

## 論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 43(8), 692-698(2015)

DOI:http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2015.43.8.692

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

## 원형 제한 3체 문제의 불변위상공간을 이용한 행성간 궤적설계 기초 연구

정옥철\*, 안상일\*\*, 정대원\*\*, 김은규\*\*, 방효충\*\*\*

## Preliminary Study on Interplanetary Trajectory Design using Invariant Manifolds of the Circular Restricted Three Body Problem

Okchul Jung\*, Sangil Ahn\*\*, Daewon Chung\*\*, Eunyou Kim\*\* and Hyochoong Bang\*\*\*

Satellite Information Center, Korea Aerospace Research Institute\* , \*\*

Department of Aerospace Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology\*\*\*

## ABSTRACT

This paper represents a trajectory design and analysis technique which uses invariant manifolds of the circular restricted three body problem. Instead of the classical patched conic method based on 2-body problem, the equation of motion and dynamical behavior of spacecraft in the circular restricted 3-body problem are introduced, and the characteristics of Lyapunov orbits near libration points and their invariant manifolds are covered in this paper. The trajectories from/to Lyapunov orbits are numerically generated with invariant manifolds in the Earth-moon system. The trajectories in the Sun-Jupiter system are also analyzed with various initial conditions in the boundary surface. These methods can be effectively applied to interplanetary trajectory designs.

## 초 록

본 논문에서는 원형 제한 3체 문제의 불변위상공간을 이용하여 지구-달 또는 행성간의 궤적을 설계하고 해석하는 기법을 소개한다. 2체 문제를 조합하는 고전적인 방식 대신에 원형 제한 3체 문제에 대한 운동방정식, 궤적의 동적 특성, 평형점 주변의 리아프누프 궤도와 불변위상공간의 특성을 기술한다. 원형 제한 3체 문제의 불변위상공간을 이용했을 때, 지구-달 시스템의 궤적설계 방식과 태양-목성 시스템의 경계면에서의 초기조건에 따른 궤적 특성을 수치 시뮬레이션을 통해 확인한다. 본 논문에서 제안한 원형 제한 3체 문제의 불변위상공간을 이용한 궤적설계 기법은 저추력 또는 저에너지를 이용한 달탐사 또는 행성탐사 임무 등에 활용 가능할 것이다.

**Key Words** : Circular Restricted Three Body Problem(원형 제한 3체 문제), Interplanetary Trajectory Design(행성간 궤적설계), Invariant Manifold(불변위상공간), Libration Point(평형점), Lyapunov Orbit(리아프누프 궤도), Poincare Map(포앙카레 도법)

† Received : September 5, 2014 Revised : July 10, 2015 Accepted : July 22, 2015

\* Corresponding author, E-mail : ocjung@kari.re.kr

## I. 서 론

행성간 궤적설계는 행성탐사 위성의 임무설계 및 해석과 직접적으로 관련된 필수 연구 분야이다. 최근 미국항공우주국(NASA)의 큐리오시티(Curiosity)가 성공적으로 발사되어 운영됨에 따라 행성탐사에 대한 관심은 더욱 높아졌다. 행성탐사의 궤적설계는 특정 행성을 출발하여 목표 행성에 도착하기 위해 필요한 초기 및 최종 경계 조건과 궤도보정 등을 구하는 문제로 생각할 수 있다. 기본적인 행성간 궤적설계는 여러 개의 부분 궤적을 서로 연결하는 방식을 사용하는데, 이 방법은 출발 행성(Departing Planet), 도착 행성(Arrival Planet), 태양(Sun), 그리고 위성을 포함하는 문제가 된다[1]. 하지만, 궤적의 단계별로 고려해야 하는 물체는 각각 다르다. 예를 들어, 출발 행성의 작용권구(Sphere of Influence)내에서는 출발 행성의 중력장과 위성을 고려한 2체 문제로 간단히 표현할 수 있다. 이후 단계에서는 태양과 위성의 2체 문제, 그리고 도착 행성과 위성의 2체 문제로 각각 구분이 가능하다. 즉, 간단한 형태의 2체 문제를 단계별로 해석하여 이들을 조합하는 방식으로 행성간 궤적을 설계할 수 있다. 이 과정에서 천이궤도는 임무 요구사항에 따라 달라질 수 있지만, 동일 궤도평면에서는 호만 천이궤도(Hohmann Transfer Orbit) 방식이 많이 고려된다.

