

구성주의 관점에서 각과 삼각형의 분류에 관한 초등 교과서 및 교사용지도서 분석

노 은 환 (진주교육대학교)

강 정 기 (김해대곡중학교)[†]

분류 활동은 개념 형성과 직결되는 중요한 활동이다. 따라서 분류는 학습자 중심적인 교수를 통해 의미 충실한 학습이 이루어질 필요가 있다. 하지만 분류와 관련한 교수·학습이 '학습자 중심'이라는 구성주의 철학을 잘 반영하고 있지 않다는 의구심이 제기된다. 이에 본 연구에서는 각과 삼각형의 분류와 관련한 초등 교과서 및 교사용지도서의 내용을 구성주의 관점에서 비판적으로 분석해 보았다. 그 결과 각의 분류에서는 공동체의 합의에 의한 합리적 기준 설정의 기회가 제공되지 않는 문제점이 있었다. 삼각형의 분류는 다양성의 측면에서 다소 급진적인 형태를 띠고 있다는 문제점이 있었다. 또한 삼각형의 분류는 학생 반응 예측에서 이미 그 지식을 습득한 사람에게나 가능한 반응을 제안하는 경우를 접할 수 있었다. 그리고 계층적·분할적 분류에 대한 선택과 논의의 기회가 제공되지 않는 단점을 지니고 있었다. 이러한 특징을 바탕으로 '학습자 중심' 원칙의 충실한 반영, 학생 반응에 대한 신중한 예측, 결과보다 과정에 주목하는 교수를 지향할 것을 제안하였다.

I. 서론

분류란 일반적으로 종류에 따라서 가르치는 것으로, 논리에서는 유개념의 외연에 포함된 종개념을 명확히 구분하여 체계적으로 정리하는 것(국립국어원, 2014)으로, 수학교육에서는 수에 대한 분류, 삼각형의 분류, 사각형의 분류 등으로 주로 언급되어 왔다. 즉, 분류란 여러 대상을 일정한 체계에 의하여 구분하여 정리하는 활동을 표현하기 위한 용어로 볼 수 있다.

인간은 경험하는 것을 의미 있는 것으로 만들기 위해 필연적으로 다양한 것을 범주화(categorization)하는 상황에 직면하게 된다. 이를테면, 여러 마리의 새를 보았다고 할 때 날개 그 자체로서 이해하는데 그치는 것이 아니라, '새'라는 범주를 형성함으로써 경험한 대상을 개념화(conceptualization)하는 시도를 하게 된다(신현정, 2000). 이처럼 분류는 개념 형성을 위한 필수 불가결한 인지 처리 과제 중 하나에 해당한다.

수학에서도 분류는 개념 형성을 위한 활동으로 다양한 영역에서 등장하게 된다. 대표적으로 소수의 분류와 실수의 분류를 들 수 있다. 실수는 유리수와 무리수로, 유리수는 정수와 정수가 아닌 유리수로, 정수는 자연수와 0 그리고 음의 정수로 분류하는 활동을 통해 실수 개념이 체계적 모습으로 정착된다. 또한 소수 역시 유한소수와 무한소수, 무한소수는 다시 순환소수와 순환하지 않는 무한소수로 분류하는 활동을 통해 소수 개념 역시 체계적 정립이 가능하게 된다.

따라서 분류 활동은 초등학교에서부터 개념 형성을 위해 강조된다. 2009 개정 교육과정(교육과학기술부, 2011)에 따르면 초등학교 1~2학년 도형 단원의 교수·학습상의 유의점에 다음과 같이 명시하고 있다. '입체도형

* 접수일(2015년 4월 19일), 심사(수정)일(1차: 2015년 6월 17일, 2차: 2015년 6월 30일), 게재확정일(2015년 7월 6일)

* ZDM 분류 : U22

* MSC2000 분류 : 97U20

* 주제어 : 구성주의, 각의 분류, 삼각형의 분류

† 교신저자 : jeonggikang@gmail.com

의 모양이나 평면도형의 모양을 다룰 때 모양의 특징을 직관적으로 파악함으로써 모양을 분류할 수 있게 한다.’ 이러한 유의점은 학생 직관에 의존한 분류 활동이 이루어짐으로써, 개념 형성을 위한 발판을 마련하고자 하는 의도를 지닌다.

학생 스스로 짚어보고 구별하여 분류하는 활동은 도형 영역에서 강조되어야 하는 활동 중의 하나이며, 특히 도형 영역은 다른 내용 영역에 비해 구체적 조작 활동이 많이 사용되는 영역이다(신희경·백석운, 2004). 또한 남승인 외(2004)는 다양한 도형을 분류하는 활동은 기하적 사고를 소개하는 좋은 방법이라고 주장하였다. 비단 분류 활동은 도형 영역에 그치지 않고, 초등학교 1~2학년군 확률과 통계 영역에서도 강조되고 있으며 그 범위를 넓혀가고 있다. 2009 개정 교육과정(교육과학기술부, 2011)에 따르면, 분류 활동의 대상으로 교실 및 주변 사물을 이용하며, 분류하기 위한 기준이 정해져 있는 경우뿐만 아니라 자신이 스스로 분류 기준을 정하는 경우를 함께 다루어 의사소통을 신장시킬 것을 명시함으로써 그 중요도는 날로 높아져 가고 있다.

한편, 전통적인 교실 수업에서 교사들은 학습자를 외부 자극에 반응하는 수동적인 존재로 인식하고 지식 전수자로서의 역할에 초점을 맞추었다. 그러나 이러한 관점은 수동적 학습을 낳아 학습부진아를 포함한 학생들이 스스로 지식을 구성하는 경험을 박탈당하는 결과를 초래하였다. 이에 대한 반성으로 학습자가 지식 구성의 주체로서 활동 가능한 교실 수업을 강조한 구성주의가 등장하였다. 구성주의는 모든 학습자가 지식을 구성할 수 있는 지적 능력을 갖춘 것을 인정하며, 수업을 할 때 교사는 수업 중 특정 지식을 전달할 목적으로 설명해서는 안 되며 학습자 스스로 지식을 구성할 수 있도록 도와주는 조력자 역할을 해야 한다고 주장한다(정현실·김진호, 2013).

이러한 구성주의 사조에 힘입어 학습 현장에서 ‘학습자 중심’ 교육을 실천하려는 움직임(김진호, 2012, Letterrell, 2008, Small, 2012)이 여러 부분에서 나타나고 있다. 하지만 학습의 중심을 학습자로 이행하려는 구성주의 관점의 시도가 분류 활동 전반에서 올바르게 구현되고 있을지 의구심이 제기된다. 이를테면, ‘초등학교 교과서의 분류 활동은 구성주의 철학을 잘 반영한 전개인가?’와 같은 의문이 제기될 수 있다. 실제로 최병훈 외(2006)는 이러한 의구심에서 출발하여 우리나라 교과서에서 도형의 개념 도입 시 분류하기의 사고 기능을 찾아볼 수 없다는 문제점을 지적한 바 있다. 반면, 그들은 우리나라와 달리 싱가포르에서는 도형 영역에서 수학적 사고활동을 위해 분류하는 활동을 강조하고 있음을 지적하였다. 물론 최병훈 외(2006)의 연구가 2006년의 연구임을 감안한다면 많은 변화가 예측되지만, 학생 중심의 분류 활동이라는 관점이 충실히 반영되어 있을지 여전히 의문이 남는다.

본 연구는 이와 같은 문제의식에서 출발한다. 즉, ‘현재의 각과 삼각형의 분류와 관련한 초등 수학의 내용이 ‘학습자 중심’이라는 구성주의의 철학을 충실하게 반영하고 있는가?’라는 의문에서 출발한다. 이에 본 연구는 각과 삼각형의 분류와 관련한 초등 교과서를 분석해 봄으로써 이 물음에 대한 숙고의 기회를 갖고자 한다. 이를 위해 먼저, 구성주의 핵심 요소 그리고 분류와 관련한 교육과정의 변화 동향을 짚어볼 것이며, Villiers(1994)의 다각형의 분류에 대한 두 가지 이론적 관점을 검토할 것이다. 이 토대 위에 각과 삼각형의 분류와 관련한 초등 교과서 내용을 구성주의의 관점에서 비판적으로 분석할 것이며, 비판적 분석을 바탕으로 초등 교과서 지도에 관한 개선 방향을 제안할 것이다.

II. 선행 연구

1. 구성주의

객관주의는 모든 학습자가 동일한 인지 구조를 가지고 있다는 전제 아래 동일한 학습 과제나 교수 매체를 통

한 敎수·학습은 동일한 성과를 산출할 수 있다고 가정하고 있다. 그러나 실제로 各개인의 학습 경험은 다양하며 학습 능력이나 속도도 학습자에 따라 다른 것이 현실이다(남승인, 1998). 그럼에도 불구하고 전통적 수업에서 敎사 는 학습자를 지식 전수를 위한 수동자로 인식하고 지식을 전수하기에 급급하였으며, 그 결과 전통적 敎실 현 장은 敎사 주도의 지식 전달이 초점이 되어 왔다(정현실·김진호, 2013).

