

코일 저항의 불확실성을 가지는 자기 부상 시스템의 강인 제어

Robust Control of Electromagnetic Levitation System with Uncertain Coil Resistor

정민길* · 최호림*
(Min-Gil Jeong · Ho-Lim Choi)

Abstract - Electromagnetic levitation system(EMLS) is one of the well known nonlinear systems due to its high degree of nonlinearities. Moreover, when there are uncertain parameters in EMLS, it is not easy to have an accurate control of EMLS. In this paper, we first apply a standard input-output feedback linearizing controller to EMLS and investigate the possible control error caused by uncertain coil resistor. Then, as a remedy, we design and apply a robust controller using Lyapunov redesign technique to deal with this uncertain coil resistor in the system. The validity of our robust controller is verified via system analysis and experimental results.

Key Words : EMLS, Input-output feedback linearizing controller, Uncertain coil resistor, Lyapunov redesign technique, Robust controller

1. 서론

자기 부상 시스템(electromagnetic levitation system)은 전자 기력을 이용하여 물체를 공중에 띄우는 장치로서 입력전압을 통해 자기력을 발생시켜 코일에서의 전류 조정에 의해 쇠공의 공극을 제어하는 비선형 시스템이다. 자기 부상 시스템은 비선형 시스템이고 불안정한 시스템이므로 제어 이론의 학습 이외에도 새로운 제어 이론을 적용하여 성능 및 유효성을 평가하기에도 알맞은 시험 표준 시스템이다. 이러한 특성 때문에 자기 부상 시스템에 대해 다양한 연구가 진행되어왔다[1-3, 6, 8, 10]. [2]에서는 비선형 시스템인 자기 부상 시스템을 두 가지 선형화 기법을 적용하여 각각 제어를 설계한 후 스위칭 제어를 통해 두 가지 제어기의 장점만을 이용하여 과도응답 및 정상상태 응답의 반응을 향상시켰다. 한편, [3, 6, 7]에서는 시스템의 불확실성(uncertainty)을 고려하여 제어를 설계하는 연구도 진행되었다. 즉, 시스템에서 가지고 있는 불확실한 부분에 대해 고려하지 않고 제어를 설계하면 원하는 제어 목표에 도달하지 않거나 정상상태 오차가 발생하는 등 정확한 제어가 되지 않을 가능성이 있다.

본 논문에서는 Quanser사의 자기 부상 시스템에서 코일의 저항에 불확실성이 존재한다고 할 때 먼저 입-출력 궤환 선형화(input-output linearization)를 적용하여 제어를 설계하기 용이하도록 근사된 식으로 변환한다. 근사된 식에서 안정한 부분에 대해 제어를 설계하여 Lyapunov 분석을 통해 시스템의 불확실

성을 고려하지 않음으로 인해 정밀 제어가 되지 않을 가능성이 있음을 증명하고, 근사된 식의 불확실한 부분에 대해서는 Lyapunov redesign 기법을 이용하여 저항의 불확실성을 고려하도록 제어를 설계하고 분석한다. 시스템의 안정한 부분과 불확실한 부분에 대해 각각 설계한 것을 종합하여 최종적인 제어기식을 정리한 후 실험을 통해 코일 저항의 불확실성 고려 여부에 따른 제어기의 성능을 비교하여 제안된 강인 제어기의 우수성을 증명한다.

2. 자기 부상 시스템 모델링 및 연구의 동기

식 (1)은 자기 부상 시스템의 동역학 방정식이고, 그림 1, 2는 각각 본 논문에서 다루는 Quanser 사의 자기 부상 시스템의 장비 구성 및 시스템을 도식적으로 나타낸 것이다[9].

$$V_c(t) = (R_c + R_s)I_c(t) + L_c \left(\frac{d}{dt} I_c(t) \right) \quad (1)$$
$$\ddot{x}_b = -\frac{1}{2} \frac{K_m I_c^2}{M_b x_b^2} + g$$

여기서 V_c 는 코일의 입력전압, R_c 는 코일의 저항, R_s 는 전류 측정기의 저항, I_c 는 코일의 전류, L_c 는 코일의 인덕턴스, x_b 는 쇠공의 위치, K_m 은 전자기력 상수, M_b 는 쇠공의 질량, g 는 중력 가속도이다.

표 1은 Quanser사의 자기 부상 시스템의 사양을 나타낸 것이다[9].