최근에는 3체 또는 4체 문제를 활용한 궤적설계 방식도 많이 연구되고 있는데, 주로 태양 관측임무에 적용되었다. 태양-지구시스템의 L1 평형점(Libration Point)에 대한 할로궤도(Halo Orbit)에서는 지속적인 태양관측이 가능한데, 1978년 ISEE-3 임무, 1995년 SOHO 임무, 2001년 Genesis 임무(Fig. 1) 등이 해당된다[2,3]. 지구-달 시스템에서는 일본의 HITEN(1991년) 임무가 대표적 사례로 지구에서 달로 천이하기 위해 태양과 달, 지구의 중력을 반영한 제한 4체 문제로 접근했다고 알려져 있다[4]. 이 방식은 호만 천이 방식보다 사용 연료량이 적은 장점이 있지만, 목표지점에 도달하는데 걸리는 시간이 길다는 단점이 있다. 이 기법은 향후 행성간 화물운송 임무 등과 같이 장기 비행시간을 고려한 궤적설계에 적합할 것으로 전망된다[5]. 또한, 목성 주변의 달탐사 임무에도 3체 또는 4체 문제를 고려한 궤적설계가 제안되고 있다[6,7].

본 논문에서는 원형 제한 3체 문제(Circular Restricted Three Body Problem) 및 동역학계 이론을 적용한 불변위상공간(Invariant Manifold)을

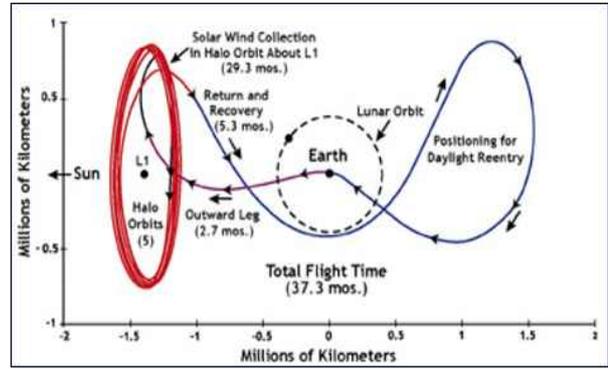


Fig. 1. Genesis Trajectory

이용하여 행성간 궤적설계 기법을 분석하고자 한다. 이를 위해 기본적인 원형 제한 3체 문제에 대한 운동방정식 및 동적 특성을 살펴보고, 힐 영역(Hill's Region), 평형점, 리아프누프 궤도(Lyapunov Orbit)에 관해 기본적인 내용을 정리하고, 행성 간 궤적설계에서 많이 활용되고 있는 L1 및 L2 평형점에 대한 주기궤도(Periodic Orbit)로부터 불변위상공간을 수치 시뮬레이션을 통해 확인한다. 또한, 행성간 궤적설계 및 경계면에서의 초기조건에 따른 궤적 특성을 지구-달 시스템과 태양-목성 시스템을 예시로 제시한다.

## II. 본 론

### 2.1 원형 제한 3체 문제

원형 제한 3체 문제는 질점으로 가정한 두 개의 주물체(Primary/Secondary Bodies)가 서로의 중력에 의해 중심점(Barycenter)에 대한 원형궤도를 형성한 환경에서, 상대적으로 무시할만한 질량을 가진 우주비행체(위성 등)의 운동을 나타내는 문제이다. Fig. 2에 나타낸 위성의 운동방정식

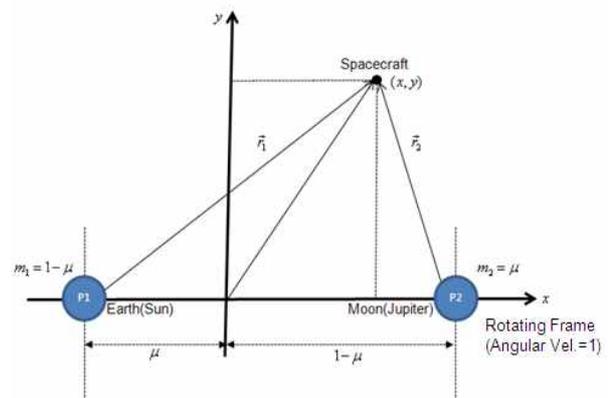


Fig. 2. Geometry of CRTBP

은 xy 평면상에서 식(1)-(2)과 같이 표현된다. 본 논문에서 사용하고 있는 xy 평면은 회전좌표계로 두 개의 주물체들은 x축에 위치하고, y축은 x축과 직교한다. 참고로 회전좌표계에서 관성좌표계로의 변환은 주물체들의 각속도 성분을 고려하면 된다[8,9,10].