그에 반해 구성주의에서 학습자는 지식을 능동적으로 구성할 수 있는 주체이므로, 이 사조에서는 학습자 중 심의 수업을 강조한다. Piaget은 조작적 구성주의의 대표자로 학습자를 자신의 인지구조에 따라 환경과 상호 작 용하며 능동적으로 지식을 구성할 수 있는 대상으로 보았다. 따라서 구성주의는 학생들이 구체적 조작 활동을 통하여 학생 스스로 수학 지식을 구성할 수 있도록 도와주어야 한다는 입장을 취한다(Kamii, 1985).

이런 이유로 구성주의에서 진정한 수학적 활동은 능동적 행동 용어로 표현되곤 한다. 이를테면, 원리 규준을 비롯한 수학 敎育의 개혁을 주장하는 문헌에 자주 사용되는 행동 용어는 ‘탐구하다, 표현하다, 설명하다, 조사하 다, 형식화하다, 예상하다, 추측하다, 발견하다, 만들다, 해결하다, 구성하다, 묘사하다, 정당화하다, 검증하다, 사 용하다’와 같은 능동적 표현으로 나타난다(Van de Walle, 2008). 이러한 행동 용어는 학생들이 수업 시간에 수동 적인 관찰자에 머물지 않고 능동적으로 수학적 행동과 사고를 하면서 지식을 구성하는 주체자임을 보여준다.

학습의 능동적 주체라는 측면을 부각하기 위해 구성주의 관점에서 敎사의 역할은 학생들 스스로의 지식 구성 활동과 학생들 사이의 상호작용이 원활히 이루어질 수 있는 敎실 환경과 여건을 조성해 주는 것이 될 것이다. 이는 전통적 구성주의와 사회적 구성주의 사이의 절충을 통한 敎수라 볼 수 있다. 즉, 各개인의 구성적 활동에 초점을 둔 전통적 구성주의적 접근과 공동체의 의사소통을 통한 지식 획득이라는 사회문화적 접근 모두에 가치 를 두고 있는 것이다. 따라서 敎사는 지식의 전수자가 아니고, 학생들 各개인의 경험적 기술과 지식의 가치를 인 정하고, 그들의 목소리와 관심이 반영되어 있는 형태로 학습 결과를 유도하는 것이 필요하다(이선호, 2006). 위 내용으로부터 구성주의와 객관주의는 <표 II-1>과 같이 비교될 수 있다.

<표 II-1> 구성주의와 객관주의의 원리 비교

	객관주의	구성주의
수업의 중심	敎사	학습자
敎사의 역할	진리 전달자	학습 보조자, 학습 촉진자, 코치
敎수 설계	결정된 내용을 효과적으로 전달하는 것	학습이 일어날 수 있는 환경 설계
敎수의 초점	사실의 이해	지식의 전이 및 활용
지식의 형태	사실적 정보	고차적 인지 전략
주된 敎수 방법	강의식	문제중심, 토의식, 발견학습

구성주의가 충실히 반영되기 위해서는 그 지식을 습득한 敎사의 관점이 아닌, 학생의 관점에서 지식이 구성 될 수 있는 환경이 조성되어야 한다. 따라서 예상되는 학생의 반응은 학습자 중심적이어야 하며, 본 연구에서는 이 관점을 敎과서 분석을 위한 하나의 관점으로 삼고자 한다.

2. 분류와 關連한 敎育 방향의 변화와 다양성의 허용

구성주의 사조는 우리나라 敎育 과정에도 반영되고 있으며, 분류와 關連하여 다음과 같은 내용을 확인할 수 있다. 2009 개정 敎育과정 에 따른 수학과 敎育과정 최종보고서(한국과학창의재단, 2011)에 따르면, 초등학교 1~2 학년 군에 대한 도형 영역의 敎수·학습의 유의점을 다음과 같이 제안함으로써 분류에 대한 학습자의 권한의 폭 을 넓여가는 모습을 확인할 수 있다.

입체도형의 모양이나 평면도형의 모양을 다룰 때 모양의 특징을 직관적으로 파악함으로써 모양을 분류할 수 있게 한다. 이때 분류된 모양에 모양의 이름(상자 모양, 둥근기둥 모양, 공 모양, 네모, 세모, 동그라미 등)을 붙여 범주화하지 않게 한다.

구체적으로 여러 가지 삼각형에 대하여 위와 같이 이름 짓기에 앞서 분류 활동이 선행되어야 함을 강조하고 있다. 이러한 교육과정의 강조점은 이미 만들어진 지식을 있는 그대로 전달하는 교수자 중심의 수업 대신, 그 구성 과정을 학습자가 직접 경험함으로써 지식 구성의 과정에 깃든 정신을 이해하는 단초를 마련하고자 하는 학습자 중심으로의 수업으로의 전환을 함의한다. 이는 분류 활동 자체를 고려하지 않은 2007년 개정 교육과정에서의 방향과 비교해 보면 더욱 확연하다.

<표 II-2> 여러 가지 삼각형의 개념 지도와 관련한 2007에서 2009로의 개정 교육과정 변화

2007년 개정 교육과정	2009년 개정 교육과정
각과 여러 가지 삼각형(4학년) <ul style="list-style-type: none"> 이등변삼각형과 정삼각형을 이해한다. 예각과 둔각의 뜻을 알고, 예각삼각형과 둔각삼각형을 이해한다. 	여러 가지 삼각형(1~2학년) <ul style="list-style-type: none"> 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 <u>분류 활동을 통해</u> 이등변삼각형, 정삼각형을 이름 짓고 이해한다. 여러 가지 모양의 삼각형에 대한 <u>분류 활동을 통해</u> 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형을 이름 짓고 이해한다.

또한 2007 개정 교육과정에서의 분류하기 활동에 관한 소영역 역시 같은 식의 변화 방향을 보여준다.

<표 II-3> 분류하기 소영역 지도와 관련한 2007에서 2009로의 개정 교육과정 변화

2007년 개정 교육과정	2009년 개정 교육과정
분류하기(1학년) <ul style="list-style-type: none"> 사물이나 사람을 미리 정한 한 가지 기준에 따라 분류하여 각각의 개수를 셀 수 있다. 	분류하기(1~2학년군) <ul style="list-style-type: none"> 교실 및 생활 주변에서 사물을 <u>정해진 기준 또는 자신이 정한 기준으로</u> 분류하여 개수를 세어보고, 기준에 따른 결과를 이야기할 수 있다.

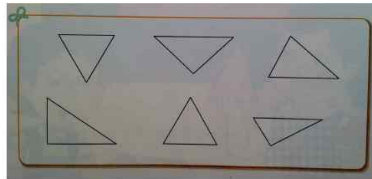
<표 II-3>에서 주목할 점은 ‘미리 정한 기준’ 대신, ‘정해진 기준 또는 자신이 정한 기준’으로의 변화에 관한 부분이며, 이는 학습자의 주체적 활동을 강조한 구성주의 사조가 반영된 결과로 볼 수 있다.

이러한 교육과정의 변화에 힘입어 교과서 역시 ‘학습자 중심’으로 변천을 거듭하고 있다. 대표적으로 김민경 외(2012)는 다양성*의 관점에서 한국과 미국의 교과서를 비교하면서 한국의 교과서에서 삼각형 단원의 활동 문제를 분석하였으며, 주어진 삼각형의 분류 기준을 학생 스스로 생각하여 결정하도록 한다는 점에서 다양성을 인정하였다. 즉, 분류 기준을 결정하기 위해서는 도형의 여러 가지 요소를 고려해야 하기 때문에 다양성이 인정된

* 다양성이란 문제 상황이 다양한 영역이나 구조와 연결된 복합적인 형태를 띠고 있는지, 다양한 해결방법으로 문제를 해결할 수 있도록 제시되어 있는지를 보는 요소이다. 즉, 수학 내적, 외적 연계성과 다양한 해결 방법의 가능성이 곧 다양성이다 (김민경 외, 2012).

다고 주장하였다. 그런데 이러한 분석에 사용된 초등 교과서가 2010년에 작성된 교재임에 주목할 필요가 있으며, 현재의 교과서는 이러한 지도와 차별된다. 분류 기준 설정의 측면에서 학생 반응의 다양성이 예상되며, 이에 본 연구에서는 다양성의 반영 정도를 교과서 분석의 한 관점으로 설정하여 다루고자 한다.

윤지는 여러 가지 도형 피즐 조각을 가지고 놀다가 삼각형 모양의 피즐 조각들만 모아 보았습니다. 모아 놓은 삼각형 모양들을 보고 삼각형들의 모양이 매우 다양하다는 사실을 알았습니다. 윤지는 여러 가지 삼각형들을 비슷한 것끼리 분류해 보기로 하였습니다.



