이해하는 것이 바로 도(°)와 라디안의 관계를 진정으로 이해하는 것이 될 것이다.

Ⅴ. 결 론

본 연구는 호의 측도에 의한 각의 측도라는 도(degree)와 라디안의 동일한 속성에 주목하여, 도(°)와 라디안을 호의 측도로 해석하는 것이 라디안과 각의 측정에 대한 개념적 이해에 어떠한 영향을 미치는지를 살펴보았다. 본 연구에서 실시한 예비교사의 내용지식 조사와 중학생에 대한 실험결과를 종합한 결론은 다음과 같다.

첫째, 호의 측도와 도(°)를 연결하는 경험은 도(°)와 라디안을 연속적으로 지도하는 교수학적 방안이 될 수 있다. 도(°)와 라디안의 공통적인 속성은 호의 측도로 해석가능하다는 점이다. 라디안이 반지름의 길이와 같은 호의 길이를 단위로 하여 원주를 분할한다면, 도(°)는 원의 둘레를 360등분하는 호의 길이를 기본 단위로 하여 원주를 분할한다. 상당수의 예비교사들은 호의 측도로 라디안을 이해하는 것에는 별 어려움이 없었던 반면에 도(°)를 호의 측도와 연결 지어 이해하는 것에는 어려움을 겪었다. 예를 들어, 호를 등분하는 아이디어로 라디안 각도기를 만드는 것에 성공한 예비교사 중에서도 도(°) 각도기 만들기에 동일한 아이디어를 적용하지 못하는 경우가 다수로 조사되었다. 이러한 결과는 예비교사들이 학교수학의 개인적 경험을 통해 도(°)를 호의 측도로 해석할 기회를 갖지 못했기 때문으로 판단된다. 반면에 실험과정에서 호의 측도로서 도(°)를 해석하는 경험을 한 중학생들은 호의 길이를 이용하여 임의의 각을 측정하였으며, 도(°) 각도기와 라디안 각도기에 동일한 아이디어를 적용할 수 있었다.

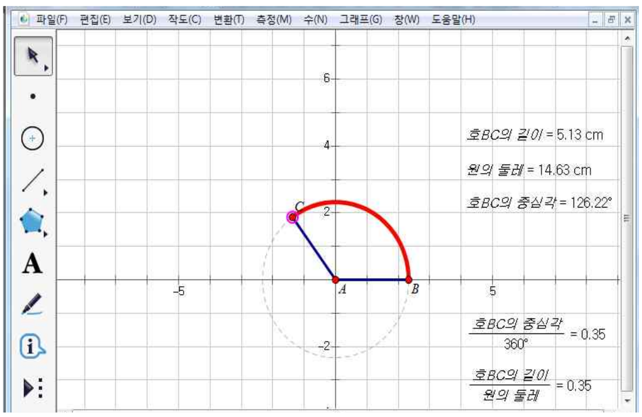
둘째, 도(°)의 개념을 호의 측도로 해석한 경험은 라디안의 이해에 긍정적인 영향을 미쳤다고 볼 수 있다. 이는 Moore(2013)의 주장과도 일치하는 것으로, 실험에 참여한 학생들이 중학생임에도 불구하고 라디안이라는 새로운 각의 측도에 대한 개념적 이해가 가능했던 이유는 도(°)를 호의 길이와 원주 사이의 양적 관계, 특히 곱셈적 관계로 해석했던 경험이 라디안에서도 연속적으로 적용 가능했기 때문이다. 따라서 호의 측도로 도

(°)와 라디안을 연속적으로 지도하는 것은 라디안의 개념적 이해를 도울 수 있는 방안이 될 수 있다.

셋째, 호의 측도로 각의 측도를 파악하는 과정은 ‘선형 측정’에 대한 개념적 이해를 가능하게 하였다. 본 연구에서는 각의 측정을 호의 길이라는 선형 측정으로 파악하였다. 학생들이 참여한 과제들은 Stephan & Clements(2003)가 제시한 길이 측정의 6가지 기본 개념인 분할, 단위 반복, 추이, 보존, 거리의 누적, 수와 측도 사이의 관계의 확인이 가능한 활동이었다. 학생들은 주어진 각을 단위 각으로 분할하는 것을 주어진 호를 1도(1°)와 1라디안에 대응하는 단위 호의 길이로 분할해야 하는 것으로 대체하였으며, 단위 호의 길이로 해당 호를 빈틈없이 겹침 없이 반복적으로 덮었다. 또한 90°, 180°, 360°, π라디안, 2π 라디안을 기준각으로 하여 각의 크기의 대소관계에 대한 추이적 관계를 이해하는 모습을 보였으며, 각과 호가 이동되더라도 각의 크기가 변화되지 않는다는 보존 개념을 인식하였다. 또한 첫 번째 단위 호의 길이의 시작점으로부터 마지막 반복의 끝점까지의 거리가 구하고자 하는 호의 측도라는 것을 인식하였으며, 단위 호의 길이의 개수를 ‘세는 활동’을 수행하여 수와 측도와의 관계를 파악하였다. 이번 실험을 통해 두 중학생은 단순히 각도기를 읽는 각의 측정 활동이 아닌 선형 측정의 기본 개념들을 확인해보는 측정 활동을 경험했다고 할 수 있다.