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - (1-\mu)\frac{x+\mu}{r_1^3} - \mu\frac{x-(1-\mu)}{r_2^3} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3} \quad (2)$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} : \text{질량 파라미터}$$

원형 제한 3체 문제에서 포텐셜 함수(Potential Function,  $U$ )와 자코비 상수(Jacobi Constant,  $C$ )는 식(3)-(4)와 같이 정의된다.

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (3)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U - C = V^2 \quad (4)$$

포텐셜 함수와 자코비 상수는 위성의 위치 및 속도, 질량 파라미터의 함수로서, 적용하려는 두 개의 주물체에 대하여 제 3체에 해당하는 위성의 초기조건이 주어지면 결정된다. 식 (4)에서 위성의 속도( $V$ )는 0보다 커야 하는데, 경계점인  $V=0$ 인 지점을 영 속도 곡선(Zero Velocity Curve)로 정의할 수 있다. 이 때 위성의 운동은 주어진 초기조건에서의 위치에너지와 속도에너지에 해당하는 힐 영역 내에서만 허용된다. Fig. 3은 지구-달 시스템에서의 영 속도 곡선을 도시하고 있으며, L1~L5는 평형점을 나타낸다. 그림에서 자코비상

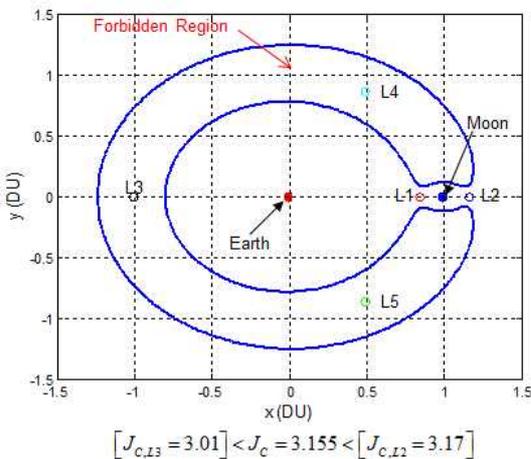


Fig. 3. Example of Zero Velocity Curve

Table 1. Libration Points in EM System

평형점	x(DU)	y(DU)	x(km)	y(km)
L1	0.8369139	0	321699.67	0
L2	1.1556831	0	444230.72	0
L3	-1.0050627	0	-386334.06	0
L4	0.4878491	0.8660254	187523.37	332889.77
L5	0.4878491	-0.8660254	187523.37	-332889.77

DU: Distance Unit, 1 DU=380,000km(EM System)

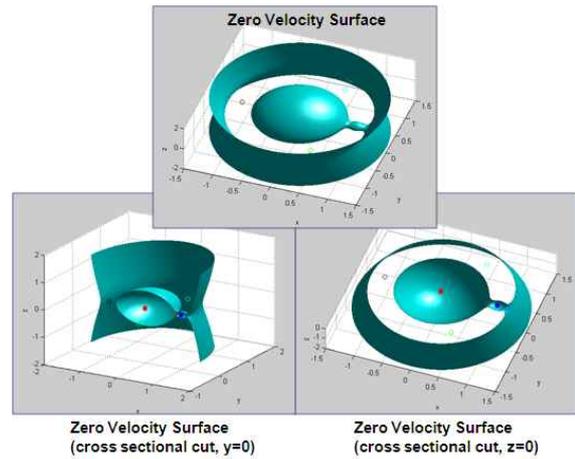


Fig. 4. Example of Zero Velocity Surface

수( $J_C$ )는  $J_{C,L2}$ 와  $J_{C,L3}$ 의 사이 값을 가지므로 위성의 운동은 L1 및 L2 영역을 벗어날 수 있다. 평형점은 중력에 의한 가속도와 구심력에 의한 가속도가 평형을 이루는 점으로, 위성이 이 점에 위치하게 되면 회전좌표계에 대한 상대 속도 및 가속도가 0(zero)이 된다. 지구-달 시스템에서의 평형점 위치는 Table 1과 같다.

Figure 4는 3차원에서 영 속도 면(Zero Velocity Surface)을 나타낸다. 단면을 통해 지구와 달 사이의 L1 평형점 주변과 지구로부터 달 반대편의 L2 평형점 주변에 열린 통로가 형성되어 있음을 볼 수 있고, 지구를 출발한 위성이 L1 평형점, 달, L2 평형점을 거쳐 영 속도 면의 바깥쪽 영역으로 도달할 수 있다.