- * 삼각형을 몇 가지로 분류할 수 있는지 생각해 보시오.
- * 왜 그렇게 생각합니까?
- * 변의 길이에 따라 삼각형을 몇 가지로 분류할 수 있는지 생각해 보시오.
- * 왜 그렇게 생각합니까?

[그림 11-1] 삼각형의 분류(교육과학기술부, 2010)

이상에서 분류와 관련한 교육과정은 구성주의 사조를 반영하는 방향으로 점진적으로 변화하고 있음을 알 수 있으며, 결국 교육과정을 토대로 만들어지게 되는 교과서 역시 구성주의 사조를 충실히 반영하는 방향으로 수정되고 있음을 알 수 있다.

3. Villiers의 도형 분류에 대한 두 가지 관점

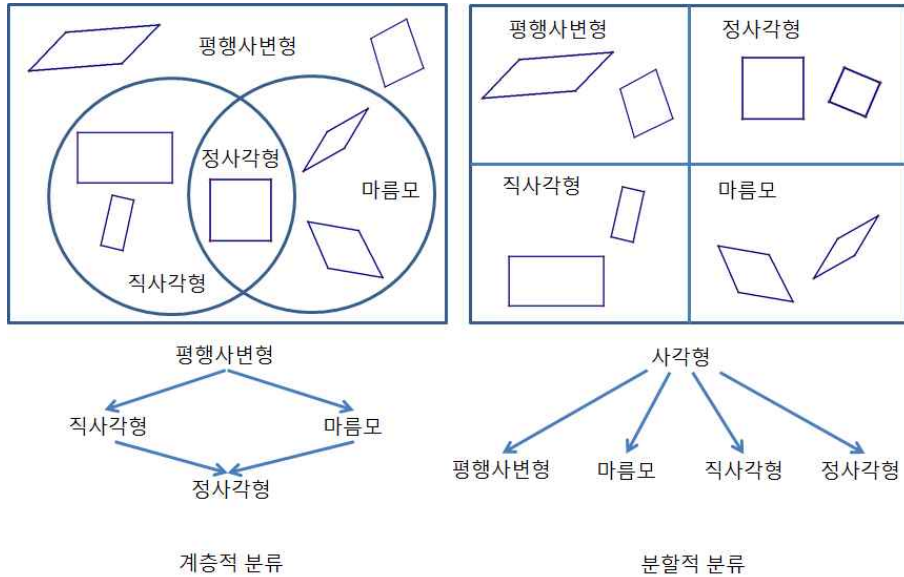
수학에서 이해는 크게 도구적 이해(instrumental understanding), 관계적 이해(relational understanding), 논리적 이해(logical understanding)로 주로 구분되어 왔다(Skemp, 1976; Byers & Herscovics, 1977). 그러나 Villiers(1994)는 이러한 이해의 분류에는 기능적인 이해 즉, 특별한 수학적 내용이나 과정의 역할, 기능 또는 가치에 대한 이해가 결여되었음을 지적하였다. 그는 이와 같은 이해를 기능적 이해(functional understanding)이라 칭하였으며, 이를 돕기 위한 하나의 소재로 사각형의 분류에 대해 논의한바 있다. 본 절에서는 Villiers의 1994년 논문 「The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals」의 내용을 중심으로 도형의 분류에 대해 논의해 보고자 한다.

Villiers는 다각형의 분류를 크게 계층적 분류(hierarchical classification)와 분할적 분류(partition classification)로 구분한다. 계층적 분류는 보다 특별한 개념이 보다 일반적 개념의 부분 집합이 되게 하는 분류 양식을 말한다. 수학에서 분류는 이와 같은 방식으로 구분된 것이 많이 있다. 대표적으로 실수의 분류를 들 수 있다. 실수는 유리수와 무리수, 그리고 유리수는 정수와 정수가 아닌 유리수 등으로 분류되며, 이는 특별한 개념이 일반적 개념의 하위 요소가 되는 방식으로 곧 계층적 분류에 해당한다.

이와는 대조적으로 분할적 분류 역시 수학에서 보이는 분류 양식 중 하나이다. 분할적 분류는 다양한 하위 요소가 서로 공유하는 부분이 전혀 나타나지 않는 형태의 분류를 의미한다. 이를테면, 자연수를 3으로 나눈 나머지의 관점(Module 3)에서 나머지가 0인 경우, 나머지가 1인 경우, 나머지가 2인 경우라는 세 가지 범주는 서로 공유하는 부분이 전혀 나타나지 않으므로 분할적 분류에 해당한다.

Villiers는 사각형의 계층적 분류와 분할적 분류를 [그림 11-2]와 같이 도식화하여 그 차이점을 시각적으로 보

여주고 있다.



[그림 II-2] 사각형에 대한 계층적 분류와 분할적 분류(Villiers, 1994)

그런데 이러한 분류는 정의하기(defining)와 독립적으로 발생하는 것이 아니라 연동하여 발생하게 된다. 예를 들면, 계층적 분류에서 사다리꼴은 ‘적어도 한 쌍의 대변이 평행한 사각형’으로 정의됨으로써 평행사변형을 사다리꼴로 분류 가능하도록 조정될 수 있다. 반면, 분할적 분류에서 사다리꼴은 평행사변형을 사다리꼴에서 배제할 의도로 ‘단지 한 쌍의 대변만이 평행한 사각형’으로 정의 가능하다. 이런 측면에서 Villiers는 분할적 분류로 사각형을 분류하게 되면 모든 비예(non-examples)를 배제시키기 위하여 충분한 정보를 갖추어야 한다는 강한 압박을 받게 된다고 말한다. Villiers는 이런 점에서 사각형은 계층적 분류가 필요하며, 그 장점을 다음과 같이 열거하고 있다.

- 보다 경제적인 개념 정의와 정리의 공식화로 이끈다.
- 연역적 체계와 보다 특별한 개념의 성질 유도를 간소화한다.
- 문제 해결에서 유용한 개념적 스키마를 제공한다.
- 때때로 대안적 정의와 새로운 명제를 제안한다.
- 유용한 총체적 관점을 제공한다.

이들 중 첫 번째 장점을 Villiers는 계층적 분류의 가장 중요한 이점이라고 말한다. 앞서 언급한 바와 같이 사다리꼴에 대한 계층적 분류에 의한 정의는 마름모, 직사각형, 정사각형을 배제해야 하는 분할적 분류에 의한 정의에 비해 더 간결함을 알 수 있다. 또한 정리 역시도 분할적 분류에 비해 계층적 분류에서 간소화될 수 있음을 <표 II-4>를 통해 쉽게 알 수 있다.

Usiskin et. al.(2008) 역시도 삼각형의 정의가 포함적(inclusive)이나 배제적(exclusive)인가에 따라 삼각형과

관련한 정의와 정리가 변할 수 있음을 지적하고 있다. 포괄적 정의는 보다 일반적인 것에서 특별한 것으로 계층적 위계를 형성하는 반면, 배제적 정의는 보다 일반적인 대상을 보다 특별한 대상으로 분할하는 과정을 필요로 한다. 이를테면, 모든 삼각형은 부등변삼각형, 이등변삼각형, 정삼각형으로 분할되며, 이 경우 부등변삼각형은 ‘어떤 두 변도 길이가 같지 않은 삼각형’, 이등변삼각형은 ‘정확하게 두 변의 길이만 같은 삼각형’, 정삼각형은 ‘세 변의 길이가 같은 삼각형’으로 정의된다. 따라서 분할적 분류의 관점에서 이등변삼각형과 관련한 정리는 <표 11-4>와 같이 변모되어야 한다.

<표 11-4> 계층적 분류와 분할적 분류에서의 정리

계층적 분류에서의 정리	분할적 분류에서의 정리
어떤 사각형 ABCD의 각 변의 중점을 각각 E, F, G, H라고 한다. 이때 각 변의 중점을 차례로 연결한 사각형 EFGH는 평행사변형이다.	어떤 사각형 ABCD의 각 변의 중점을 각각 E, F, G, H라고 한다. 이때 각 변의 중점을 차례로 연결한 사각형 EFGH는 평행사변형 또는 직사각형 또는 마름모 또는 정사각형이다.
선분 AB 위에 있지 않은 한 점 M이 $\overline{AM} = \overline{MB}$ 를 만족하면 삼각형 AMB는 이등변삼각형이다.	선분 AB 위에 있지 않은 한 점 M이 $\overline{AM} = \overline{MB}$ 를 만족하면 삼각형 AMB는 이등변삼각형 또는 정삼각형이다.

이상에서 Villiers가 제시한 다각형에 관한 두 가지 분류의 관점에 대해 살펴보았다. 현재 사각형과 관련한 분류에서는 Villiers가 지적한대로 다각형의 분류에 대해 분할적 관점보다 계층적 관점이 보다 많은 장점을 갖기에 현재 우리나라 교과의 도형 지도 역시 같은 방식을 취한다. 그러나 도형 외에도 다양한 분류가 존재하는 만큼 특정 분류에 대한 편협한 시각을 갖추는 것은 바람직하지 못하다.