넷째, 각에 관한 다양한 문제에서 원의 맥락과 호의 등분 전략이 효과적인 문제해결전략임을 확인하였다. 예비교사들과 두 명의 중학생은 원의 맥락을 가지고 각도기 만들기 또는 임의의 각의 크기를 구하는 문제를 접근하였을 때, 보다 적절하게 답안을 완성하였으며, 각 단위로서 도(°)와 라디안을 호의 측도로 이해하였을 때, 다양한 문제 상황에서 유연한 적응력을 보였다. 또한 각의 등분 보다는 호의 등분 전략을 활용한 학생들이 불변량을 인식하는데 더 높은 성공률을 보였다.

다섯째, 각과 호의 측도 사이의 관계를 탐구할 수 있는 직접적인 조작활동을 제공하는 것이 각의 측정 개념에 대한 이해에 도움을 줄 수 있다. 본 연구에서는 각도기 만들기 과제나 임의의 각의 측정 과제를 통해 예비교사와 학생들로 하여금 호의 길이와 원주 사이의 양적 관계를 탐구할 수 있는 조작활동을 제공하였다. 예를 들어, 평소 당연시했던 도(°) 각도기와 미처 생각하지 못했던 라디안 각도기를 만드는 활동이 각의 측정의 개념과 원리에 대한 학생들의 수학적 사고를 자극하는 역할을 하였다고 볼 수 있다. 그런데 본 연구에서 실과 자, 컴퍼스 등의 도구를 사용



[그림 V-1] 각과 호의 측도의 관계를 탐구하는 공학의 예

한 부분은 공학을 사용한 프로그램을 통해 보다 다양하고 역동적으로 탐구할 수 있는 기회를 제공할 수 있다(Klein, Hamilton, 1997). [그림 V-1]은 Moore(2013)의 아이디어를 바탕으로 중심각과 호의 길이, 원주 사이의 양적 관계를 탐구할 수 있도록 연구자들이 GSP 프로그램을 이용해서 시범적으로 만든 자료이다. 공학을 활용한다면 직접 측정에서 발생할 수 있는 오차를 줄일 수 있고 즉각적으로 계산할 수 있도록 도울 수 있으며 반지름의 길이나 호의 길이 또는 중심각의 크기를 다양하게 변화시켜 수학적으로 다양한 경험을 제공함으로써 호의 측도로 각의 측도를 이해하는데 도움을 줄 수 있다.

본 연구 결과로부터 학교수학의 각의 측정에 대한 교수학적 시사점을 도출할 수 있다. 먼저 학교수학에서 호의 측도와 도(°)를 연결하는 기회를 제공할 필요가 있다. 이를 위해서는 도(°)를 호의 측도로 이해할 수 있는 교육과정상의 변화가 필요하다. 그동안 호의 측도에 의한 각의 측도라는 측면이 라디안에서만 강조되어 왔다고 볼 수 있으며, 결과적으로 육십분법과 호도법은 상호 변환 관계만 존재할 뿐 전혀 개념적으로 연결되지 못하는 별개의 대상으로 인식되어왔다. 각의 측도로서의 도(°)와 라디안을 호의 측도라는 공통적인 속성으로 파악하는 것은 라디안의 개념적 이해를 돕는 효과적인 방안이기도 하다. 이에 도(°)와 라디안의 상호 변환 관계만을 논하는 현재의 기술 방식을 벗어난 교과서의 변화된 모습이 요청된다. 또한 각의 측도로서의 라디안의 속성을 좀 더 부각시켜 지도할 필요가 있다. 라디안은 실수로서의 속성과 각의 측도로서의 속성을 이중적으로 가지는 개념이다. 그러나 라디안의 실수 속성을 강조하는 과정에서 라디안의 보다 기본적 속성이라고 할 수 있는 각의 측도로서의 의미가 오히려 약화되고 있는 듯하다. 이에 대한 대안으로 단위 호의 길이, 단위 라디안에 주목하게 하고, 이러한 단위로 호와 원주, 중심각을 분할하고, 단위 반복을 하는 등 측정의 기본 개념에 충실한 교수・학습방안을 모색하는 것을 생각해볼 수 있다.