식 (1)을 상태방정식 형태로 나타내기 위해 상태변수와 입력변수를 식 (2)와 같이 설정하면

* Corresponding Author : Dept. of Electrical Engineering, Dong-A University, Korea
E-mail : hlchoi@dau.ac.kr

* Dept. of Electrical Engineering, Dong-A University, Korea
Received : April 16, 2015; Accepted : June 3, 2015



그림 1 자기 부상 시스템
Fig. 1 Electromagnetic levitation system

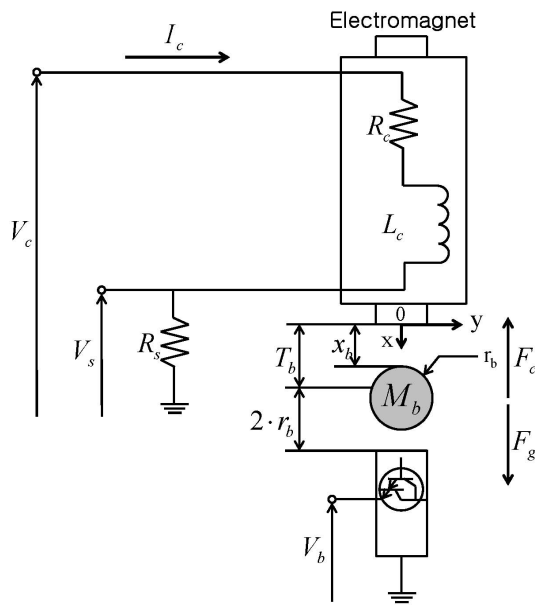


그림 2 자기 부상 시스템의 개략도
Fig. 2 Schematic of electromagnetic levitation system

표 1 자기 부상 시스템의 사양

Table 1 Specifications of electromagnetic levitation system

Parameter	Description	Value
R_c	Coil Resistance	10 Ω
R_s	Current Sense Resistance	1 Ω
L_c	Coil Inductance	412.5 mH
K_m	Electromagnet Force Constant	6.5308×10^{-5} $N \cdot m^2/A^2$
M_b	Mass of Ball	0.068 kg
g	Gravitational Constant	9.81 m/s^2

$$x_b = x_1, \dot{x}_b = x_2, I_c(t) = x_3, V_c(t) = u \quad (2)$$

상태방정식은 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2} \frac{K_m x_3^2}{M_b x_1^2} + g \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R_c + R_s}{L_c} x_3 + \frac{1}{L_c} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 시스템의 입력은 u 이고 시스템의 측정 가능한 출력 즉, 쇠공의 위치는 y 이다.

자기 부상 시스템은 비선형성이 높은 시스템이므로 입-출력 궤환 선형화 기법을 적용하여 보다 다루기 쉬운 선형시스템으로 변환하여 표현하도록 한다. 만일 자기 부상 시스템에 불확실한 파라미터가 없다면 입-출력 궤환 선형화만 적용하여 제어를 설계하여도 충분히 제어가 가능하지만, 불확실한 파라미터가 존재하는 경우에는 정상상태 오차와 같은 문제가 발생할 수 있다 [6]. 불확실한 파라미터에 대해서 기존의 방식대로 제어기의 극점을 조정하거나 적분기를 추가하는 것으로는 정상상태 오차를 완전히 줄이기 어렵다[3]. 자기 부상 시스템에 입-출력 궤환 선형화를 적용해 제어를 설계하여 실험한 결과 정상상태 오차가 발생하는 것을 확인하였다[2]. 여기서 우리는 자기 부상 시스템의 코일 저항에 불확실성이 있다고 판단하고 Lyapunov 함수를 이용해 분석하여 코일 저항의 불확실성에 의해서 발생하는 정상상태 오차의 존재를 확인하고, 불확실한 부분에 대해서는 Lyapunov redesign 기법을 적용하여 코일 저항의 불확실성을 고려하도록 제어를 설계 및 분석한다. 또한 제안된 제어를 이용하면 정상상태 오차가 사라진다는 것을 실험을 통해 확인하여 코일 저항의 불확실성에 대한 예측 및 그에 대한 공학적 관점에서의 제어기 설계가 유효함을 검증한다.

3. 코일 저항의 불확실성을 고려한 입-출력 궤환 선형화 기반 제어기 설계

3.1 코일 저항의 불확실성으로 인한 정상상태 오차의 분석

입-출력 궤환 선형화는 비선형 시스템에 상태 궤환을 가하여 결과적인 궤환 시스템이 선형의 특성을 갖도록 하는 것이다. 자기 부상 시스템의 상태방정식 (3)에서 $y = x_1 = z_1, z_2 = \dot{x}_1 = x_2, z_3 = \dot{x}_2 = -\frac{1}{2} \frac{K_m x_3^2}{M_b x_1^2} + g$ 라 하고, $R_c + R_s$ 의 실제 저항을 R_u 라 할 때 측정 가능한 부분을 \hat{R}_u , 불확실한 부분을 \bar{R}_u 라고 하면 식 (3)을 입-출력 궤환 선형화를 통해 다음과 같이 변환식을 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= \frac{K_m x_2 x_3^2}{M_b x_1^3} + \frac{K_m R_a x_3^2}{M_b L_c x_1^2} - \frac{K_m x_3 u}{M_b L_c x_1^2} \\ &= \frac{K_m x_3}{M_b x_1^2} \left(\frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{\hat{R}_a x_3}{L_c} - \frac{u}{L_c} + \frac{\bar{R}_a x_3}{L_c} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