Villiers의 두 가지 분류에 대한 비교 및 분석에서 보듯, 두 가지 분류에 대한 비교 및 분석은 그 동안 당연시해 오던 것에 대한 장점을 인식하는데 유용함을 알 수 있다. 이런 측면에서 각과 삼각형의 분류와 관련한 교수·학습에서 당연시해 오던 것에 대한 반성의 기회를 가질 필요가 있을 것이다. 특히 우리의 현 교수에서 놓치고 있는 부분은 어떤 것이 있으며, 각과 삼각형의 분류에서 진정으로 가르쳐야 할 요소로는 어떤 것이 있는지에 대해 재고해 볼 필요가 있다.

현재 교과서의 분류 방식이 갖는 기능적 이점을 두드러지게 만들기 위한 노력으로, Villiers가 제안한 두 가지 분류에 관한 비교 및 분석 활동을 학습에 적극 반영할 필요가 있다. 분류에 관한 기능적 이해를 돕기 위해서는 계층적 분류와 분할적 분류 중 어느 것을 선택할 것인지에 대한 논의와 결정의 기회가 학생들에게 제공될 필요가 있으며, 이는 곧 ‘학습자 중심’의 분류 활동 구현의 토대가 될 것이다. 이에 본 연구에서는 계층적 분류와 분할적 분류에 대한 비교 및 분석 활동을 통해 학습자에게 분류 선택의 기회가 제공되는 정도를 검토하고자 하며, 이는 교과서를 분석하는 또 하나의 관점으로 작용할 것이다.

III. 연구 방법

1. 분석 대상

수학적 지식이 배경화와 개인화 과정을 거쳐 학교 수학이라는 교수학적인 지식으로 변화하였을 때, 수학 교과서는 이러한 변형된 지식을 담아 간직하는 전형적 방법이 된다. 따라서 학교 수학의 특성을 알아보는 좋은 방

범 중의 하나는 수학 교과서를 분석하는 것이다(김현정·강완, 2008). 본 연구 역시 각과 삼각형의 분류와 관련한 수학적 지식이 학교 수학에서 어떠한 교수학적 변환으로 지도되는지를 구성주의의 관점에서 비판적으로 분석해 보고자 하므로 첫 번째 분석의 대상은 교과서이다. 특히 각과 삼각형의 분류와 관련한 초등학교 수학 4-1(교육부, 2014a)이 주요 분석의 대상이다. 동시에 초등학교 수학 4-1 교사용지도서(교육부, 2014b)는 교과서에 병행되는 교사들을 위한 주요 지침서이므로 이 역시 분석의 대상으로 삼았다.

2. 분석틀

앞서 논의한 결과로 부터 각과 삼각형의 분류에 대한 초등학교 교과서를 ‘학습자 중심적인가?’의 관점에서 비판적으로 분석하기 위해 다음의 분석틀(<표 III-1>)을 개발하였다.

<표 III-1> 학생 중심 반영에 대한 비판적 분석을 위한 준거틀

항목	세부 사항
학생 반응 예측	학생 반응에 대한 예측이 학생 중심적인가를 평가한다. 즉, 그 분류를 처음 접하는 학생에게 가능한 반응인지, 아니면 이미 그 분류를 아는 학생에게 가능한 반응인지를 점검한다.
다양성	분류 기준 설정에서의 다양한 학생 반응에 대한 허용 정도를 평가한다. 즉, 다양한 학생 반응을 존중하여 그것에 대한 지속적 논의를 시도하는지를 점검한다.
타 분류와의 논의	Villiers(1994)가 논의한 계층적 분류와 분할적 분류에 대한 선택과 논의의 기회 제공 정도를 평가한다. 즉, 계층적 분류와 분할적 분류에 대한 이점과 한계를 논의하여 어느 것을 선택하는 것이 합리적인지에 대한 논의를 시도하는지를 점검한다.

학생 반응 예측은 이미 지식을 갖춘 교사가 아닌 지식을 형성하는 과정 중인 학생 중심적인가를 평가하는 것이며, 다양성은 다양한 학생 반응을 허용하는가를 점검하는 것이며, 타 분류와의 논의는 계층적 분류와 분할적 분류에 대한 학생들의 선택과 논의의 기회 제공 정도를 평가하는 것이다. 따라서 이들은 모두 ‘학습자 중심’이라는 주요 관점으로 수렴하는 준거에 해당된다.

3. 분석 방법

먼저 분석틀을 설정하기 위한 목적으로 ‘각의 분류’, ‘삼각형의 분류’, ‘구성주의’라는 세 개의 키워드를 중심으로 관련 연구 및 문서를 검토하였다. 이를 통해 ‘삼각형의 분류’와 관련해서 김민경 외(2012), 김현정·강완(2008), 남승인 외(2004), 신희경 외(2004), 최병훈 외(2009), Usiskin et al.(2008), Villiers(1994)를 수집하여 검토하였다. 또 ‘구성주의’와 관련해서 남승인(1998), 이선호(2006), 정현실·김진호(2013), Letterrell(2008), Small(2012)를 수집하여 검토하였다. 이러한 검토를 통해 ‘학습자 중심’이라는 주요 원칙을 세분화할 수 있었으며, 학생 반응 예측, 다양성, 타 분류와의 논의라는 세 가지 항목을 추출할 수 있었다.

다음 교과서와 교사용지도서에 각과 삼각형의 분류와 관련한 내용을 중심으로 ‘학습자 중심적’이라는 주요 원칙과 피리가 있는 부분을 추출하였다. 본 연구는 비판적 분석이 주요 초점이므로 ‘학습자 중심적’이라는 주요 원

척이 잘 지켜진 경우에 대해서는 분석에서 제외하였다. 주요 원칙과 피리가 있다고 판단된 부분은 설정한 분석들의 관점에서 각 항목별로 비판적으로 검토하였다. 그 중 특정 항목에서 미흡한 점이 많다고 판단된 경우 이에 대한 비판적 분석을 시도하였으며 그 내용을 정리하였다. 한편, 분석에 대한 타당성을 제고하기 위한 목적으로 연구자 2인의 공동 협의를 시도하였다. 특히 여러 차례의 협의를 통해 완성한 분석의 결과에 대한 객관성을 높이기 위한 목적으로, 2015년 2월 7일 초등교사 5인과 연구자 2인이 포함된 세미나를 개최하였다. 여기서 초등교사 2인은 수학교육 박사과정 수료생이며, 나머지 3인은 수학교육 석사과정 재학생이었다. 대략 7시간에 걸친 장기적 논의를 통해 편협한 분석의 시각을 개선하는 기회를 가졌으며, 이는 분석에 대한 타당도를 제고하기 위한 노력이었다.

VI. 각과 삼각형 분류에 대한 교과서 및 교사용지도서 분석

1. 각의 분류

초등학교 수학 4-1 3단원에 ‘각을 크기에 따라 분류할 수 있어요’라는 주제의 내용이 등장한다. 이 내용은 펼쳐진 부채의 각도를 분류할 것을 요구하는 ‘생각열기’의 형태로 도입된다(교육부, 2014a).



[그림 VI-1] 각의 크기 분류에 관한 도입 내용(교육부, 2014a)

이러한 도입은 예각, 직각, 둔각에 대한 학습 이후 그 지식을 적용하는 수준의 것이 아니라, 학생 스스로 분류에 관해 생각해 볼 기회를 제공함으로써 ‘학생 중심’이라는 구성주의의 사조를 충실히 반영한 시도를 알 수 있다. 곧 이어 제공되는 ‘활동 1’에서는 ‘각의 크기에 따라 어떻게 분류하면 좋을지 이야기해 보시오’, ‘친구들과 기준을 정하여 각을 분류해 보시오’라고 제시된다. 이는 이미 만들어진 각의 분류에 대한 지식 습득을 강조한 전통적 수업 대신, 학생 스스로 각을 분류해보는 활동을 통해 지식 구성을 돕고자 한 ‘학생 중심’ 수업을 지향하는 일련의 과정으로 볼 수 있다.

그런데 한 가지 주목할 대목은 이와 관련한 교사용지도서(교육부, 2014b)에서 찾아볼 수 있다. 교사용 지도서는 분류 활동에 대해 다음과 같이 기준 설정의 중요성을 밝히고 있다.

분류 활동을 할 때는 분류 기준을 정하는 것이 중요하다. 직각을 분류 기준으로 정하여 직각보다 큰 각과 직각보다 작은 각으로 분류할 수 있도록 학생들을 이끌어 가는 것이 필요하다.

그리고 이러한 강조점을 기준으로 다음과 같은 교사와 학생간의 담화에 대한 예시를 제공하고 있다.

교사 : 직각을 기준으로 직각보다 작은 각과 직각보다 큰 각을 구분한 친구들이 많네요. 그러면 직각보다 작은 각은 어느 것인가요?

학생 : 가, 나, 바입니다.