## 2.2 리아프누프 궤도

리아프누프 궤도란 앞 절에서 살펴본 평형점(L1-L3)을 중심으로 동일한 궤적을 주기적으로 반복하는 2차원 궤도를 의미한다. 리아프누프 궤도는 x축에 대해 대칭이고, x축을 항상 직교한다는 특성이 있다. 리아프누프 궤도를 구하기 위해서는 초기조건을 추측값(Initial Guess)을 이용하여 x축을 통과할 때까지 수치 적분을 수행한 뒤,

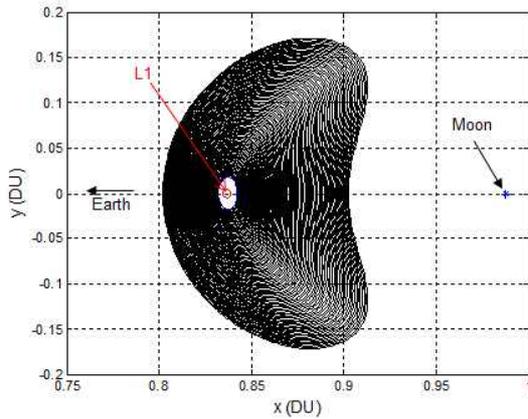


Fig. 5. Lyapunov Orbits in EM System

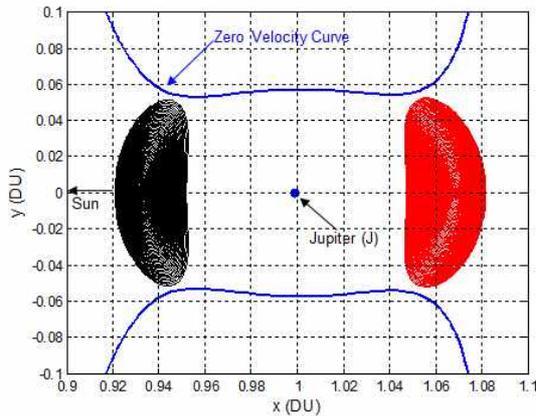


Fig. 6. Lyapunov Orbits in SJ System

x방향의 속도가 0인지를 확인하면서 y방향의 속도를 조정하는 미분보정(Differential Correction) 방식을 이용한다. Fig. 5는 지구-달 시스템에서 L1 평형점 주위의 리아프누프 궤도군을 나타낸 것으로, 리아프누프 궤도의 x 좌표 값에 0.0003씩 더해 가면서 미분보정 과정을 반복하여 얻은 100개의 궤도들의 집합이다. Fig. 6은 태양-목성 시스템에서 L1 및 L2 평형점 주변에 형성된 리아프누프 궤도를 각각 70개씩 시뮬레이션한 결과이다. 이론적으로 리아프누프 궤도는 무한개가 존재할 수 있지만, 본 논문에서는 지구-달 시스템의 경우 리아프누프 궤도의 형태 및 크기를 확인하기 위해 100개의 궤도를 그림에 나타내고 있고, 태양-목성 시스템의 경우 Fig. 6에 표시한 영속도 곡선을 만족하는 자코비 상수를 고려하여 70개의 궤도를 그림에 나타내고 있다. 또한, 리아프누프 궤도의 크기는 자코비 상수, 즉 궤도에너지에 따라 달라지며, 이에 따라 궤도 주기도 다른 값을 가지므로 임무 요구조건에 따라 궤도 크기를 선택적으로 설계할 수 있다.

리아프누프 궤도와 같이 평형점을 중심으로 주기운동을 하는 궤도는 항상 동일한 조건에서 주물체(지구-달 시스템의 경우, 지구 및 달을 의미함)를 계속해서 관측할 수 있고, 주물체를 연결하는 궤적의 중간지점으로 이용될 수 있다. 태양-지구 시스템에 적용될 경우, 태양과 지구의 중간 지점에서 태양을 항상 관측할 수 있다.