불확실한 부분인 \bar{R}_a 가 포함된 항을 제외한 $\alpha(x)$ 와 $\beta(x)$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{K_m x_3^2}{M_b x_1^2} \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{\hat{R}_a}{L_c} \right) \\ \beta(x) &= -\frac{K_m x_3}{M_b L_c x_1^2} \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)를 이용하여 u 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\beta(x)} (-\alpha(x) + v) \\ &= -\frac{M_b L_c x_1^2}{K_m x_3} \left[-\frac{K_m x_3^2}{M_b x_1^2} \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{\hat{R}_a}{L_c} \right) + v \right] \\ &= \frac{L_c x_2 x_3}{x_1} + \hat{R}_a x_3 - \frac{M_b L_c x_1^2}{K_m x_3} v \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)을 식 (4)의 u 에 대입하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{K_m x_3}{M_b x_1^2} \left[\frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{\hat{R}_a x_3}{L_c} - \frac{1}{L_c} \left(\frac{L_c x_2 x_3}{x_1} + \hat{R}_a x_3 - \frac{M_b L_c x_1^2}{K_m x_3} v \right) + \frac{\bar{R}_a x_3}{L_c} \right] \\ = v + \frac{K_m \bar{R}_a}{M_b L_c} \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

식 (4)에 식 (7)을 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= v + \frac{K_m \bar{R}_a}{M_b L_c} \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)의 $\frac{K_m \bar{R}_a}{M_b L_c} \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^2$ 을 z 에 관한 식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_3 &= -\frac{1}{2} \frac{K_m x_3^2}{M_b x_1^2} + g \text{에서 } \frac{1}{2} \frac{K_m x_3^2}{M_b x_1^2} = g - z_3 \text{ 이고} \\ \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^2 &= \frac{2M_b(g - z_3)}{K_m} \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{K_m \bar{R}_a}{M_b L_c} \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^2 &= \frac{K_m \bar{R}_a}{M_b L_c} \frac{2M_b(g - z_3)}{K_m} \\ &= \frac{2\bar{R}_a(g - z_3)}{L_c} \end{aligned} \quad (9)$$

따라서 식 (9)에 의해 식 (8)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= v + \frac{2\bar{R}_a(g - z_3)}{L_c} \end{aligned} \quad (10)$$

시스템의 출력 y 의 제어 목표를 x_{b0} 라고 하면 $y - x_{b0} = z_1 - x_{b0} = 0$ 이 되어야 한다. $e_1 = z_1 - x_{b0}$, $e_2 = z_2$, $e_3 = z_3$ 라고 하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{z}_1 = z_2 = e_2 \\ \dot{e}_2 &= \dot{z}_2 = z_3 = e_3 \\ \dot{e}_3 &= \dot{z}_3 = v + \frac{2\bar{R}_a(g - e_3)}{L_c} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)을 안정한 부분과 불확실한 부분으로 구분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_f e + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{Gv} v + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{2\bar{R}_a(g - e_3)}{L_c}}_{G\delta} \\ &= \underbrace{f + Gv}_{(*)} + \underbrace{G\delta}_{(**)} \Rightarrow v = \psi + \phi \end{aligned} \quad (12)$$

먼저 식 (12)에서 안정한 부분인 (*)에 대해 정리하도록 한다.

$$\dot{e} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A e + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B v \quad (13)$$

식 (13)의 A 와 B 를 이용하여 A_K 즉, $A_K = A + BK$ ($K = [k_1, k_2, k_3]$)가 Hurwitz가 되도록 하는 K 를 구한다.

$$\begin{aligned} A_K = A + BK &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2 \ k_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \\ \det(A_K - \lambda I) &= \lambda^3 - k_3 \lambda^2 - k_2 \lambda - k_1 \end{aligned} \quad (14)$$

$\lambda = -50, -60, -70$ 이면 $k_1 = -210000, k_2 = -10700, k_3 = -180$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \psi &= Ke \\ &= k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 \\ &= k_1(z_1 - x_{b0}) + k_2 z_2 + k_3 z_3 \end{aligned} \quad (15)$$

따라서 식 (6)의 v 에 안정한 부분 ψ 만을 적용하여 코일 저항의 불확실한 부분을 고려하지 않은 입-출력 제한 선형화 기반 제어기 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{L_c x_2 x_3}{x_1} + \hat{R}_b x_3 - \frac{M_b L_c x_1^2}{K_m x_3} \psi \\ &= \frac{L_c x_2 x_3}{x_1} + \hat{R}_b x_3 - \frac{M_b L_c x_1^2}{K_m x_3} [k_1(z_1 - x_{i0}) + k_2 z_2 + k_3 z_3] \end{aligned} \quad (16)$$

식 (14)에서 A_K 가 Hurwitz이면 $\dot{e} = A_K e + \delta(e)$ 이고, 그에 대한 Lyapunov 방정식은 다음과 같다.

$$A_K^T P_K + P_K A_K = -I \quad (17)$$

여기서 P_K 는 양정치행렬(positive definite matrix)이다.