이러한 교수·학습 상황에는 공동체의 합의에 의한 합리적 기준 설정이라는 고심의 기회가 제공되지 않는 문제점이 있다. 교사가 일방적으로 ‘직각’을 기준을 설정하여, 직각보다 큰 각을 설정한 사람과 직각보다 작은 각을 구분한 사람들의 수를 기준 설정의 근거로 제시하고 있다. 이는 지식 구성의 주체인 학생 주도의 분류 활동을 의도하다가 공동체의 합의를 이끌어 내는 부분에 와서는 교사 주도의 기준 설정 방식을 채택한 이원화된 교수·학습 상황인 것으로 해석된다. 수업의 주체가 학생이라는 원칙을 반영하기 위한 시도라면 일정 부분에 대해 그 주체가 교사로 변모하는 것은 바람직하지 않으며, 원칙의 일관성 있는 적용이 필요한 것으로 사료된다.

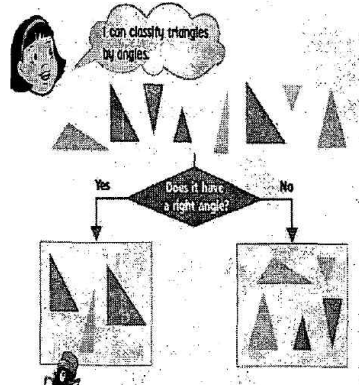
2. 삼각형의 분류

1) 각의 측면에서 삼각형 분류

초등학교 수학 4-1 3단원의 각의 분류에 이어 ‘삼각형을 각의 크기에 따라 분류할 수 있어요’라는 주제가 등장한다. 이 내용 역시 삼각형에 대한 분류에 대해 이야기하는 ‘생각열기’로부터 시작된다. 다음 삼각형을 각의 크기에 따라 분류해 볼 것을 요구하는 ‘활동 1’이 제안된다. 이러한 전개 방식은 각의 크기에 따른 삼각형의 분류를 학습한 이후 그 개념에 대한 이해의 정도를 확인하는 전통적 교수법과 구별된다. 이는 학생 스스로 각의 크기에 따라 삼각형을 분류하는 활동을 통해 개념을 주체적으로 구성할 것을 의도한 구성주의의 사조가 반영된 결과로 볼 수 있다. 하지만 다음의 몇 가지 관점에서 ‘학습자 중심’이라는 원칙이 충실히 반영되지 않은 문제점이 제기된다.

교과서의 문제점으로 ‘생각 열기’에서 ‘활동 1’로의 급진적 전개를 들 수 있다. ‘생각 열기’는 각의 크기라는 특정 기준이 제시되지 않은 열린 형태의 질문에 해당되며, 이는 다양성의 측면에서 바람직한 도입으로 판단된다. 그렇지만 다양성을 허용하는 ‘생각 열기’에서 각의 크기에 따라 분류해 볼 것을 요구하는 ‘활동 1’로의 전개는 다소 급진적이다. 다시 말해, 분류 기준이 제시되지 않은 ‘생각열기’에서 각의 크기라는 기준이 설정된 ‘활동 1’로의 급진적 전개가 이루어지며, 이는 다양성의 관점이 충실히 반영되지 않은 한계를 지닌다. 학생이 설정한 기준대로 삼각형을 분류하는 방식이 뒤의 활동에 의해 지지되지 못하는 형태를 띠게 됨으로써, 학생의 관점이 충분히 반영되지 못한 한계를 지닌다.

다음으로 교사용지도서의 문제점으로 첫째, 학생 반응에 대한 예측이 학생 중심적인가에 대한 의구심이 제기된다. 이와 관련하여 한국과 싱가포르의 초등 수학 교과서를 비교 분석한 최병훈 외(2006)의 연구가 주목할 만하다. 그들은 싱가포르 교과서가 도형 영역에서 특히 잘 제시된 것이 분류임을 언급하고 있다. 여러 개의 삼각형 중 세 변의 길이가 같은 삼각형을 분류하고, 또 두 변의 길이가 같은 삼각형을 분류하여, 정삼각형과 이등변삼각형의 개념을 학습한다. 또 여러 개의 삼각형 중 직각을 가지고 있느냐를 기준으로 삼각형을 분류하여 직각삼각형의 개념을 학습하게 한다. 최병훈 외(2006)는 이와 같은 싱가포르 교과서의 장점과 비교하여 우리나라 교과서(2009 개정 이전의 교과서)의 경우 도형의 개념을 학습할 때 처음부터 정의를 내리지 않았지만 정의에 해당되는 내용이 활동에 이미 제시되어 학생의 사고를 제한할 수 있음을 지적하였다.



[그림 VI-2] 싱가포르 교과서에서 각의 크기에 따른 삼각형의 분류(최병훈 외, 2006 재인용)

싱가포르 교과서에서 각의 크기에 따른 삼각형의 분류는 우리나라 교과서(2009 개정 이전의 교과서)에 비해 학습자의 사고를 촉진한다는 측면에서 장점을 지니지만, 이 역시 학습자 중심이라는 관점에서 비판 가능하다. 즉, 위의 그림을 보면 싱가포르 교과서 역시 분류의 기준으로 직각을 제안함으로써 삼각형을 분류할 수 있도록 유도하고 있다. 그러나 이러한 관점은 삼각형의 분류를 이미 알고 있는 교사의 시각에서 가능한 것이지 학습자의 관점은 이와 다를 가능성이 크다. 이런 측면에서 싱가포르 교과서에서 몇 단계의 분류 활동이 추가되었기는 하나 여전히 학습자 중심적이지 못한 한계를 지닌다.

그렇다면 2009 개정 교육과정에 의해 학습자 중심으로의 탈바꿈을 시도한 우리의 현 교과서는 어떠한가? 학습자 중심이라는 원칙이 충실히 반영된 형태인가? 교사용 지도서에 제안된 ‘활동 1’에 대한 교사와 학생 간의 다음의 담화는 몇 가지 문제점을 안고 있다.

교사 : 각의 크기에 따라 삼각형을 분류하려고 해요. 어떻게 분류할 수 있는지 모둠별로 이야기를 나누어 보세요.

학생1 : 각도기로 재어서 직각이 있는지 없는지로 분류할 수 있습니다.

학생2 : 직각보다 큰 둔각이 있는 것과 없는 것으로 분류할 수 있습니다.

학생3 : 예각, 직각, 둔각이 각각 몇 개씩 있는지 분류하면 좋을 것 같습니다.

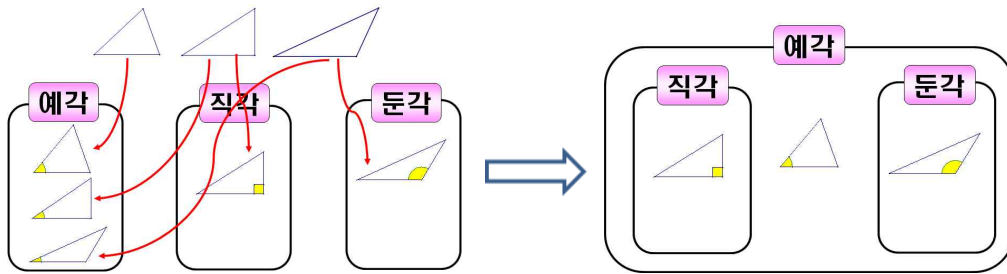
싱가포르 교과서와 마찬가지로 위의 학생 반응 역시 이미 그 지식을 알고 있는 사람들이나 행할 수 있는 반응이라는 의구심이 제기된다. 학생들이 각의 크기에 따른 삼각형의 분류를 학습한 경험이 전혀 없는 경우라면 ‘직각이 있는지 없는지로 분류할 수 있습니다’와 같은 반응은 자연스럽지 못하다. 이것은 이미 그 지식을 알고 있는 사람들이 행할 수 있는 반응에 가깝다.

이 내용을 학습하기 이전 학생이 알고 있는 기존 지식은 각에 대한 분류인 예각, 직각, 둔각에 대한 것이다. 그리고 삼각형에는 세 개의 각이 존재한다는 사실에 대한 부분이다. 따라서 학생들은 위 교사의 발문에 대해 자연스럽게 세 각 중 어느 각에 초점을 두어야 할지 알기 어려운 상황에 직면하게 될 것이다. 특히 삼각형에서 특정한 한 각을 보고 그 삼각형을 분류하는 상황이 초래될 가능성이 크다.* 즉, 학생 반응 예측으로 ‘(이미 설정된 각의 크기라는 기준을 두고 한 각이 둔각인 삼각형을 보면서) 예각 쪽으로 두는 것이 좋을 것 같습니다’, 어떤

* 이와 관련한 현상은 연구자가 초등학교 교사의 한 수업을 참관하면서 관찰한바 있으며, 본 연구의 분석 결과에 대한 세미나에 참석한 5인의 교사에게서도 동일한 반응을 현장에서 목격할 수 있음을 확인할 수 있었다.