### 2.3 불변위상공간

동역학계 이론(Dynamical System Theory)은 해석적인 해를 구할 수 없는 다물체 운동에서 수치기법을 통해 궤적을 설계하는데 이용된다[11, 12]. 이로부터 도입된 불변위상공간은 궤적들의 집합으로, 시간에 따른 궤적이 원래 위상공간에 계속 남아있는 특징이 있다. 행성간 궤적 설계에 있어 불변위상공간은 안정한 위상공간과 불안정한 위상공간으로 구분되는데, 안정한 경우 궤적이 시간이 경과함에 따라 리아프누프 궤도 또는 평형점으로 접근하는 반면에, 불안정한 경우에는 궤적이 리아프누프 궤도 또는 평형점으로부터 멀어지는 특성을 갖는다. 리아프누프 궤도가 주어졌을 때, 불변위상공간을 구하는 절차는 아래와 같다[13]. 수식에서 위 첨자는 불안정(Unstable)과 안정(Stable)을 나타내고,  $X_0$ 는 리아프누프 궤도의 위치 및 속도벡터이다. 불변위상공간을 위한 초기조건 중 불안정한 경우는 시간에 따라 리아프누프 궤도에서 점차 멀어지므로 순방향으로 적분을 수행하는 반면에, 안정한 경우는 시간에 따라 리아프누프 궤도로 접근하게 되므로 역방향으로 적분을 수행하여 불변위상공간을 구성하는 궤적을 찾을 수 있다.

- ① 모노드롬(Monodromy) 행렬로부터 고유값 및 고유벡터 계산 (4개의 고유값 존재)
  - $\lambda_1 > 1$ : 불안정 고유벡터  $Y^u(X_0)$
  - $\lambda_2 = 1/\lambda_1$ : 안정 고유벡터  $Y^s(X_0)$
  - $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$
- ② 불변위상공간을 위한 초기조건 계산
  - 불안정:  $X^u(X_0) = X_0 + \epsilon Y^u(X_0)$ ,  $\epsilon \approx 10^{-6}$
  - 안정:  $X^s(X_0) = X_0 + \epsilon Y^s(X_0)$ ,  $\epsilon \approx 10^{-6}$
- ③ 초기조건을 이용한 수치적분 수행
  - 불안정: 순방향 적분
  - 안정: 역방향 적분

불변위상공간을 이용한 궤적설계 및 해석에는 포앙카레 도법(Poincare Map)이 많이 사용하는데, 포앙카레 면(Poincare Surface)에서는 궤적이 항상 직교하게 되어 문제의 차수를 줄일 수 있

고, 궤적의 동적 특성을 쉽게 파악할 수 있다. 예를 들어, 원형 제한 3체 문제에서의 궤적설계에 x축 또는 y축을 고정하여 4개의 포앙카레 면을 정의함으로써 문제 차수를 4차에서 3차로 줄일 수 있다. Fig. 7은 지구-달 시스템에서 L1, L2 평형점 주위의 리아프누프 궤도에 대한 불변위상공간을 30개의 궤적으로 구성하여 포앙카레 면과 함께 나타내었다. 여기서 사용한 리아프누프 궤도의 y-방향 최대 값은 약 0.08DU(실제 거리로 환산할 경우 약 30,000km)로 이는 Fig. 5에서 중간 정도의 크기를 갖는 리아프누프 궤도에 해당한다. 수치 시뮬레이션 결과 궤도 전파시간은 약 16~21일이다. Fig. 8은 두 개의 평형점을 포함하는 영역을 확대한 것이다. 그림에서 U1-U4는 포앙카레 면으로 식(5)-(8)의 조건을 만족한다.

$$U_1 = \{(x, \dot{x}) \mid y = 0, x < 0, \dot{y} < 0\} \quad (5)$$

$$U_4 = \{(x, \dot{x}) \mid y = 0, x < -1, \dot{y} > 0\} \quad (6)$$

$$U_2 = \{(y, \dot{y}) \mid x = 1 - \mu, y < 0, \dot{x} > 0\} \quad (7)$$

$$U_3 = \{(y, \dot{y}) \mid x = 1 - \mu, y > 0, \dot{x} < 0\} \quad (8)$$

예를 들어, Fig. 7의 U1 단면(Section)에서 시작한 궤적은 안정 위상공간을 따라 L1 리아프누프 궤도에 도달하며, 여기서 궤적 수정을 통해 불안정 위상공간을 따라 U2 단면으로 이동 가능하다. 이와 같은 방식으로 원래 지구 근방에서 출발한 위성은 L1, L2 평형점을 거쳐 지구-달 시스템의 외부 영역으로도 운동이 가능하다. 이와 같은 기법을 사용하면 추력을 이용하여 직접적으로 궤도를 변경하는 것보다 긴 시간이 소요되지만, 자연력을 이용한 궤도운동을 통해 연료 사용을 줄이는 궤적을 설계할 수 있다.