이제 불확실성을 포함한 전체 시스템에 대해서 Lyapunov 함수를 이용하여 정상상태 오차의 존재를 분석한다. Lyapunov 함수를 $V(e) = e^T P_K e$ 로 두면 e 에 대한 미분 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T P_K e + e^T P_K \dot{e} \\ &= [A_K e + \delta(e)]^T P_K e + e^T P_K [A_K e + \delta(e)] \\ &= e^T [A_K^T P_K + P_K A_K] e + 2e^T P_K \delta(e) \\ &\leq -|e|^2 + 2|e|^T P_K \delta(e) \\ &= -\frac{1}{2}|e|^2 - |e|^T \left[\frac{1}{2}|e| - 2P_K \delta(e) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 $\frac{1}{2}|e| - 2P_K \delta(e) > 0$ 을 만족하면 $\dot{V}(e) < 0$ 이 되어 시스템이 안정하다는 것을 알 수 있다. 따라서 식 (18)에서 e 의 최종 수렴 범위(ultimate bound)는 다음과 같다.

$$|e| > 4P_K \delta(e) \quad (19)$$

위의 범위를 벗어나면 정상상태 오차가 발생할 수 있다. 즉, 코일 저항에 불확실성이 있으면 정상상태 오차가 발생할 수 있는 것이다. 따라서 식 (12)에서 ϕ 부분을 Lyapunov redesign 기법을 통해 정리하여 시스템의 불확실성을 고려해주도록 한다[4].

3.2 Lyapunov redesign 기법을 통해 코일 저항의 불확실성을 고려한 강인 제어기 설계

먼저 $A_K^T P_K + P_K A_K = -I$ 에서 P_K 를 구한다.

$$P_K = \begin{bmatrix} 12860.6993 & 654.7819 & 2.381 \times 10^{-6} \\ 654.7819 & 44.3861 & 61.2413 \times 10^{-3} \\ 2.381 \times 10^{-6} & 61.2413 \times 10^{-3} & 3.118 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (20)$$

\dot{V} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\|e\|^2 + \frac{\partial V}{\partial e} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\phi + \delta) \\ &= -\|e\|^2 + \underbrace{w^T}_{w^T} \phi + w^T \delta \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 $w^T = \frac{\partial V}{\partial e} = 2e^T P_K$ 이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} w^T &= 2[e_1 \ e_2 \ e_3] \begin{bmatrix} 12860.6993 & 654.7819 & 2.381 \times 10^{-6} \\ 654.7819 & 44.3861 & 61.2413 \times 10^{-3} \\ 2.381 \times 10^{-6} & 61.2413 \times 10^{-3} & 3.118 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4.7619 \times 10^{-6} e_1 + 122.4826 \times 10^{-3} e_2 + 6.236 \times 10^{-3} e_3 \\ &= 4.7619 \times 10^{-6} (z_1 - x_{i0}) + 122.4826 \times 10^{-3} z_2 + 6.236 \times 10^{-3} z_3 \end{aligned} \quad (22)$$

δ 가 다음 부등식을 만족한다고 가정하면

$$\|\delta\|_\infty \leq \rho(t, e) + \kappa \| \phi \|_\infty, \quad (\text{단, } 0 \leq \kappa \leq 1) \quad (23)$$

식 (21)에서 $w^T \phi + w^T \delta$ 는 식 (24)와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} w^T \phi + w^T \delta &\leq w^T \phi + \|w\|_1 \|\delta\|_\infty \\ &\leq w^T \phi + \|w\|_1 [\rho(t, e) + \kappa \| \phi \|_\infty] \end{aligned} \quad (24)$$

다음 제어기 구조를 선택하면

$$\phi = \frac{-\eta(t, e)}{1 - \kappa} \text{sgn}(w), \quad (\text{단, } \eta(t, e) \geq \rho(t, e), \forall t, e) \quad (25)$$

식 (24)의 $w^T \phi + \|w\|_1 [\rho(t, e) + \kappa \| \phi \|_\infty]$ 를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} w^T \left[\frac{-\eta(t, e)}{1 - \kappa} \text{sgn}(w) \right] + \rho(t, e) \|w\|_1 + \kappa \frac{-\eta(t, e)}{1 - \kappa} \|w\|_1 \\ = \frac{-\eta(t, e)}{1 - \kappa} w^T \text{sgn}(w) + \rho(t, e) \|w\|_1 + \kappa \frac{-\eta(t, e)}{1 - \kappa} \|w\|_1 \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 $w^T \text{sgn}(w)$ 는