앞으로 본 연구의 결과를 바탕으로 라디안을 비롯한 여러 가지 각의 측도에 대한 학습의 어려움을 개선하는 다양한 연구가 이루어질 기대한다.

참고문헌

강미광(2011). 호도법에 관한 교수학적 고찰. **수학교육, 50**(3), 355-365.

강향임, 최은아(2015). 예비교사의 라디안에 대한 이해. **학교수학, 17**(2), 309-329.

교육과학기술부(2012), 교육과학기술부 고시 제 2011-361호(별책 8) **수학과 교육과정**.

교육부(2013a). **수학 3-1**. 서울: (주)천재교육.

______(2013b). **수학 4-1**. 서울: (주)천재교육.

______(2014). **교사용지도서 수학 4-1**. 서울: (주)천재교육.

김원경, 조민식, 방금성, 김수미, 배수경, 오혜정, 지은정, 최형권, 황정하(2013). **중학교 수학 1**. 서울: (주)비상교육.

남진영, 임재훈(2008). 라디안에 대한 교수학적 분석. **수학교육학연구, 18**(2), 263-281.

박교식(2010). 우리나라 초등학교 수학과에서의 각도 관련 내용의 분석과 비판. **학교수학, 12**(1), 45-60.

송은영(2008). **삼각함수 개념의 지도에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

유재근(2014). 삼각함수 개념의 역사적 분석. **수학교육학연구, 24**(4), 607-622.

이종희(2001). 각 개념에 대한 수학교육적 분석. **학교수학, 3**(1). 25-44.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 최홍원,

민진원, 김호경(2014). **미적분II**. 서울: (주)금성출판사.

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. *International Journal Education in Science an Technology, 37*(7), 857-878.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2000). **수학의 역사(상)**. (양영오・조윤동, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1968년 출판).

Cajori, F. (1983). **수학의 역사**. (정지호, 역). 서울: 창원사. (영어 원작은 1925년 출판).

Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. Ph.D. dissertation, University of Iowa, USA.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Heath, T. (1998). **기하학원론**. (이무현, 역). 서울: 교우사. (영어 원작은 1908년 출판).

Hilbert, D. (1902). *The foundation of geometry*. The Open Court Publishing Company.

Klein, R. J. & Hamilton, I. (1997). Using Technology to Introduce Radian Measure. *The Mathematics Teacher, 90*(2), 168-172.

Krainer, K. (1993). Powerful tasks: A contribution to a high level of acting and reflecting in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 65-93.

Matos, J. (1990). The historical development of the concept of angle. *The Mathematics Educator, 1*(1), 4-11.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 225-245.

Shreves, J. W. (1969). Angle, In J. K. Baumgart (Eds), *Historical topics for the mathematics classroom*, Reston, VA: NCTM.

Stephan, M. & Clements, D. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp.3-16). Reston, VA: NCTM.

Yeshurun, S. (1982). The angle: a logical gap in teaching geometry and trigonometry and its remedy. *International Journal Education in Science an Technology, 13*(2), 133-138.

Understanding of Degree and Radian by Measuring Arcs

Choi, Eun Ah (Jeonju Ongoul Middle School)
Kang, Hyangim (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to examine how the learning experience understanding degree and radian as the measurement of arc affects the conceptual understanding of radian and measuring angle. For this purpose, we investigated pre-service teachers' understanding about measurement of angle using a length of arc, and then conducted a teaching experiment with two middle school students. The results of analyzing pre-service teachers' and students' response are as follows. Students' experience interpreting the concept of degree into measurement of arc had a positive effect on understanding of radian and students' learning process in which they got measurement of angle as measurement of arc enabled conceptual understanding of 'linear measuring'. Also a circle context and a strategy dividing by arc operated as effective strategies for solving various problems about an angle. Finally, we confirmed that providing direct manipulative activities as a chance to explore relationships between an angle and arc measure can help students' conceptual understanding of measuring angle.

* Key Words : measurement of angle(각의 측도), measurement of arc(호의 측도), quantitative relation(양적 관계), degree(도), radian(라디안), the concept of measuring angle(각의 측정의 개념)

논문접수 : 2015. 8. 10
논문수정 : 2015. 9. 7
심사완료 : 2015. 9. 7