### 2.4 경계면 초기조건에 따른 궤적 특성

앞 절에서 설명한 포앙카레 면에서 안정 위상공간과 불안정 위상공간이 교차하는 지점을 경계면으로 정의했을 때, 경계면에서의 초기조건에 따른 다양한 궤적 특성을 확인할 수 있다. 예를 들어, Fig. 9에 나타낸 태양-목성 시스템에서 위성의 운동(그림 중앙: 목성)은 식(8)에 나타낸 U3 단면(가운데 수직선)에서 위치조건인  $x = 1 - \mu, y > 0$ 을 만족해야 한다. 또한, 속도조건( $v_x, v_y$ )을 구하기 위해서는 임의의  $y(>0)$ 와  $v_y$ 를 선택한 후 운동을 구속하는 조건인 식(4)를 통해  $v_x$ 를 간단하게 계산할 수 있다. 따라서 경계면에서 선택된  $y$ 와  $v_y$ 에 따라 다양한 궤적을 생성할 수 있다.

Figure 10의 위쪽에 형성된 폐곡선은 'L1 안정 위상공간과 U3 단면과의 교차점'(Cut-A)이고, 아래쪽에 형성된 폐곡선은 'L2 불안정 위상공간과

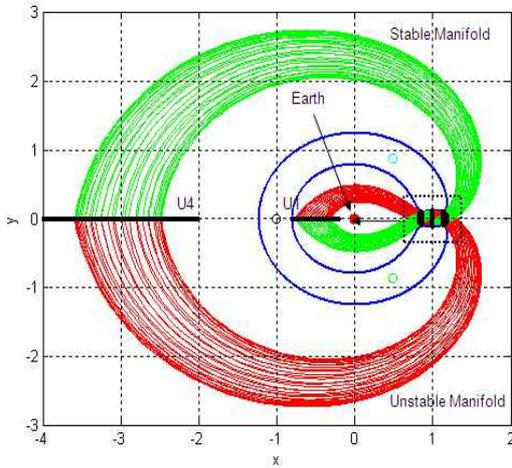


Fig. 7. Global View of Invariant Manifolds

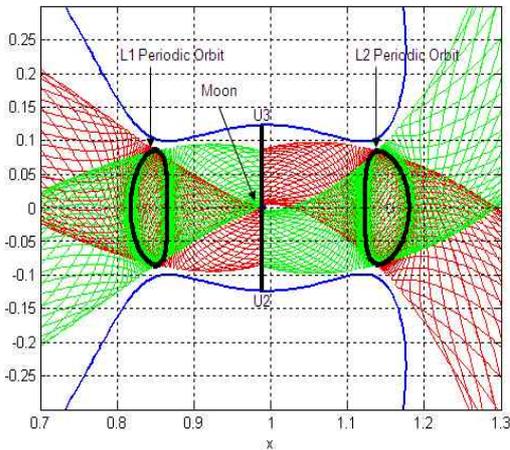


Fig. 8. Local View of Invariant Manifolds

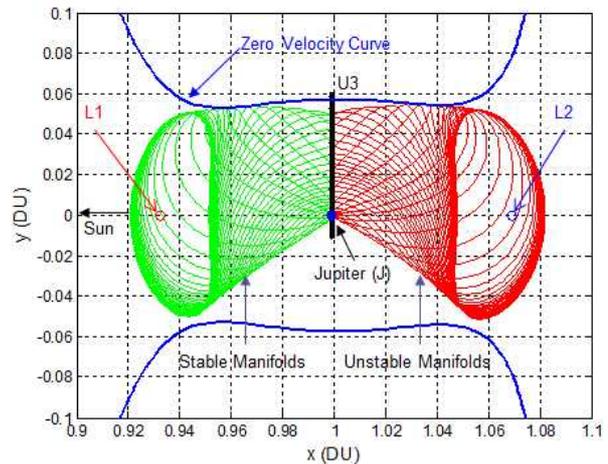


Fig. 9. Invariant Manifolds in SJ System

U3 단면과의 교차점(Cut-B)이다. 초기조건 선정에 따른 궤적 특성을 확인하기 위해 사용한 초기조건은 Table 2와 같다. Fig. 10에서 초기조건 #1은 Cut-B에 있으면서 Cut-A를 약간 벗어난 경

우이고, 초기조건 #2는 Cut-A와 Cut-B의 내부에 있는 경우이며, 초기조건 #3은 Cut-A에 으면서 Cut-B를 약간 벗어난 경우이다.