$$\begin{aligned} x^T \text{sgn}(x) &= [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} \text{sgn}(x_1) \\ \text{sgn}(x_2) \\ \text{sgn}(x_3) \end{bmatrix} \\ &= x_1 \text{sgn}(x_1) + x_2 \text{sgn}(x_2) + x_3 \text{sgn}(x_3) \\ &= |x_1| + |x_2| + |x_3| = \|x\|_1 \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)을 참고하면 $w^T \text{sgn}(w) = \|w\|_1$ 이고, 식 (26)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{-\eta(t, e)}{1 - \kappa} \|w\|_1 + \rho(t, e) \|w\|_1 + \kappa \frac{-\eta(t, e)}{1 - \kappa} \|w\|_1 \\ = -\eta(t, e) \frac{1 - \kappa}{1 - \kappa} \|w\|_1 + \rho(t, e) \|w\|_1 \\ = -\eta(t, e) \|w\|_1 + \rho(t, e) \|w\|_1 \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 $\eta(t, e) = \rho(t, e)$ 라고 하면 $w^T \phi + w^T \delta = 0$ 이 되어 $\dot{V} < 0$ 이 되므로 전체 폐루프 시스템(closed-loop system)이 안정하다는 것을 알 수 있다.

$\|\delta\|_\infty \leq \rho(t, e) + \kappa \|\phi\|_\infty$ 이고 $\kappa = 0$ 이므로 $\|\delta\|_\infty \leq \rho(t, e)$ 이 되고, 식 (12)에서 $\delta = \frac{2\bar{R}_a(g - e_3)}{L_c}$ 이므로 $\rho(t, e)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\bar{R}_a(g - e_3)}{L_c} \\ \|\delta\|_\infty &\leq \frac{2\bar{R}_a g}{L_c} + \frac{2\bar{R}_a}{L_c} |e_3| = \frac{2\bar{R}_a(g + |e_3|)}{L_c} = \rho(t, e) \end{aligned} \quad (29)$$

따라서 식 (25)의 ϕ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{-\eta(t, e)}{1 - \kappa} \text{sgn}(w) \\ &= -\frac{2\bar{R}_a(g + |e_3|)}{L_c} \text{sgn}(w) \end{aligned} \quad (30)$$

여기서 $w = w^T$ 이고, $e_3 = z_3$ 이므로 식 (12)의 v 에 식 (15)의 ψ 와 식 (30)의 ϕ 를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v &= \psi + \phi \\ &= k_1(z_1 - x_{i0}) + k_2 z_2 + k_3 z_3 - \frac{2\bar{R}_a(g + |e_3|)}{L_c} \text{sgn}(w^T) \end{aligned} \quad (31)$$

이제 식 (6)의 v 에 시스템의 안정한 부분과 불확실한 부분을 종합한 식 (31)을 적용한 강인 제어기 식 u 를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{L_c x_2 x_3}{x_1} + \hat{R}_a x_3 - \frac{M_b L_c x_1^2}{K_m x_3} v \\ &= \frac{L_c x_2 x_3}{x_1} + \hat{R}_a x_3 \\ &\quad - \frac{M_b L_c x_1^2}{K_m x_3} \left[k_1(z_1 - x_{i0}) + k_2 z_2 + k_3 z_3 - \frac{2\bar{R}_a(g + |z_3|)}{L_c} \text{sgn}(w^T) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

따라서 Lyapunov redesign 기법을 통해 코일 저항의 불확실성을 고려하여 설계한 강인 제어기 식 (32)를 토대로 자기 부상 시스템에서 코일 저항의 불확실성으로 인한 정상 상태 오차를 줄일 수 있다.

Remark 1 코일 인덕턴스의 불확실성에 대한 접근 방법의 조사

자기 부상 시스템에 코일 저항이 아닌 다른 파라미터, 예를 들면 코일의 인덕턴스에 불확실성이 있을 경우에 대해 알아보도록 한다. 자기 부상 시스템의 상태방정식 (3)에서 $y = x_1 = z_1$,

$z_2 = \dot{x}_1 = x_2$, $z_3 = \dot{x}_2 = -\frac{1}{2} \frac{K_m x_3^2}{M_b x_1^2} + g$ 라 하고, L_c 의 실제 인덕턴스를 L_a 라고 할 때 측정 가능한 부분을 \hat{L}_a , 불확실한 부분을 \bar{L}_a 라고 하면 식 (3)을 임-출력 제한 선형화를 통해 다음과 같이 변환식을 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= \frac{K_m x_2 x_3^2}{M_b x_1^3} + \frac{K_m (R_c + R_s) x_3^2}{M_b L_a x_1^2} - \frac{K_m x_3 u}{M_b L_a x_1^2} \\ &= \frac{K_m x_3}{M_b x_1^2} \left[\frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{(R_c + R_s) x_3}{\hat{L}_a} - \frac{u}{\hat{L}_a} + \frac{(R_c + R_s) x_3}{\bar{L}_a} - \frac{u}{\bar{L}_a} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