학생은 ‘(동일한 삼각형을 보면서) 둔각 쪽으로 두는 것이 좋을 것 같습니다’라는 반응이 자연스럽다. 삼각형의 분류에 있어 학생들이 자연스럽게 모든 각을 고려의 대상으로 삼을 수 있을 것이라고 보는 것은 바람직하지 못하며, 그들의 초기 반응에는 어떠한 요소든 고려 대상이 될 가능성을 지닌다.

둘째, 교사용지도서에 제시된 학생 반응을 볼 때, 계층적·분할적 분류에 대한 선택 기회가 제공되지 않는 문제점을 지닌다. 교사용지도서에 제시된 학생 반응을 보면, 학생들이 곧 바로 분할적 분류 방식으로 나아갈 수 있을 것이라고 판단하고 있음을 알 수 있다. 따라서 계층적 분류가 전혀 제시될 가능성이 없게 된다. 그렇지만 학생의 입장에서 삼각형에서 어떤 특정한 각에 주목하여 분류하게 되면 계층적 분류의 형태가 나타나게 될 수 있다. 이를테면, 직각삼각형은 (예각)과 (직각)에, 둔각삼각형은 (예각)과 (둔각)에 분류가 가능하며, 결국 분류는 계층적 특징을 지니게 된다. 그렇지만 현 교과서는 이러한 계층적 분류 방식을 전혀 고려하지 못한 한계를 지닌다.



[그림 VI-3] 특정각에 주목한 삼각형의 분류(계층적 분류)

2) 변의 측면에서 삼각형 분류

초등학교 수학 4-1 3단원의 각의 크기에 따른 삼각형의 분류에 이어 ‘삼각형을 변의 길이에 따라 분류할 수 있어요’라는 주제가 등장한다. 이 내용 역시 각의 크기가 아닌 다른 기준에 의한 삼각형의 분류에 대해 이야기하는 ‘생각열기’로부터 시작된다. 다음 삼각형을 변의 길이에 따라 분류해 볼 것을 요구하는 ‘활동 1’이 제안된다. 이러한 전개 방식은 변의 길이에 따른 삼각형의 분류를 학습한 이후 그 개념에 대한 이해의 정도를 확인하는 전통적 교수법과 구별되며, 학생 스스로 분류하는 활동을 통해 개념을 주체적으로 구성할 것을 의도한 구성주의의 사조가 반영된 결과로 볼 수 있다. 그렇지만 다음의 몇 가지 관점에서 ‘학습자 중심’이라는 원칙이 충실히 반영되지 않은 문제점이 제기된다.

교과서의 문제점으로 ‘생각 열기’에서 ‘활동 1’로의 급진적 전개를 들 수 있다. ‘생각 열기’는 ‘각의 크기가 아닌 다른 기준’을 요구하는 열린 형태의 질문에 해당되며, 이는 다양성의 측면에서 바람직한 도입으로 판단된다. 다시 말해, ‘각의 크기가 아닌 다른 기준’으로 제시된 ‘생각 열기’는 변의 길이라는 특정 기준이 제시되지 않은 열린 형태의 질문인 것이다. 그렇지만 다양성을 허용하는 ‘생각 열기’에서 변의 길이에 따라 분류해 볼 것을 요구하는 ‘활동 1’로의 전개는 다소 급진적이다. 즉, 분류 기준이 제시되지 않은 ‘생각열기’에서 변의 길이라는 기준이 설정된 ‘활동 1’로의 급진적 전개가 이루어지며, 이는 다양성의 관점이 존중받지 못한 단점을 지닌다. 앞서 학생 스스로 설정한 기준대로 삼각형을 분류하는 방식이 뒤의 활동에 의해 지지되지 못하는 형태를 띠게 됨으로써, 학생의 관점이 충분히 반영되지 못한 한계를 지닌다.

다음으로 교사용지도서의 문제점으로 첫째, 학생 반응에 대한 예측이 학생 중심적인가에 대한 의구심이 제기된다. 구체적으로 교사용 지도서에 제안된 ‘활동 1’에 대한 교사와 학생 간의 다음의 담화는 몇 가지 문제점을 안고 있다.

교사 : 삼각형을 변의 길이에 따라 어떻게 분류할 수 있는지 이야기해 보세요.

학생 : 삼각형의 세 변의 길이가 모두 같은지 또는 두 변의 길이가 같은지에 따라 분류할 수 있습니다.

학생들이 변의 길이에 따른 삼각형의 분류를 학습한 경험이 전혀 없는 경우라면 ‘세 변의 길이가 모두 같은지 또는 두 변의 길이가 같은지에 따라 분류할 수 있습니다’와 같은 반응은 자연스럽게 못하다. 이것은 이미 그 지식을 습득한 사람들이 행할 수 있는 반응에 해당한다.

이 내용을 학습하기 이전 학생이 알고 있는 기존 지식은 변에 대한 분류 기준인 ‘변의 길이가 같다’와 ‘변의 길이가 다르다’ 정도가 될 것이다. 그리고 삼각형에는 세 개의 변이 있다는 사실에 대한 부분이다. ‘변의 길이가 같다’는 기준은 비교의 대상을 필요로 하므로 학생들은 위와 같은 교사의 발문에 대해 자연스럽게 2개가 같은 것, 3개가 같은 것으로 구분될 수 있다. 여기서 2개의 변이 같은 경우는 엄밀히 ‘오직 2개의 변만 같은 경우’와 ‘2개의 변이 같은 경우(3개의 변이 같은 것이 포함된 경우)’로 구분 가능하며 학생들은 전자와 후자 중 어느 것을 선택할지 알기 어렵다. 그렇지만 교사용지도서에 제시된 학생의 반응은 후자의 측면이 두드러지며, 이는 학생이 이미 그 지식을 아는 것으로 간주할 때 가능한 분류인 한계를 지닌다.

둘째, 교사용지도서에 제시된 학생 반응을 볼 때, 계층적·분할적 분류에 대한 선택 기회가 제공되지 않는 문제점을 지닌다. 교사용지도서에 제시된 학생 반응을 보면, 학생들이 곧 바로 계층적 분류 방식으로 나아갈 것이라고 판단하고 있음을 알 수 있다. 즉, 분할적 분류가 전혀 고려되지 않고 있다. Villiers의 분석에서 보듯 삼각형은 분할적 관점에서 분류가 가능하지만, 현 교과서는 그러한 관점에서의 분류를 전혀 허용하지 않고 있다.

V. 각과 삼각형의 분류에 관한 교과 내용 개선 방향

앞서 살펴본 바와 같이 각과 삼각형의 분류에 관한 교과 내용에는 ‘학습자 중심’이라는 구성주의의 관점에서 몇 가지 문제점을 지니고 있는바, 이에 대한 적절한 개선이 요구된다.

각의 분류와 관련하여 각의 기준 설정에 대한 공동체의 합의를 이끌어내는 조정의 기회를 제공해야 하며, 이를 통해 학습자의 다수결에 의한 기준 조정이 아니라 합리적 근거에 의한 기준 조정이 이루어질 수 있게 해야 할 것이다. 즉, 90° 는 0° 에서 180° 까지 어느 한쪽에도 치우치지 않은 공평한 각이기 때문에 기준으로 적합하다는 인식에 도달할 수 있도록 돕는 공동체의 합의에 의한 합리적 선택의 기회가 제공되어야 한다. 이러한 과정을 통해 설정한 기준에 대한 단순한 이해가 아니라, 공평성에 기반한 합리적 선택의 결과임을 이해할 수 있는 학습이 이루어지도록 유도해야 할 것이다. 본 연구에서는 이를 위해 교과용지도서에 다음과 같은 교사와 학생 담화 수정을 제안한다.

교사 : 자! 이들 각을 어떤 기준으로 설정하는 것이 합리적일까?

학생1 : 60도.

교사 : 왜 그렇게 생각해요?

학생1 : 음...저는 그냥 60도가 좋아요.

교사 : 또 다른 의견 없어요?

학생2 : 저는 100도. 왜냐하면 100도 하면 두 자리수 각도에서 처음으로 세 자리수 각도가 되니까요.

교사 : 또 다른 의견은?

학생3 : 저는 90도요. 저는 90도가 0도에서 180도의 가운데에 있어서 그랬어요.

(중략)

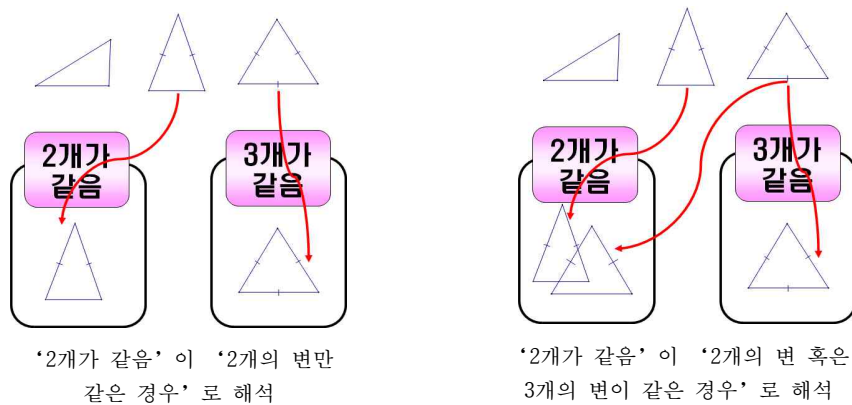
교사 : 자! 다양한 의견이 제시되었는데, 이 중 어느 것을 기준으로 설정해야 합리적인 분류 기준이 될까요?