Table 2. Candidates for Initial Conditions

구분	$x_0$ (DU)	$y_0$ (DU)	$v_{x_0}$ (VU)	$v_{y_0}$ (VU)
초기조건 #1 (IC #1)	0.99905	0.03	-0.16947	-0.05
초기조건 #2 (IC #2)	0.99905	0.03	-0.17669	0.00
초기조건 #3 (IC #3)	0.99905	0.03	-0.16947	+0.05

DU: Distance Unit, 1 DU=778,400,000km(SJ System)  
 VU: Velocity Unit, 1 VU=13.102km/sec (SJ System)

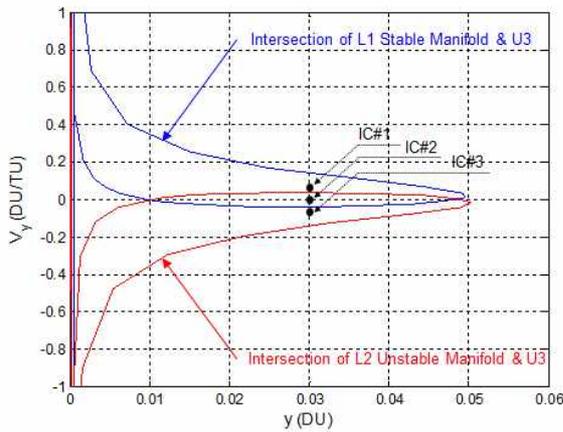


Fig. 10. Geometry of Initial Conditions

Figure 11은 앞에서 선정한 3가지 초기조건을 이용하여 순방향 및 역방향으로 각각 수치적분을 수행한 결과 생성된 궤적이다. Fig. 11의 위쪽 그림은 태양-목성을 모두 포함하고 있고, 아래쪽 그림은 목성 주변의 L1-L2 평형점 부근을 확대하여 표시한 것이다. Fig. 11의 왼쪽에 나타난 궤적은 초기조건 #1을 이용하는 경우로, L1 안정 위상공간에 근접했다가 다시 L2 방향으로 이동하여 외부로 빠져나가는 특성을 갖는다. 이와는 반대로 Fig. 11의 오른쪽에 나타난 궤적은 초기조건 #3을 이용하는 경우로, 외부로 빠져나가지 못하고 L1 부근을 거쳐 태양 근처의 내부로 끌려 들어온다. 끝으로 Fig. 11의 중앙에 표시한 궤적은 초기조건 #2를 이용했을 때, L1과 L2를 모두 통과하는 전이궤도(Transit Orbit) 특성을 갖게 된다. Fig. 11의 궤도전과 기간은 약 38년이며, Oterma 혜성의 운동과 유사한 패턴이다[14].

생성된 궤적의 자코비 상수를 확인해 보면, 전체 궤적 구간에서 일정하게 유지되는데 이는 초기조건이 가진 에너지에 변화가 없음을 의미한다. 즉, 행성 간 궤적설계 시 요구되는 임무 궤적의 특성에 따라 적절한 초기 궤도조건을 선정하게 되면 이상적으로는 별도의 연료를 사용하지 않아도 원하는 궤적을 구할 수 있다. 하지만, 실제로는 원형 제한 3체 문제의 주물체에 의한 중력 외에도 다양한 교란력이 작용하기 때문에, 원