불확실성이 존재하는 \bar{L}_a 가 포함된 항을 제외한 $\alpha(x)$ 와 $\beta(x)$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{K_m x_3^2}{M_b x_1^2} \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{R_c + R_s}{\hat{L}_a} \right) \\ \beta(x) &= -\frac{K_m x_3}{M_b \bar{L}_a x_1^2} \end{aligned} \quad (34)$$

식 (34)를 이용하여 u 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\beta(x)} (-\alpha(x) + v) \\ &= -\frac{M_b \hat{L}_a x_1^2}{K_m x_3} \left[-\frac{K_m x_3^2}{M_b x_1^2} \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{R_c + R_s}{\hat{L}_a} \right) + v \right] \\ &= \frac{\hat{L}_a x_2 x_3}{x_1} + (R_c + R_s) x_3 - \frac{M_b \hat{L}_a x_1^2}{K_m x_3} v \end{aligned} \quad (35)$$

식 (35)를 식 (33)의 u 에 대입하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\frac{K_m x_3}{M_b x_1^2} \left[\frac{x_2 x_3}{x_1} + \frac{(R_c + R_s) x_3}{\hat{L}_a} \right] \\ &+ \frac{K_m x_3}{M_b x_1^2} \left[-\frac{1}{\hat{L}_a} \left(\frac{\hat{L}_a x_2 x_3}{x_1} + (R_c + R_s) x_3 - \frac{M_b \hat{L}_a x_1^2}{K_m x_3} v \right) + \frac{(R_c + R_s) x_3}{\bar{L}_a} - \frac{u}{\bar{L}_a} \right] \\ &= v + \frac{K_m (R_c + R_s)}{M_b \bar{L}_a} \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^2 - \frac{K_m x_3}{M_b \bar{L}_a x_1^2} u \end{aligned} \quad (36)$$

식 (33)에 식 (36)을 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= v + \frac{K_m (R_c + R_s)}{M_b \bar{L}_a} \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^2 - \frac{K_m x_3}{M_b \bar{L}_a x_1^2} u \end{aligned} \quad (37)$$

식 (37)의 $\frac{K_m(R_c+R_s)}{M_b\bar{L}_a}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2 - \frac{K_mx_3}{M_b\bar{L}_ax_1^2}u$ 를 z 에 관한 식으로 변환하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= z_1, \quad x_2 = z_2 \text{ 이고, } z_3 = -\frac{1}{2} \frac{K_mx_3^2}{M_bx_1^2} + g \text{ 에서} \\
 \frac{1}{2} \frac{K_mx_3^2}{M_bx_1^2} &= g - z_3 \text{ 이고 } \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2 = \frac{2M_b(g-z_3)}{K_m} \text{ 이며} \\
 \frac{x_3}{x_1} &= \sqrt{\frac{2M_b(g-z_3)}{K_m}} \text{ 이므로 } x_3 = z_1 \sqrt{\frac{2M_b(g-z_3)}{K_m}} \text{ 이다.} \\
 \text{또한 } u &= \frac{\hat{L}_ax_2x_3}{x_1} + (R_c+R_s)x_3 - \frac{M_b\hat{L}_ax_1^2}{K_mx_3}v \\
 &= \hat{L}_az_2\sqrt{\frac{2M_b(g-z_3)}{K_m}} + (R_c+R_s)z_1\sqrt{\frac{2M_b(g-z_3)}{K_m}} \\
 &\quad - \hat{L}_az_1v\sqrt{\frac{M_b}{2K_m(g-z_3)}} \text{ 이므로} \\
 \frac{K_m(R_c+R_s)}{M_b\bar{L}_a}\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2 - \frac{K_mx_3}{M_b\bar{L}_ax_1^2}u &= \frac{K_m(R_c+R_s)}{M_b\bar{L}_a} \frac{2M_b(g-z_3)}{2M_b(g-z_3)} \\
 &\quad - \frac{M_b\bar{L}_a}{K_mz_1}\sqrt{\frac{2M_b(g-z_3)}{K_m}} \times \\
 &\quad \left[\hat{L}_az_2\sqrt{\frac{2M_b(g-z_3)}{K_m}} + (R_c+R_s)z_1\sqrt{\frac{2M_b(g-z_3)}{K_m}} - \hat{L}_az_1v\sqrt{\frac{M_b}{2K_m(g-z_3)}} \right] \\
 &= \frac{2(R_c+R_s)(g-z_3)}{\bar{L}_a} - \frac{1}{\bar{L}_a} \left[\frac{\hat{L}_az_2(g-z_3)}{z_1} - 2(R_c+R_s) - \hat{L}_av \right] \quad (38)
 \end{aligned}$$

따라서 식 (38)에 의해 식 (37)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 \dot{z}_3 &= \frac{2(R_c+R_s)(g-z_3)}{\bar{L}_a} \\
 &\quad - \frac{1}{\bar{L}_a} \left[\frac{\hat{L}_az_2(g-z_3)}{z_1} - 2(R_c+R_s) - \hat{L}_av \right] \\
 &= v + \delta(z) \quad (39)
 \end{aligned}$$