삼각형의 분류와 관련해서 다음과 같은 개선이 요구된다. 먼저, 교과서의 개선 사항으로 다양성의 측면을 보완할 목적으로 활동 1에서 삼각형의 분류 기준을 각의 크기, 변의 길이로 곧 바로 제시하기보다 학생이 설정한 각각의 기준에 대한 충분한 논의의 기회를 제공하는 것이 필요하다. 왜냐하면 다양성의 관점에서 학생들에게 보다 폭넓은 사고 기회를 제공하는 것이 학생 중심이라는 원칙 적용에 비추어 바람직하기 때문이다. 이를 위해 기준 설정의 기회를 학생에게 제공한 생각열기에서 곧 바로 기준이 제공된 활동 1로의 급진적 전개 대신, 학생이 설정한 기준에 따른 분류 활동과 논의의 기회가 제공되는 점진적 형태로 변화되어야 할 것이다. 즉, 학생이 설정한 기준에 대한 논의를 매개로 하여 각의 크기와 변의 길이로 이행하는 점진적 형태의 교수가 수행될 필요가 있다. 예컨대, 교과서의 생각열기 다음에 ‘생각열기에서 제시한 기준으로 분류해 보고, 각 분류에 대한 장단점을 이야기 한다’와 같은 활동의 추가가 한 방법이 될 수 있을 것이다.

다음, 삼각형의 분류를 처음 학습하는 학생의 반응을 고려한 교수·학습이 설계되어 교과서 및 교사용지도서에 반영될 필요가 있다. 구체적으로 각의 크기에 따른 삼각형의 분류에 관한 내용에서 삼각형을 하나의 특정각에 주목하여 분류하는 활동(그림 VI-3)에 치우치는 학생 반응이 예측된다. 따라서 교과서는 이를 고려한 교수·학습으로 개선될 필요가 있다. 삼각형을 하나의 특정각에 주목하여 분류하게 되면 삼각형은 계층적 분류가 가능하게 되며, 결국 이러한 분류가 갖는 성격과 특징을 조사하고 유용성의 측면에서 단점을 인식하는 논의가 자연스럽게 이루어질 수 있다. 이를 통해 궁극적으로 하나의 각에 주목한 분류가 갖는 한계를 인식하는 토의 기회가 제공될 필요가 있다.

Villiers(1994)에 의하면 다각형의 경우 계층적 분류가 갖는 이점이 지대하다. 하지만 각의 크기에 따른 삼각형의 분류가 계층적일 경우 이점보다는 몇 가지 단점이 제기될 수 있다. 예를 들면, 계층적 분류일 경우 예각삼각형은 일반적인 삼각형을 지칭하는 또 다른 표현에 불과하게 된다. 따라서 현재의 예각삼각형을 지칭하는 표현이 ‘직각삼각형과 둔각삼각형을 제거한 삼각형’로 변경될 수 있다. 이러한 계층적 분류가 갖는 단점에 대한 통해 분할적 분류가 적합함을 이해하는 기회가 마련될 필요가 있다. 예컨대, 교사용지도서에 다음과 같은 유의점 제안이 한 방법이 될 수 있을 것이다. 만약 생각열기에서 학생들이 제안한 분류 기준 중 ‘삼각형의 특정한 한 각’ 또는 ‘세 각’이 없다면 이를 교사가 유도하여 학생들이 다양한 분류의 경험을 갖게 한다. 동시에 이들 분류가 갖는 장점과 단점을 토론할 기회를 제공하여 분할적 분류가 갖는 이점을 인식할 기회를 제공한다.

변의 길이에 따른 삼각형의 분류에 관한 내용은 2개의 변이 같은 경우를 ‘2개의 변만 같은 경우’와 ‘2개의 변이 같은 경우(3개의 변이 같은 것이 포함된 경우)’ 각각에 대한 선택을 위한 토의의 기회가 제공될 필요가 있다.



[그림 V-1] ‘2개가 같음’에 대한 해석의 차이에 기인한 분류의 비교

이를 통해 궁극적으로 '2개가 같은 것'을 '2개의 변만 같은 경우'로 해석한 분할적 분류가 갖는 한계를 인식하는 토의 기회가 제공될 필요가 있다. 그리고 Villiers(1994)가 지적한대로 변의 길이에 따른 삼각형의 계층적 분류가 갖는 많은 이점 역시 논의되는 기회가 되어야 할 것이다. 이를테면, 분할적 분류와 비교해서 계층적 분류에서는 이등변삼각형에 대한 정의와 성질 기술이 간편하다. 이러한 장점을 인식하도록 돕기 위해서는 두 가지 분류에 대하여 비교 및 분석하는 토론의 장이 마련되어야 한다. 예컨대, 교사용지도서에 다음과 같은 유의점 제안이 한 방법이 될 수 있을 것이다. 만약 생각열기에서 학생들이 제안한 분류 기준 중 '2개의 변이 같은 것' 또는 '2개의 변만 같은 것'이 없다면 이를 교사가 유도하여 학생들이 다양한 분류의 경험을 갖게 한다. 동시에 이들 분류가 갖는 장점과 단점을 토론할 기회를 제공하여 계층적 분류가 갖는 이점을 인식할 기회를 제공한다.

셋째, 분류란 것이 조정의 과정에 의해 합리적 선택으로 이어지는 활동임을 이해하는 기회가 될 수 있도록 유도할 필요가 있다. 분류를 학습하면서도 일정 부분에 있어 분류할 기회를 부여받지 못하게 되면 학습자는 분류의 주체가 되지 못하고, 기존의 분류를 있는 그대로 받아들여 암기하는 수동자로 전락하게 될 우려를 지닌다. 그러나 우리가 진정으로 가르쳐야 하는 것은 기준에 설정한 분류에 대한 반성에 의한 조정을 통해 완성되어지는 과정이 곧 분류임을 인식시키는 것이다. 즉, 분류는 기준 설정에 의해 1차적 분류가 완성되고, 그러한 분류가 갖는 문제점이 제기되어 기존의 분류가 조정 및 수정되어 2차적 분류가 완성되어 점진적으로 개선되는 일련의 활동임을 이해할 수 있도록 교수·학습이 설계되어야 하는 것이다.

VI. 결론

각과 삼각형에 대한 분류 활동은 각과 삼각형에 대한 개념 형성을 위한 기초 작업이므로 대단히 중요하다. 이런 측면에서 분류 활동이 교과서에서 학습자 중심으로 설계되어 있는지를 비판적으로 검토해 볼 필요가 있다.

본 연구는 '학습자 중심'이라는 구성주의의 관점에서 각과 삼각형의 분류에 관한 초등 교과서 내용을 비판적으로 분석해 보았으며, 그 결과 다음의 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 각의 분류는 학습자와 교사 간의 주체성 여부가 이원화되어 있음을 알 수 있었다. 도입부에서는 학습자 중심적이지만, 공동체의 합의에 의한 기준 설정 부분에 있어서는 교사 중심적이었다. 이러한 측면을 개선하기 위해서는 다수결에 의거한 기준 설정보다 균형성의 시각에서 합리적 선택이 이루어질 수 있는 학생 중심의 합의가 이루어질 필요가 있다.

둘째, 삼각형의 분류는 다양성의 측면에서 다소 급진적인 형태를 띠고 있었다. '생각열기'에서 분류 기준이 제안되지 않지만 곧 이은 '활동 1'에서 분류 기준이 제안됨으로써, 학생이 설정한 기준에 대한 충분한 논의의 기회가 주어지지 않는 한계를 지니고 있었다. 이런 점이 개선되기 위해서는 학생들이 설정한 기준에 대한 충분한 토의의 기회가 제공되어야 할 것이다.

셋째, 삼각형의 분류는 학생 반응 예측에서 이미 그 지식을 습득한 사람에게나 가능한 반응을 제안하는 경우를 접할 수 있었다. 학생들이 그러한 분류를 알고 있을 때나 가능한 반응을 보여주고 있기에 예상치 못한 반응에 대한 대처가 우려된다. 따라서 교사용지도서에 학생 반응에 대한 예측이 조정되어 제시될 필요가 있다.

넷째, 계층적·분할적 분류에 대한 선택과 논의의 기회가 제공되지 않는 단점을 지니고 있었다. 각의 크기에 따른 삼각형의 분류는 분할적 분류에 해당되며, 변의 길이에 따른 삼각형의 분류는 계층적 분류에 해당한다. 그렇지만 이러한 결과는 곧 바로 완성된 것이 아닌 두 가지 분류 중 합리적 선택이라는 조정 과정의 산물에 해당한다. 따라서 과정적 측면에 주목하여 두 가지 분류가 갖는 장·단점을 논의하는 기회가 제공될 필요가 있다.