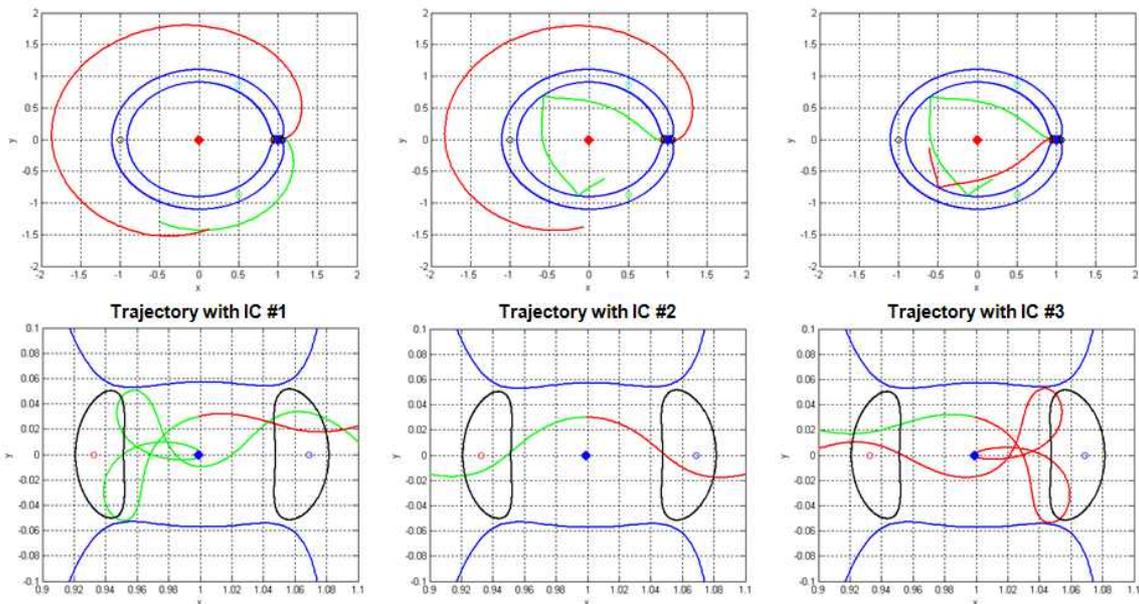


Fig. 11. Trajectories with different Initial Conditions (Left: IC#1, Middle: IC#2, Right: IC#3)

하는 궤도조건을 만족시키기 위해서는 궤도보정을 수행하여 에너지를 변경시켜야 한다[15].

### III. 결 론

본 논문에서는 제한 3체 문제의 운동방정식을 이용하여 궤적의 동적 특성을 살펴보고, 힐 영역과 평형점 그리고 리아프누프 궤도를 분석하였다. 또한, 동역학계 이론을 적용한 불변위상공간을 계산하는 절차를 정리하였고, 수치 시뮬레이션을 통해 행성 간 궤적설계 시 연료 최소화 개념을 적용할 수 있음을 확인하였다. 경계면에서의 초기조건을 크게 3가지로 구분하여 수치적분을 수행해 본 결과, 다양한 형태의 궤적을 생성할 수 있었다. 본 논문에서 분석한 제한 3체 문제와 불변위상공간 기법은 달탐사 또는 행성탐사 궤적설계에 활용 가능할 것으로 사료된다. 향후에는 임무 궤적 요구사항에 따른 전체 과정동안의 궤적설계를 궤도보정을 포함하여 살펴볼 예정이며, 연료 최소화와 같은 목적함수를 도입하여 궤적설계 최적화 방안 등을 연구할 계획이다.

### Reference

- 1) H. Schaub, J. L. Junkins, *Analytical Mechanics of Space Systems*, 2nd Edition, AIAA Education Series, 2009.
- 2) E. Canalias et al, *Assessment of mission design including utilization of libration points and weak stability boundaries*, ESTEC, 2004.
- 3) M. Lo, et al, "Genesis Mission Design", *Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, AIAA 98-4468, 1998.
- 4) W. S. Koon, et al, "Low Energy Transfer to the Moon", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 81, 63-73, 2001.
- 5) M. Nakamiya, et al, "Preliminary Analysis of Space Transportation Systems with Spaceports Around Libration Points", *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*,

AIAA 2008-6625, 2008.

6) W. S. Koon, et al, "Constructing a Low Energy Transfer Between Jovian Moons," *Contemporary Mathematics*, Vol. 292, 2002.

7) G. Gomez, et al, "Invariant Manifolds, the Spatial Three-Body Problem and Space Mission Design," *American Astronautical Society*, Paper 01-301, 2001.

8) V. Szebehely, *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*, Academic, New York, 1967.

9) S. C. Lee, et al, "Comparison of Global Optimization Methods for Insertion Maneuver into Earth-Moon L2 Quasi-Halo Orbit Considering Collision Avoidance", *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 15, No. 3, 2014.

10) T. S. No, et al, "A Study on Earth-moon Transfer Orbit Design", *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 13, No. 1, 2012.

11) J. S. Parker and G. H. Born, "Modeling a Low-Energy Ballistic Lunar Transfer Using Dynamical Systems Theory", *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 45, No. 6, 2008.

12) G. Mingotti, et al, "Optimal Low-Thrust Invariant Manifold Trajectories via Attainable Sets", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 34, No. 6, 2011.

13) R. L. Anderson, and M. Lo, "Role of Invariant Manifolds in Low-Thrust Trajectory Design", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 6, 2009.

14) S. Ross and M. Lo, "The Lunar L1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond", *Proceedings of AIAA Space 2001 Conference and Exposition*, AIAA 2001-4768, 2001.

15) H. Yamato and D. B. Spencer, "Orbit Transfer via Tube Jumping in Planar Restricted Problems of Four Bodies", *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 42, No. 2, 2005.