따라서 자기 부상 시스템의 코일 인덕턴스를 고려한 식 (39)를 토대로 $\|\delta\|_\infty \leq \rho(t,e) + \kappa\|\phi\|_\infty$ 에서 $\rho(t,z)$ 의 구조가 완전히 바뀌고 $\kappa \neq 0$ 이므로 코일 저항을 고려한 제어기의 구조와 확연히 달라질 것이며 복잡해져 계산량도 올라간다. 따라서 동일한 제어기로 모든 불확실성을 고려할 수는 없으므로 이와 같이 과도한 제어를 설계할 필요는 없을 것으로 보인다. 다음 장의 실험 결과에서 코일 저항에 대한 강인 제어를 설계한 것으로 충분한 제어 성능을 얻는다는 것을 보일 것이며 불확실성 고려 여부에 따른 제어기의 성능을 관찰 및 비교하여 제안된 강인 제어기의 우수성을 검증하고자 한다.

4. 실험 결과

실험 환경은 표 1의 자기 부상 시스템의 사양을 이용하였으며 $\hat{R}_u = 10 \Omega$, $\bar{R}_u = 26 \Omega$ 이다. 저항이 시스템의 내부에 있으므로 시스템을 분해하기 전에는 측정이 불가능하므로 가급적 큰 불확실성까지 고려할 수 있도록 \bar{R}_u 의 값을 충분한 마진을 두고 설계하였으며 이를 통해 상태방정식 (3)에서 모델링 되지 않은 불확실성 $\Delta f(x)$ 에 대해서도 함께 강인하게 제어할 수 있을 것이다. 제어 목표는 $x_b = 6 \text{ mm}$ 로 설정하였으며 식 (30)에서 $w = w^T$ 이므로 식 (22)를 통해 w 의 값은 $w_1 = 4.7619 \times 10^{-6}$, $w_2 = 122.4826 \times 10^{-3}$,

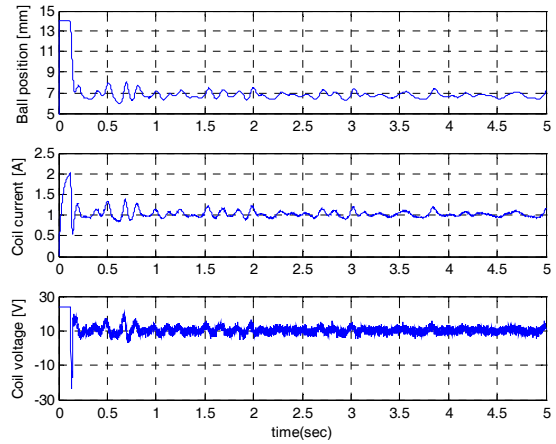


그림 3 코일 저항의 불확실성을 고려하지 않은 제어기(16)의 실험 결과

Fig. 3 Experimental results of the controller(16) without considering uncertain coil resistor

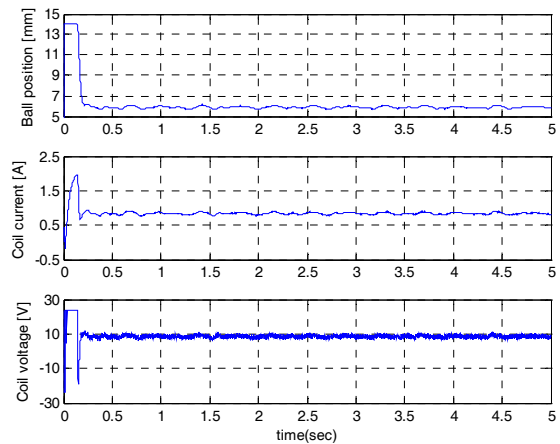


그림 4 코일 저항의 불확실성을 고려한 강인 제어기(32)의 실험 결과

Fig. 4 Experimental results of the controller(32) considering uncertain coil resistance

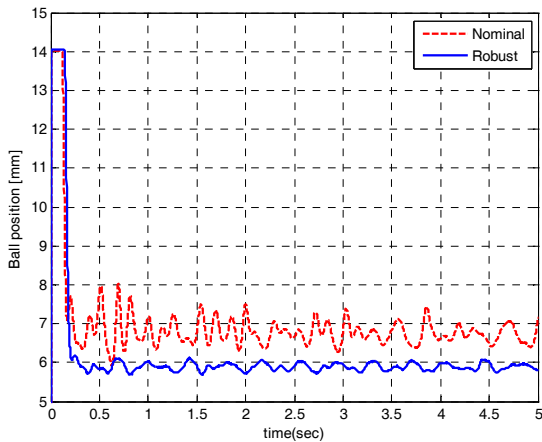


그림 5 제어기의 실험 결과 비교

Fig. 5 Controller comparison via experimental results

$w_3 = 6.236 \times 10^{-3}$ 이다. 그림 3, 4는 두 가지 제어기를 실험을 통해 쇠공의 위치와 코일의 전류, 입력전압을 나타낸 것이다.