이상의 결과로부터 다음과 같은 제언이 가능하다.

첫째, 2009 개정 교육과정에 의거하여 교과서가 ‘학습자 중심’이라는 원칙을 반영하려고 노력하고 있지만, 일정 부분에 있어 그러한 원칙이 충실히 지켜지지 않은 부분이 발견될 수 있다. 대표적인 예가 각과 삼각형의 분류이며, 이외의 부분에 대해서도 본 연구에서와 같은 비판적 검토가 필요할 것이다. 이를 통해 ‘학습자 중심’이라는 원칙이 충실히 반영된 교과서를 제공할 필요가 있다.

둘째, 교사용지도서의 학생 반응 예측은 조심스러워야 할 필요가 있다. 이미 그 지식을 알고 있는 사람의 입장에서 학생 반응을 예측하여 다루는 것은 위험하다. 그 지식을 처음으로 대하는 학생의 입장에서 그 반응을 예측해야 하며, 이러한 부분이 교과서에 충분히 반영되어 지도되어야 할 것이다.

셋째, 결과보다 과정에 주목하는 교수가 이루어져야 할 것이다. 삼각형의 분류를 결과적 시각에서만 보면 암기의 대상에 불과하지만, 과정적 시각에서 보면 타 분류와의 비교·분석에 의한 반성과 조정의 연속적 과정으로 전환되어 이해의 대상으로 승격될 수 있다. 이런 점에 비추어 볼 때, 초등학교에서 다루는 여러 가지 활동이 과정적 측면이 두드러진 것인지를 반성적으로 검토해 보는 것이 필요하다.

참 고 문 헌

- 국립국어원 (2014). 표준국어대사전. http://stdweb2.korean.go.kr/search/List_dic.jsp
- National Institute of the Korean Language (2014). *Standard korean dictionary*. http://stdweb2.korean.go.kr/search/List_dic.jsp
- 교육과학기술부 (2010). *수학 4-1 교사용지도서*. 서울: 두산동아
- Ministry of Education, Science and Technology (2010). *Mathematics 4-1 guidebook for teacher*. Seoul: Dusandong
- 교육과학기술부 (2011). *수학과 교육과정*(교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8])
- Ministry of Education, Science and Technology (2011). *Mathematics curriculum*. (MEST Notice NO. 2011-361 [Supplement 8])
- 교육부 (2014a). *초등학교 수학 4-1(3~4학년군 수학③)*. 서울: 천재교육
- Ministry of Education (2014a). *Elementary mathematics 4-1 (3~4 grade math group ③)*. Seoul: Chunjae education.
- 교육부 (2014b). *초등학교 수학 4-1(3~4학년군 수학③) 교사용지도서*. 서울: 천재교육
- Ministry of Education (2014b). *Elementary mathematics 4-1 (3~4 grade math group ③) guidebook for teacher*. Seoul: Chunjae education.
- 김민경 · 박은경 · 허지연 (2012). ‘맥락성’ 관점에서 본 수학교과서의 문제 분석. *한국학교수학회논문집*, **15(1)**, 1-25.
- Kim, M.K., Park, E.J., & Hae, J.Y. (2012). An analysis on mathematics textbook problems focusing on ‘contextualization’. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **15(1)**, 1-25.
- 김현정 · 강완 (2008). 초등학교 수학 교과서에 나타난 사각형 지도 방법에 대한 분석. *한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>*, **11(2)**, 141-159.
- Kim, H.J., & Kang, W. (2008). An analysis on teaching quadrilaterals in elementary school mathematics textbooks. *Education of Primary School Mathematics*, **11(2)**, 141-159.
- 남승인 (1998). 교사의 수학과 구성주의. *한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>*, **2(1)**, 15-26.
- Nam, S.I. (1998). A study on teacher’s mathematical beliefs and constructivism. *Education of Primary School Mathematics*, **2(1)**, 15-26.
- 남승인 · 신준식 · 류성림 · 권성룡 · 김남균 (2004). *초등 교사 교육을 위한 수학 프로그램 적용 및 확산 연구*. 교사교육 프로그램 개발 및 적용 과제, 교육인적자원부.

- Nam, S.I., Shin, J.S., Rye, S.L., Kwon, S.R., & Kim, N.G. (2004). *An research on application and diffusion of mathematics program for elementary teacher education*. Teacher education program development and application challenges, Ministry of Education and Human Resources.
- 신현정 (2000). *개념과 범주화*. 서울: 아카넷.
- Sin, H.J. (2000). *Concepts and categorization*, Seoul: Acanet.
- 신희경 · 백석윤 (2004). 제 7차 초등학교 수학 교과서에 제시된 활동유형 분석. *한국초등수학교육학회지*, **8(1)**, 45-61.
- Shin, H.K., & Paik, S.Y. (2004). An analysis of activity styles in the elementary school mathematics textbooks by the 7th curriculum. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **8(1)**, 45-61.
- 이선호 (2006). *수학 교수 학습에서 구성주의 모델에 관한 연구*. 인하대학교 석사학위논문.
- Lee, S.H. (2006). *A study on model of constructivism in mathematics education*, Master's thesis, IHU.
- 정현실 · 김진호 (2013). 구성주의 수학 수업이 추론능력에 미치는 영향: 초등학교 2학년 곱셈을 중심으로. *한국학교수학회논문집*, **16(1)**, 31-61.
- Jung, H.S., & Kim, J.H. (2013). Effects of mathematical instructions based on constructivism on learners' reasoning ability: With focus on the area of multiplication for 2nd graders. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **14(1)**, 31-61.
- 최병훈 · 방정숙 · 송근영 · 황현미 · 구미진 · 이성미 (2006). 한국과 싱가포르의 초등 수학 교과서 비교 분석: 도형과 측정 영역을 중심으로. *대한수학교육학회지 <학교수학>*, **8(1)**, 45-68.
- Choi, B.H., Pang, J.S., Song, K.Y., Hwang, H.M., Gou, M.J., & Lee, S.M. (2006). A comparative analysis of elementary mathematics textbooks of Korea and Singapore: Focused on the geometry and measurement strand. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, **8(1)**, 45-68.
- 한국과학창의재단 (2011). *2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구*(정책연구 2011-11).
- Korea Foundation for Advancement of Science and Creativity (2011). *A study on mathematics curriculum according to 2009 revision curriculum*. (Policy research 2011-11)
- Byers, V., & Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching*, **81**, 24-27.
- Kamii, C.(1985). *Young children reinvent arithmetic*. NY: Teacher College Press.
- Letterrell, C. (2008). *수학 전쟁: 학부모와 교사를 위한 수학교육 안내서*. 서울: 교우사(박성선 역). (원본은 2004에 출판됨).
- Skemp, R. R., (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, **77**, 20-26.
- Small, M. (2012). *Good questions: Great ways to differentiate mathematics instruction*. New York: Teachers College Press.
- Usiskin, Z., Griffin, J., Witonsky, D., & Willmore, E. (2008). *The classification of quadrilaterals: a study in definition*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Van de Walle, J. A. (2008). *수학을 어떻게 가르칠 것인가?* 서울: 경문사(남승인·서찬숙·최진화 역). (원본은 2004에 출판됨).
- Villiers, M. D. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning og Mathematics*. **14(1)**, 11-18.

Analysis of Elementary Textbooks and Guidebook for Teacher regarding the Classification of Angles and Triangles in the Constructivist Perspective

Roh, Eun Hwan

Department of Mathematics Education, Chinju National University of Education, Jinju 660-756, Korea

E-mail : ehroh@cue.ac.kr; idealmath@gmail.com

Kang, Jeong Gi[†]

Gimhae Daegok Middle School, Gimhae 621-918, Korea

E-mail: jeonggikang@gmail.com

The classification is an important activity that is directly related to concept formation. Thus it will need to be made meaningful learning to classification through learner-centered teaching. But we doubts weather teaching and learning to the classification are reflected in the constructivist philosophy of 'learner-centered' well or not. The purpose of this study was to analyze critically the content of elementary textbooks and guidebook for teachers relating to the classification of angles and triangles in terms of constructivism. As a result, there is a problem in the classification of angles that are not provided a reasonable chance to set criteria by agreement of the communities. There is a problem in the classification of triangles that has the characteristics of radical development in terms of diversity. In addition, response of students was predicted like anyone who already acquired knowledge. And it has the shortcomings that the opportunity to have a choice and a discussion to hierarchical and partition classification are not provided. The followings are proposed based on such features; faithful reflection of 'Learner-centered' principle, careful prediction of student response, teaching that focus on process than results.

* ZDM Classification : U22

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key Words : Constructivism, Classification of angles, Classification of triangles.

† corresponding author