그림 5는 코일 저항의 불확실성 고려 여부에 따른 제어기의 실험 결과에서 자기 부상 시스템의 출력 y 를 비교한 것이다. 제안된 강인 제어기의 우수성을 명확히 드러내기 위해 두 가지 제어기의 출력을 함께 나타내었다. 두 가지 제어기의 성능 비교를 토대로 코일 저항의 불확실성을 고려하지 않은 임-출력 궤환 선형화 기반 제어기는 정상상태 오차가 발생하였고, 제안된 코일 저항의 불확실성을 고려한 강인 제어기는 제어 목표 $6mm$ 에 대해 추정 오차가 거의 없으며 진동이 덜하다는 것을 확인하여 실제로 자기 부상 시스템의 코일 저항에 불확실성이 존재하여 정상상태 오차가 발생할 것이라는 우리의 판단을 증명하였다.

5. 결 론

본 논문에서는 자기 부상 시스템의 코일 저항에 불확실성이 존재한다고 할 때 임-출력 궤환 선형화로 근사하여 안정한 부분에 대해 제어기를 설계 및 분석하여 시스템의 불확실성을 고려하지 않음으로 인해 정밀 제어가 되지 않을 가능성이 있음을 증명하고, 불확실한 부분에 대해서는 Lyapunov redesign 기법을 적용하여 코일 저항의 불확실성을 고려하도록 제어기를 설계 및 분석하였다. 시스템의 안정한 부분과 불확실한 부분에 대해 각각 설계한 것을 종합하여 최종적인 제어기 식을 정리한 후 실험을 통해 코일 저항의 불확실성을 고려함에 따라 제어 목표에 근접하며 진동이 덜하다는 것을 확인하여 제안된 강인 제어기의 성능이 뛰어나다는 것을 입증하였다. 따라서 제안된 제어기가 공학적 관점에서 유효함을 증명하였으며 본 논문에서 제안된 기법은 다른 자기 부상 시스템에도 확대해서 적용되어 학술적으로 기여할 것이라 기대한다.

감사의 글

본 논문은 동아대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

References

- [1] A.E. Hajjaji and M. Ouladsine, "Modeling and nonlinear control of magnetic levitation systems," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol.48, no.4, pp.831-838, 2001.
- [2] M.-G. Jeong and H.-L. Choi, "Switching control of electromagnetic levitation system based on jacobian linearization and input-output feedback linearization," *Trans. KIEE(in Korean)*, vol.64, no.4, pp.578-585, 2015.
- [3] S.-J. Joo and J.-H. Seo, "Design and anlysis of the nonlinear feedback linearizing control for an electromagnetic suspension system," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol.5, no.1, pp.135-144, 1997.
- [4] H.K. Khalil, *Nonlinear systems*, 3rd Ed., Prentice Hall Inc., 2002.
- [5] H.-D. Kim and H.-L. Choi, "Design and analysis of an output feedback controller for a chain of integrators system compensating measurement noise of feedback sensor," *Journal of Institute of Control, Robotics and System(in Korean)*, vol.17, no.4, pp.299-303, 2011.
- [6] S.-H. Lee, H.-K. Sung, J.-T. Lim, and Z. Bien, "Self-tuning control of electromagnetic levitation systems," *Control Engineering Practice*, vol.8, no.7, pp.749-756, 2000.
- [7] C. Makkar, G. Hu, W. G. Sawyer, and W. E. Dixon, "Lyapunov-based tracking control in the presence of uncertain nonlinear parameterizable friction," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol.52, no.10, pp.1988-1994, 2007.
- [8] G.-M. Park and H.-L. Choi, "Control of electromagnetic levitation system using ϵ -scaling partial state feedback controller," *Trans. KIEE(in Korean)*, vol.60, no.8, pp.1572-1576, 2011.
- [9] Quanser, *MAGLEV user manuals*, 2008.
- [10] D.L. Trumper, "Linearizing control of magnetic suspension systems," *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, vol.5, no.4, pp.427-438, 1997.

저 자 소 개



정 민 길(Min-Gil Jeong)

2014년 동아대학교 전기공학과(학사).
2014년~현재 동 대학원 석사과정.
관심분야는 입-출력 궤환 선형화 및 스위칭 제어 기법, 강인 제어기 설계 등.



최 호 림(Ho-Lim Choi)

1996년 Univ. of Iowa, USA(학사). 1999년,
2004년 KAIST(석·박사). KAIST 정보전자연구
연구소 연구조교수, KIST 인지로봇연구단 선
임연구원. 2007년~현재 동아대학교 전기공
학과 부교수. 관심분야는 비선형 시스템의
궤환 선형화 기법, 시지연 시스템, DEFS 등.